

- ۱- فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع $N_p(\mu, \Sigma)$ باشد در این صورت
- الف) توزیع $(n-1)S$ را به دست آورید.
- ب) برآورد ماکسیمم درستنمایی ماتریس کوواریانس جامعه را بدست آورید.
- ج) ماتریس کوواریانس میانگین نمونه را به دست آورید. (۲/۵ نمره)

- ۲- تجزیه طیفی ماتریس زیر را بیابید و سپس $A^{\frac{1}{2}}$ را به دست آورید (۱/۵ نمره)

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

- ۳- فرض کنید بردار $X_{3 \times 1}$ دارای توزیع $N_3(\mu, \Sigma)$ با $\mu = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، $\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ باشد.

الف) توزیع $X_3 - 2X_2$ را بیابید.

- ب) فرض کنید $Z_1 = X_2 - X_3$ و $Z_2 = X_2 + X_3$ و $(Z_3 | Z_1, Z_2) \sim N_1(Z_1 + Z_2, 10)$ ، توزیع $\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix}$ را بیابید.

- ج) توزیع شرطی $\begin{bmatrix} X_3 - 2X_1 \\ X_1 \end{bmatrix}$ را با معلوم بودن $X_2 = x_2$ بیابید. (۲ نمره)

- ۴- اگر $M \sim W_p(KI, m)$ بطوریکه $k > 0, m \geq p$ ثابت کنید:

الف) $E(M) = kmI$

ب) $\frac{1}{k} \text{tr}(M) \sim \chi_{mp}^2$ (۱ نمره)