## تعریف افراز :

فرض کنید $B_1 , \dots , B_n$ پیشامدهایی باشند که دو به دو ناسازگار بوده و اجتماع تمام آنها برابر فضای نمونه S باشد

$$\begin{cases} B_i \cap B_j = \phi & \forall i \neq j \\ S = \bigcup_{i=1}^{n} B_i \end{cases}$$

اصطلاحاً پیشامدهای $B_1 , \dots , B_n$ را یک افراز برای فضای نمونه گویند.

## قانون احتمال بیز و احتمال کل :

۱) اگر $B_1$ و ... $B_n$ افرازی از فضای نمونه باشد و A پیشامدی دلخواه

$$P(A) = P(A \cap S) = P\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right)\right) = P[(A\cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cdots \cup (A \cap B_n)]$$

دو به دو ناسازگارند برابر مجموعشان

$$\sum_{i=1}^{n} P(A\cap B_i) \underset{\text{قانون ضرب احتمال}}{=} P(B_1)P(A|B_1) + \dots + P(B_n)P(A|B_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)$$

پس

$$\text{قانون احتمال کل} \leftarrow \quad P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)$$

۲) قانون بیز: اگر $B_1 , \dots , B_n$ افرازی از فضای نمونه باشد و A پیشامد دلخواه باشد به ازای $j = 1, \dots, n$

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)}$$

$$P(B_j|A) = \frac{P(B_j \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|B_j)P(B_j) \rightarrow \text{قانون ضرب احتمال}}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i) \rightarrow \text{قانون احتمال کل}}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

چند مثال:

مثال ۱: اگر بازرس ۶۰٪ به گناهکاری متهمی مطمئن باشد ضمناً بداند ۲۰٪ از مردم عادی و همه گناهکاران دارای بعضی مشخصه‌ی جنایی از قبیل بزدلی در صورت داشتن، چپ‌دست بودن و ... هستند اگر متهم دارای مشخصه جنایی باشد چقدر احتمال دارد گناهکار باشد

فرض کنید G پیشامد این که متهم گناهکار است و C پیشامد این که وی دارای مشخصه جنایی است

$$P(G|C)=\frac{P(G\cap C)}{P(C)}=\frac{P(C|G)P(G)}{P(C|G)P(G)+P(C|G^c)P(G^c)}$$

$$=\frac{1\times 0.6}{1\times 0.6+0.2\times 0.4}=0.882$$

مثال ۲: سه آشپز A و B و C نوع خاصی کیک را می‌پزند که به ترتیب با احتمال‌های ۰/۰۲ ، ۰/۰۳ و ۰/۰۵ پف نمی‌کند در رستورانی که این آشپزها کار می‌کنند A پنجاه درصد، B سی درصد و C بیست درصد این کیک‌ها را می‌پزند چه نسبتی از شکست‌ها را A باعث می‌شود؟

E : پف کردن کیک

A : کیک دستپخت A    B : کیک دستپخت B    C : کیک دستپخت C

$P(A)=0.5$    $P(B)=0.3$    $P(C)=0.2$

$P(E^c|A)=0.02$    $P(E^c|B)=0.03$    $P(E^c|C)=0.05$

$$P(A|E^c)=\frac{P(E^c|A)P(A)}{P(E^c|A)P(A)+P(E^c|B)P(B)+P(E^c|C)P(C)}$$

تمرین مثال ۳: در بازی شطرنج بین دو شخص A و B شانس پیروزی در یک تک بازی برای بازیکن A به ترتیب $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{6}$ است اگر این دو نفر بطور متوالی چندین دست بازی کنند چقدر احتمال دارد A قبل از باختن به B برنده سه دست شده باشد.

**مثال ۳.۸.۲** فرض کنید که سه صندوق وجود دارد که هر کدام دارای دو کشو است. در هر یک از کشوهای صندوق اول یک سکه طلا وجود دارد و در یکی از کشوهای صندوق دوم یک سکه طلا و در کشو دیگر آن یک سکه نقره وجود دارد و در هر یک از کشوهای صندوق سوم یک سکه نقره وجود دارد. یکی از صندوقهای را به تصادف انتخاب می‌کنیم و یکی از کشوهای آن را باز می‌کنیم، اگر سکه داخل این کشو طلا باشد احتمال اینکه کشوی دیگر این صندوق نیز شامل سکه طلا باشد را بیابید.

**حل** اگر قرار دهیم

$B_i =$ پیشامد اینکه صندوق iام انتخاب شود $\quad i=۱,۲,۳$

$A =$ پیشامد اینکه سکه طلا مشاهده گردد

در این صورت

$$P(B_۱)=P(B_۲)=P(B_۳)=\frac{۱}{۳}\ ,\ P(A\mid B_۱)=۱\ ,\ P(A\mid B_۲)=\frac{۱}{۲}\ ,\ P(A\mid B_۳)=۰$$

و $P(B_۱\mid A)$ مورد سئوال است. بنابراین از فرمول احتمال بیز داریم که

$$P(B_۱\mid A)=\frac{P(B_۱)P(A\mid B_۱)}{\sum_{i=۱}^{۳}P(B_i)P(A\mid B_i)}=\frac{\frac{۱}{۳}\times ۱}{\frac{۱}{۳}\times ۱+\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}\times ۰}=\frac{۲}{۳}$$

**مثال ۴.۸.۲** یک موسسه مشاوره‌ای ماشینهای مورد نیازش را از سه آژانس با احتمالهای ۲۰٪ از D، ۲۰٪ از E و ۶۰٪ از F کرایه می‌کند. اگر ۱۰٪ ماشینهای آژانس D، ۱۲٪ ماشینهای آژانس E و ۴٪ از ماشینهای آژانس F لاستیک خراب داشته باشند، مطلوب است

الف- احتمال آنکه موسسه یک ماشین با لاستیک خراب کرایه کرده باشد را بیابید.

ب- اگر ماشین کرایه شده بوسیله موسسه دارای لاستیک خراب باشد احتمال آنکه از آژانس F کرایه کرده باشد را بیابید.

**حل** اگر قرار دهیم

$i=D,E,F$ پیشامد اینکه موسسه از آژانس نوع iام ماشین کرایه کند $=B_i$

پیشامد اینکه ماشین کرایه شده توسط موسسه دارای لاستیک خراب باشد $=A$

در این صورت

الف- (فرمول تفکیک احتمال)

$$P(A)=P(B_D\cap A)+P(B_E\cap A)+P(B_F\cap A)$$
$$=P(B_D)P(A|B_D)+P(B_E)P(A|B_E)+P(B_F)P(A|B_F)$$
$$=(۰/۲۰)(۰/۱۰)+(۰/۲۰)(۰/۱۲)+(۰/۶۰)(۰/۰۴)=۰/۰۶۸$$

ب- (فرمول بیز)

$$P(B_F|A)=\frac{P(B_F)P(A|B_F)}{P(A)}=\frac{(۰/۶۰)(۰/۰۴)}{۰/۰۶۸}=\frac{۶}{۱۷}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

# « اصول شمارش »

**تعاریف مقدماتی:**

**فاکتوریل:** با فرض اینکه $n \geq 0$ و $n$ عدد صحیح باشد $n$ فاکتوریل را با $n!$ نشان داده به صورت

$n! = 1 \times 2 \times \dots \times (n-1)(n)$

$n! \approx (\frac{n}{e})^n \sqrt{2\pi n}$

فرمول استرلینگ

تعریف می‌کنند. قرارداد $1!=1$ و $0!=1$

جمع دو فاکتوریل $3!+2! = 6+2=8$

تفریق $6!-4! = 720-24 = 696$

ضرب $(4!)(3!) = 24 \times 6 = 144$

تقسیم $\frac{5!}{3!} = \frac{5\times4\times\cancel{3\times2\times1}}{\cancel{3\times2\times1}} = 5\times4 = 20$

$\frac{5!}{4!} = 5$

(اصل اساسی شمارش) **یا اصل ضرب:** فرض کنید یک کار را بتوان با دو عمل متوالی $A$ و $B$ انجام داد اگر عمل $A$ به $m$ طریق و به دنبال آن عمل $B$ بتواند به $n$ طریق انجام پذیرد آنگاه این کار به $mn$ طریق انجام می‌پذیرد. به سادگی می‌توان عمل ضرب را برای $n$ عمل پی در پی تعمیم داد.

**مثال:** شخصی دارای 3 پیراهن، 4 کت و 5 شلوار است به چند طریق می‌تواند لباس متفاوت بپوشد:

$3 \times 4 \times 5 = 60$

**مثال ۲)** با ارقام ۰، ۱، ۲، 3 چند عدد دو رقمی می‌توان نوشت در صورتی،

الف) تکرار ارقام مجاز باشد $3\times4=12$

ب) " " نباشد $3\times3=9$

PAPCO

اصل جمع: فرض کنید یک کار را بتوان با دو عمل A یا B انجام داد. اگر عمل A به m طریق و عمل B به n طریق انجام پذیر باشد و این دو عمل نتوانند همزمان اتفاق بیفتند آن گاه این کار به $m+n$ طریق انجام می‌پذیرد.

نکته: اصول جمع و ضرب برای بیش از دو عمل مثلاً K عمل $A_1$ و ... $A_k$ قابل تعمیم است.

مثال ۱: به چند طریق می‌توان از بین ۴ دانشجوی کامپیوتر و ۵ دانشجوی آمار دو دانشجو انتخاب کرد به طوری که نفر اول به عنوان سرگروه و نفر دوم به عنوان دستیار باشد و هر دو نفر هم رشته باشند:

کامپیوتر $4 \times 3 = 12$ $\qquad 12 + 20 = 32$

آمار $5 \times 4 = 20$

مثال ۲: تحت هر یک از شرایط زیر تعداد اعداد ۳ رقمی بدون تکرار ارقام که با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ می‌توان ساخت بدست آورید

۱) اعداد فرد باشند $4 \times 4 \times 3 = 48$

۲) اعداد بزرگتر از عدد ۳۳۰ باشند $2 \times 5 \times 4 = 40 + 1 \times 2 \times 4 = 48$

۳) اعداد زوج باشند. کل اعداد $= 5 \times 5 \times 4 = 100 - \underbrace{48}_{\text{فرد}} = 52$

جایگشت: ترتیبی را که می‌توان n شیء متمایز را از چپ به راست بطوری که همگی کنار هم قرار گیرند یک جایگشت این n شیء گویند مثلاً $O_1O_2O_3$ یک جایگشت از سه چیز $O_1$ و $O_2$ و $O_3$ است.

اگر n عنصر متمایز را بخواهیم در یک صف کنار یکدیگر قرار دهیم تعداد جایگشتهای مختلف این عناصر برابر $n!$ است.

شیء اول به $n$ طریق $(A_1)$ عمل

شیء دوم به $n-1$ طریق

... شیء n ام ۱ طریق $(A_n)$ عمل

بنابر اصل ضرب ساختن یک جایگشت معادل است با انجام پیاپی اعمال $A_1 \ldots A_n$ که به $n(n-1) \ldots \times 1$ طریق انجام می‌پذیرد

مثال: دو حرف a و b را به چند طریق می‌توان کنار هم قرار داد؟ $2!$

هشت حرف متمایز را به چند طریق می‌توان کنار هم قرار داد! $8!$ ، 40320

Subject.
Year. Month. Date. ( )

مثال ۲: چهار دختر و پنج پسر می‌خواهند در یک صف کنار یکدیگر قرار گیرند.

الف) به چند طریق پسرها در یک طرف صف و دخترها در طرف دیگر صف قرار می‌گیرند.

$2! \times 4! \times 5!$

ب) به چند طریق پسرها و دخترها یک در میان در صف قرار می‌گیرند. $4! \times 5!$

ج) به چند طریق ۲ پسر مخصوص همواره کنار یکدیگر قرار می‌گیرند. $2! \times 8!$

۲) ترتیب (جایگشت r تایی از n شیء):

هرگاه از n چیز متمایز r تا را برگزیده $r \le n$ ، $r \geq 1$ ، به ترتیب از چپ به راست پهلوی هم قرار دهیم آن را یک جایگشت r تایی از n شیء یا ترتیب r شیء از n شیء گویند به عبارت دیگر تعداد طرقی که می‌توان r عضو از میان n عضو را طوری انتخاب کرد که نوع قرار گرفتن اعضا کنار یکدیگر مهم باشند، ترتیب نامیده می‌شود و به صورت

$$P_{n,r} \quad یا \quad (n)_r \quad یا \quad P^n_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

نشان می‌دهند

مثال: از بین ۴ کارمند یک شرکت به چند طریق می‌توان ۲ نفر را به عنوان رئیس و معاون انتخاب نمود.

$$P^4_2 = (4)_2 = \frac{4!}{2!} = 12$$

مثال: در یک مسابقه دو میدانی ۱۰ نفر با شماره‌های ۱ تا ۱۰ مشخص شده اند به چند طریق می‌توان نفرات اول تا سوم را مشخص نمود.

$$(10)_3 = \frac{10!}{7!} = 720$$

نکته: وقتی n شیء داریم که $n_1$ تا، $n_2$ تا، ... $n_r$ تا آنها شبیه اند می‌توان نشان داد

$$P(n; n_1, \dots, n_r) = \binom{n}{n_1 \dots n_r} = \frac{n!}{n_1! \cdots n_r!}$$

جایگشت مختلف وجود دارد.

مثال ۱ : با حروف PEPPER چند آرایش حرفی مختلف می‌توان تشکیل داد

$$\frac{6!}{2!\,3!\,1!}=60$$

مثال ۲ : در مسابقه شطرنجی ۱۰ نفر به قرار زیر شرکت دارند : 4 نفر روسی ، 3 نفر آمریکایی 2 نفر انگلیسی و 1 نفر برزیلی اگر نتیجه مسابقه برحسب ملیتهای بازیکنها به ترتیب احراز مقامشان در مسابقه وارد لیست شود چند برآمد ممکن است .

$$\frac{10!}{4!\,3!\,2!\,1!}=12600$$

مثال ۳ : مجموعه‌ای مرکب از ۴ پرچم سفید ، ۳ پرچم قرمز و ۲ پرچم آبی است چند آرایش مختلف می‌توان با این ۹ پرچم که در یک خط آویخته شده است می‌توان ساخت ؟ (پرچمهای هم رنگ یکسان است)

$$\frac{9!}{4!\times 3!\times 2!}=1260$$

## ۳) ترکیب r تایی از n شیء

هرگاه از n شیء متمایز یک گروه r تایی را باهم یا یکی به یک بدون توجه به ترتیب برگزینیم آن را یک ترکیب r تایی از n شیء گویند . به عبارت دیگر تعداد طرقی که می‌توان r عضو را از میان n عضو (ترتیب انتخاب مهم نباشد) انتخاب نمود ترکیب نامیده می‌شود و به صورت

$$C_r^n \;\text{یا}\; C_{n,r} \;\text{یا}\; \binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

بیان می‌شود .

مثال : می‌خواهیم از بین یک گروه ۲۰ نفری کمیته‌ای سه نفری تشکیل دهیم چند کمیته می‌توان تشکیل داد .

$$\binom{20}{3}=\frac{20!}{3!\,17!}=1140$$

Subject.
Year. Month. Date. ( )

**مثال ۲:** از گروهی مرکب از پنج مرد و هفت زن چند کمیته مختلف که از ۲ مرد و ۳ زن تشکیل شده باشند می‌توان تشکیل داد؟ اگر دو نفر از زنان با هم قهر باشند و از کار در یک کمیته خودداری کنند چند کمیته ممکن است.

الف) $\binom{5}{2}\binom{7}{3} = \frac{5!}{2!3!} \times \frac{7!}{3!4!} = 350$

زنان با قهر

$\binom{3}{3}$ $\binom{2}{0}\binom{5}{3} \underset{\text{یا}}{+} \binom{2}{1}\binom{5}{2} = 30$ زنان انتخابی بود

← هیچکدام از زنان قهر در کمیته نباشند $\frac{2!}{2!} \times \frac{5!}{3!2!}$

کل: $30 \times \binom{5}{2} = 300$

**تمرین:** نشان دهید:

$\binom{n}{n} = 1$ $\frac{n!}{n!} = 1$ $\binom{n}{n-1} = n$ $\binom{n}{0} = 1$ $\frac{n!}{0!\,n!} = 1$

$r\binom{n}{r} = n\binom{n-1}{r-1}$ ✓ $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

$\binom{n}{1}\binom{n}{n-1}$

$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$

**تمرین ۲:** ثابت کنید:

$$\binom{n+m}{r} = \binom{n}{0}\binom{m}{r} + \binom{n}{1}\binom{m}{r-1} + \dots + \binom{n}{r}\binom{m}{0}$$

که در آن $r \le n, r \le m$ و سپس با استفاده از این رابطه ثابت کنید

$$\binom{2n}{n} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}^2$$

برای انتخاب r نفر از n مرد و m زن $\binom{n+m}{r}$ حالت ممکن وجود دارد که به صورت

تجزیه $\binom{n}{0}\binom{m}{r} + \dots + \binom{n}{r}\binom{m}{0}$

**تمرین ۳:** تعداد طرقی که می‌توان n شیء متمایز را حول یک میز دایره‌ای قرار داد برابر $(n-1)!$ است.

PAPCO

## ~~گذاشتن مهره در جعبه~~ شمارش با مدل‌های جعبه و مهره

فرض کنید n جعبه داریم، می‌خواهیم با r مهره پر کنیم
به چند طریق می‌توان r مهره را داخل n جعبه قرار داد ~~به طوریکه~~ (~~در هر جعبه یک مهره گذاشته و دو طریق باشد~~) و هر یک از جعبه‌ها می‌توانند شامل r مهره باشند
به طوریکه:

۱) مهره‌ها متمایز و مهره مکرر مجاز است. (مهره‌ها متمایز و تکرار مجاز باشد) — $n^r$

۲) مهره‌ها متمایز و مهره مکرر غیر مجاز است. (مهره‌ها متمایز و تکرار مجاز نباشد) — $(n)_r$

۳) مهره‌ها غیر متمایز و مهره مکرر غیر مجاز است (مهره‌ها یکسان و تکرار مجاز نباشد) — $\binom{n}{r}$

۴) مهره‌ها غیر متمایز و مهره مکرر مجاز است (مهره‌ها یکسان و تکرار مجاز باشد)

### ۱) مهره‌ها متمایز و مهره مکرر مجاز است:

a b c ...
n n n ... $n^r$
به ازای هر مهره در هر جعبه‌ای می‌تواند برود

در این مدل r مهره متمایز داریم که می‌خواهیم در n جعبه بگذاریم پس پر کردن جعبه‌ها معادل با انجام دادن r کار است که هر کدام به n طریق انجام می‌شود پس طبق اصل ضرب

1 2 3 ... r
n n ... n $n^r$

جعبه‌ها: 1 2 3 ... n
a, b, c, ...

$n^r$ = تعداد روش‌های پر کردن جعبه

مثلاً دو مهره a و b را به چند طریق در سه جعبه می‌توان گذاشت؟ $3^2=9$

### ۲) مهره‌ها متمایز و مهره مکرر غیر مجاز است:

پس در این حالت $n \ge r$ و تعداد روش‌های پر کردن جعبه به این صورت است، ابتدا r جعبه را از بین n جعبه انتخاب می‌کنیم (کار $A_1$) سپس r جعبه انتخاب شده را با r مهره متمایز یک به یک پر می‌کنیم (کار $A_2$) ~~چون کار $A_1$~~ لذا کار $A_1$ با $\binom{n}{r}$ طریق و کار $A_2$ با $r!$ حالت انجام می‌شود

$$\text{تعداد روش‌های پر کردن جعبه} = \binom{n}{r} r! = \frac{n!}{(n-r)!} = (n)_r$$

جایگشت r تایی از n جسم متمایز (ترتیبی)

مثلاً دو مهره a و b را به چند طریق می‌توان در سه جعبه قرار داد به طوریکه در هر جعبه حداکثر یک مهره گذاشته شود؟

$$\binom{3}{2} 2! = 6$$

اول r تا جعبه انتخاب می‌کنیم چون می‌خواهیم r مهره را در r جعبه بگذاریم

a b c ...
n n-1 ... 1

۳) مهره‌ی غیرمتمایز و مهره مکرر غیرمجاز است ،

در این مدل نیز $N \geq 2$ و برای پر کردن جعبه‌ی ابتدا ۲ جعبه را از n جعبه انتخاب می کنیم (کار $A_1$) و پس ۲ جعبه را با ۲ مهره غیرمتمایز یک به یک پر می کنیم (کار $A_2$) چون کار $A_1$ به $\binom{n}{2}$ طریق و کار $A_2$ فقط به یک طریق انجام می پذیرد پس

$$\binom{n}{2}\times 1 = \frac{n!}{2!\,(n-2)!} = C_{n,2}$$

مثلاً دو مهره a و a را به چند طریق در ۳ جعبه بگذاریم :

$$\binom{3}{2}\times 1 = 3$$

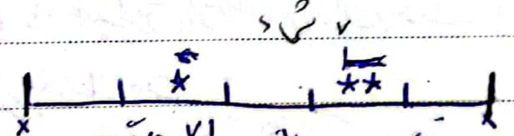
~~یا از a و a و b و b و b در سه جعبه~~ $\underbrace{a\ a}$ $\underbrace{b\ b\ b}_{2}$

$$\cancel{\binom{5}{2} = 10}$$

۴) ~~[illegible]~~ مهره‌ی غیرمتمایز و مهره مکرر مجاز است :

فرض کنیم می خواهیم پنج جعبه را با سه مهره غیرمتمایز پر کنیم

$P(n, n_1, \dots, n_r)$ ۷ شئ



شش خط عمودی داریم (خط اول و آخر ثابت فرض کنیم) $\frac{7!}{4!\,3!} = \binom{7}{3}$ جایگشت ، سه تا هم رنگ‌اند

بنابراین پر کردن پنج جعبه با سه مهره در این حالت معادل جایگشت چهار خط عمودی و سه ستاره به صورت

$$\frac{7!}{3!\,4!} \qquad \binom{7}{3} = 35$$

~~[illegible]~~ است .

پس اگر n جعبه را با $n+1$ خط عمودی نشان دهیم و خط اول و آخر را ثابت در نظر داریم پر کردن این n جعبه با ۲ مهره معادل جایگشت $n-1$ خط عمودی و ۲ ستاره است

$$\binom{n-1+2}{2} = \binom{n+2-1}{2} = \frac{(n+2-1)!}{2!\,(n-1)!}$$

روش انجام دارد .

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال ۱: احتمال اینکه روزهای تولد اعضای یک خانواده ده نفری در سال، تمام روزهای هفته را شامل شوند چقدر است. (افراد را نا‌متمایز فرض کنید)

ده مهره یکسان را به تصادف در هفت جعبه متمایز بگذاریم طوری که در هر جعبه حداقل یک مهره داشته باشیم.

$r \geq n$

$x_1 + \dots + x_{10} = 7$

ابتدا ۷ مهره را در ۷ جعبه می‌گذاریم کافیست ۳ مهره را در این ۷ جعبه بگذاریم طبق مدل ۴

$$\binom{7+3-1}{3} = \binom{9}{3}$$

۳ مهره یکسان در ۷ جعبه

$$P(\text{احتمال موفقیت}) = \frac{\binom{9}{3}}{\binom{16}{10}} = \frac{3}{286}$$

حداقل یک مهره در هر جعبه باشد

$$\binom{10+7-1}{10} = \binom{16}{10}$$

کل حالات چیدن ده مهره یکسان در ۷ جعبه

مثال ۲: مدیر یک شرکت خصوصی می‌خواهد ۵ سکه بهار آزادی را به عنوان پاداش بین سه کارمند A و B و C تقسیم کند. احتمال اینکه به کارمند A حداقل ۲ سکه پاداش بدهد را بیابید.

$$\binom{3+5-1}{5}$$

کل حالات

(فرض کنید ۵ مهره یکسان را بین ۳ جعبه تقسیم کنیم)

۳ تا سکه باقی می‌ماند

$$\binom{3+3-1}{3}$$

حداقل دو سکه بگیرد

$$P(A) = \frac{\binom{3+3-1}{3}}{\binom{3+5-1}{5}} = \frac{10}{21}$$

مثال‌های کتاب ~~۹۵،۹۸~~ مثال ۳۳ ص ۴۷

## احتمال شرطی:

**تعریف**: احتمال شرطی پیشامد A به شرط وقوع پیشامد B که آن را با $P(A|B)$ نمایش می‌دهند به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad P(B) > 0$$

PAPCO

$P(E_1) = \frac{1}{۳}$

## متغیرهای تصادفی

برای روشن شدن مفهوم متغیر تصادفی به مثال زیر توجه کنید

مثال ۱: سکه ای را دو بار می اندازیم پس فضای نمونه

$S = \{TT, HH, TH, HT\}$

شمار شیرها را با X نشان می دهیم یعنی اگر پیشامد HH رخ دهد X برابر ۲ و اگر پیشامد HT رخ دهد X برابر ۱ می شود پس بدیهی است که از پیشامدی به پیشامد دیگر مقدار X تغییر می کند از طرفی می دانیم احتمال اینکه X برابر ۲ شود $\frac{1}{4}$ و احتمال اینکه ۱ شود $\frac{1}{2}$ می باشد

| $X$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |

از این رو به X یک متغیر تصادفی گویند.

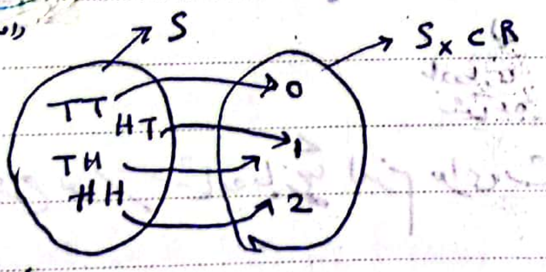
به عبارتی X تابعی است از فضای نمونه ~~S~~ به R؛ $X : S \xrightarrow{S_X \subset R} R$ یا به صورت $X : S \to S_X \ (\subset R)$ نشان می دهند

~~$P_X : S \to R$ یا $[0,1]$~~

برد آن زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی

$X(TT) = 0 \qquad X(TH) = X(HT) = 1 \qquad X(HH) = ۲$

دامنه آن فضای نمونه




متغیر تصادفی X به صورت یک تابع

نکته: متغیر تصادفی را با حروف بزرگ لاتین مثلاً X و عددی را که نتیجه‌ای خاص از آزمایش تصادفی است با حروف کوچک لاتین مثلاً x نشان می دهیم و عدد x را یافته (یا مقدار مشاهده شده) X گویند. پس $S_X$ یعنی برد تابع X در حقیقت فضای یافته‌ای X ~~فضای نمونه~~ است.

## تعریف متغیر تصادفی :

یک مدل احتمال، با فضای نمونه S در نظر بگیرید. تابع حقیقی X را که دامنه آن S و برد آن زیر مجموعه‌ای از اعداد حقیقی است، یک متغیر تصادفی روی این مدل احتمال نامیده می‌شود.
برد X را با $S_X$ نشان می‌دهیم و آن را تکیه‌گاه X می‌نامیم.
در حقیقت تابع X مجموعه S را که ممکن است عددی نباشد به یک مجموعه عددی $S_X$ تبدیل می‌کند.

$$S \xrightarrow{X} S_X$$

تذکر: برای هر زیر مجموعه عددی مانند A، منظور از $(X\in A)$ پیشامد این است که X در A قرار گیرد و احتمال این پیشامد را با $P(X\in A)$ نشان می‌دهیم.

مثال: بازی شیر و خط را با سکه‌ای نااریب تا رسیدن به اولین شیر ادامه می‌دهیم.
فرض کنید متغیر تصادفی X شماره بازی‌های لازم برای آمدن اولین شیر باشد. مثلاً اگر با سه بار بازی، شیر بیاید $X(TTH)=3$ در این مثال تکیه‌گاه X مجموعه اعداد طبیعی است.

$$S_X=\{1,2,\dots\}$$

بار اول شیر با یک بازی — با دو بازی شیر آمده

احتمال پیشامد زوج بودن شماره بازی‌های لازم برای مشاهده اولین شیر برابر با

$$P(X\in\{2,4,\dots\}) = P(\{TH, TTTH, \dots\})$$

$$=\left(\tfrac12\right)^2+\left(\tfrac12\right)^4+\dots = \frac{\frac14}{1-(\frac12)^2} = \frac{1/4}{3/4} = \frac13$$

$$\frac{\text{جمله اول}}{1-\text{نسبت}}$$

$$P(X>4) = P(X\in\{5,6,\dots\})$$

$$=(1/2)^5+(1/2)^6+\dots = \frac{\frac1{32}}{1-\frac12} = \frac1{16}$$

احتمال پیشامد بزرگتر بودن شماره بازی‌های لازم از ۴ برای مشاهده اولین شیر

+ ورکی

لزعنصری به عنصری تغییر می کند

## متغیر تصادفی گسسته و پیوسته :

متغیر تصادفی $X$ را گسسته می گویند هرگاه برد آن یعنی $S_X$ ، مجموعه عددی شمارش پذیر باشد و آن را پیوسته گویند هرگاه $S_X$ یک فاصله عددی یا اجتماع چند فاصله عددی باشد

یعنی در حالت گسسته

$$S_X = \{\underbrace{x_1, x_2, \dots}_{X \text{ نتایج}}\}$$

$$\text{متغیر تصادفی } X : \underset{\text{فضای نمونه}}{S} \longrightarrow \underset{\text{مجموعه عددی}}{S_X}$$

(یک تابع است که)

بطوریکه

$$\sum_i p(X = x_i) = 1 \qquad i = 1, 2, \dots$$

و در حالت پیوسته $p(X = x) = 0 \quad , \forall x \in R$

**تابع توزیع :** تابع $F$ از $R$ به فاصله $[0, 1]$ را که برای هر $x \in R$ با ضابطه زیر تعریف می شود تابع توزیع $X$ می نامیم

$$F : \underset{\text{دامنه}}{R} \longrightarrow \underset{\text{برد}}{[0, 1]}$$

$$F_X(x) = p(X \leq x)$$

که دارای خواص زیر است :

۱) $0 \leq F(x) \leq 1$ ،

۲) اگر $x_1 \leq x_2$ آنگاه $F(x_1) \leq F(x_2)$ ($F(x)$ یک تابع غیر نزولی است)

۳) $F$ از راست پیوسته است یعنی $\lim\limits_{h \to 0^+} F(x+h) = F(x)$

۴) $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = F(+\infty) = 1$ ، $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0$

هر تابع حقیقی $F(x)$ با ویژگیهای بالا ، تابع توزیع یک متغیر تصادفی $X$ است.

مثال ۱ : سکه‌ای نااریب را به تصادف دوبار می‌اندازیم فرض کنید متغیر تصادفی X شماره شیرهای باشد می‌خواهیم تابع توزیع X را پیدا کنیم.

$$S=\{\underbrace{HH}_{x=2},\ \underbrace{HT,\ TH}_{x=1},\ \underbrace{TT}_{x=0}\}$$

| $X$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $1/4$ | $1/2$ | $1/4$ |

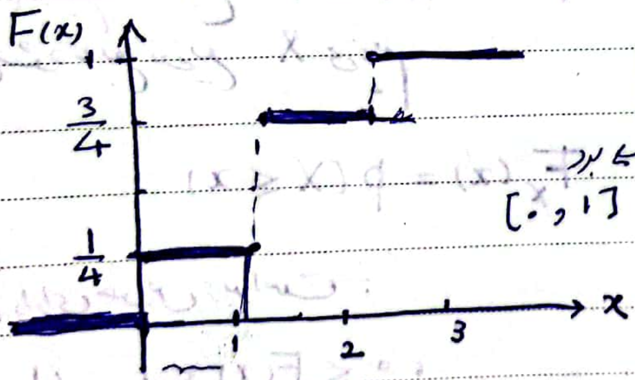
جدول توزیع احتمال X

* تعبیر $F(x)$ :

[مقدار $F(x)$ در نقطه ثابت $x$ برابر است با تمام جرم احتمالی که روی محور طول‌ها در سمت چپ نقطه $x$ و در خود $x$ داریم] به عبارت دیگر $F(x)$ برابر است با احتمال انباشته شده روی محور طول‌ها از $-\infty$ تا خود $x$.

عددی از R

$$F_X(x)=P(X\le x)=\begin{cases}0 & (x<0) \text{ در خود نقطه و چپ نقطه}\\ 1/4 & 0\le x<1\\ 3/4=\frac12+\frac14 & 1\le x<2\\ 1=\frac12+\frac14+\frac14 & x\ge 2\end{cases}$$



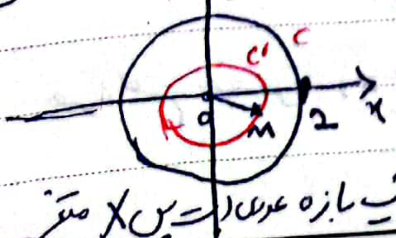

به بازه $[0,1]$

~~$P(X=0)=\frac14$~~

~~$P(0\le X<1)=$~~

$$F(3/2)=P(X\le 3/2)=3/4$$

مثال ۲ : نقطه M به تصادف در داخل دایره‌ای به شعاع ۲ و مرکز صفر انتخاب می‌کنیم. فضای نمونه از تمام نقاط داخل این دایره تشکیل می‌شود. فرض کنید متغیر تصادفی X برای هر نقطه M، اندازه پاره‌خط OM باشد.



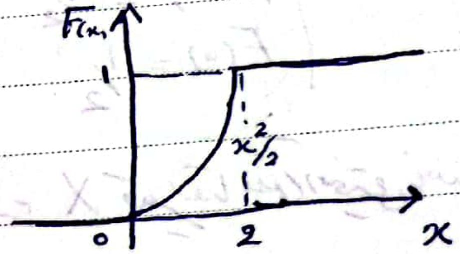

$$X(M)=x$$

پس تکیه‌گاه X : $S_X=[0,2)$ و چون یک بازه عددی است پس X متغیر تصادفی پیوسته است.

$$F(x) = P(X \le x) = \frac{\text{مساحت دایره } c'}{\text{مساحت دایره } c} = \frac{\pi x^2}{\pi 4} = \frac{x^2}{4}$$

پس فرمول جبری برای $F(x)$ به ازای تمام مقادیر $x$:

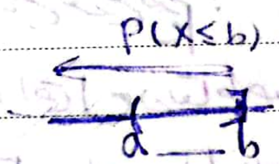
$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2/4 & 0 \le x < 2 \\ 1 & x \ge 2 \end{cases}$$




## محاسبه احتمال از روی تابع توزیع

هدف محاسبه $P(X \in I)$ برحسب $F(a)$ است که در آن $I$ یک فاصله عددی دلخواه است مثلاً $I = [a,b]$

$(a,b)$ $[a,b)$ $(a,b]$




1) $P(a < X \le b) = P(X \le b) - P(X \le a) = F(b) - F(a)$

2) $P(a < X < b) = P(X < b) - P(X \le a) = F(b^-) - F(a)$

3) $P(a \le X \le b) = F(b) - F(a^-)$

4) $P(a \le X < b) = F(b^-) - F(a^-)$

5) $P(X < b) = F(b^-)$ $\quad P(X > a) = 1 - F(a)$

مثال: تابع توزیع زیر را در نظر بگیرید. ~~نشان دهید متغیر تصادفی یک تابع توزیع را دارد.~~ سپس نمودار آن را رسم کنید و $P(0 < X < 1/2)$ را محاسبه کنید.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x + \frac{1}{2} & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 1 & x \ge \frac{1}{2} \end{cases}$$

مثال: سکه نااریبی را سه بار می اندازیم فرض کنید X شماره شیرها و Y شماره خطها باشد

الف) جدول توزیع احتمال X را پیدا کنید

ب) تابع توزیع X را بیابید و نمودار آن را رسم کنید

پ) $P(2 \le X < 3)$ ، $P(X \geq 1)$ و $P(X=2)$ را بیابید

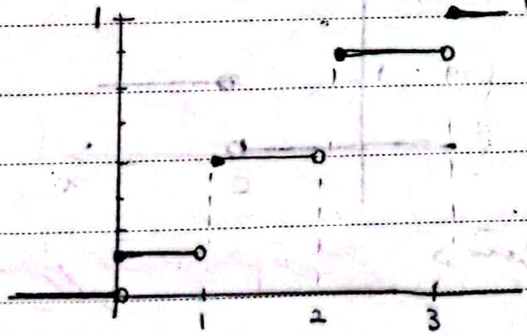
ت) فرض کنید $Z = X+Y$ تابع توزیع Z را پیدا کنید و نمودار آن را رسم کنید

$\{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$

$X = 3, 2, 1, 0$

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $1/8$ | $3/8$ | $3/8$ | $1/8$ |

$$F_X(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{8} & 0 \le x < 1 \\ \frac{4}{8} & 1 \le x < 2 \\ \frac{7}{8} & 2 \le x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$



$$\underbrace{P(2 \le X < 3)}_{P(X=2)} = F(3^-) - F(2^-) = \frac{7}{8} - \frac{4}{8} = \frac{3}{8}$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - F(1^-) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

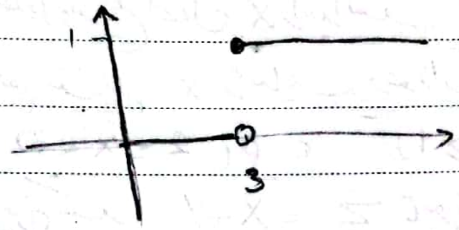
$$P(X = 2) = \frac{3}{8}$$

| $Y$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P(Y=y)$ | $1/8$ | $3/8$ | $3/8$ | $1/8$ |

Subject.
Year. Month. Date.

$P(X=0, Y=0)$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | (0,0) | (1,0) (0,1) | (2,0) (0,2) (1,1) | (3,0) (0,3) (2,1) (1,2) | (3,1) (1,3) (2,2) | (3,2) (2,3) | (3,3) |
| $X+Y$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $P(X+Y=z)$ | 0 | 0 | 0 | $\underbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{6}{8}}_{1}$ | 0 | 0 | 0 |



تابع پله‌ای در نقطه 3 $\quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & x<3 \\ 1 & x\geq 3 \end{cases}$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x<3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

$$X \overset{d}{=} Y \not\Rightarrow X = Y$$

$$X(HHH) = 3$$
$$Y(HHH) = 0$$

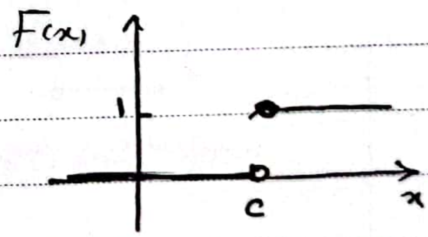
## متغیر تصادفی ثابت

هرگاه تمام احتمال در نقطه $x=c$ متمرکز شده باشد یعنی داشته باشیم

$$P(X=c) = 1$$

گوییم $X$ یک متغیر تصادفی ثابت است. تابع توزیع $X$ که آن را یک توزیع پله‌ای می‌نامند به صورت زیر است

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x<c \\ 1 & x \geq c \end{cases}$$



## متغیرهای تصادفی هم توزیع

دو متغیر تصادفی $X$ و $Y$ را هم توزیع می‌نامند هرگاه به ازای هر عدد حقیقی $z$

$$\forall z \quad P(X \leq z) = P(Y \leq z)$$

$$\Rightarrow F_X(z) = F_Y(z)$$

$$\Rightarrow X \overset{d}{=} Y$$

پس دو متغیر تصادفی هم توزیعند هرگاه تابع توزیع آنها برابر باشد.

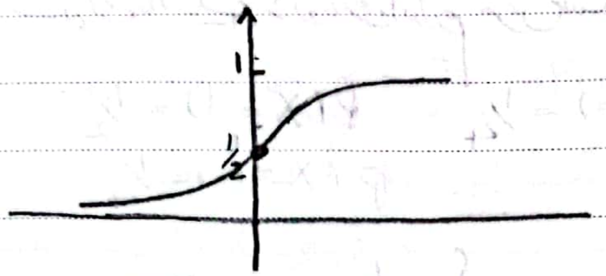
Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال ۲: نشان دهید

$$F_X(x)=\frac{e^{x}}{e^{x}+e^{-x}}=\frac{1}{1+e^{-2x}}$$

یک تابع توزیع است. نمودار این تابع را رسم کنید. m را طوری تعیین کنید $F(m)=\frac{1}{2}$

میانه توزیع



۱) $0\le F(x)\le 1$

۲) غیرنزولی است

۳) از راست پیوسته است.

۴)

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=F(\infty)=1\\ \lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=\frac{1}{\infty}=0\end{cases}$$

$$F(0)=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}\Longrightarrow m=0$$

**تابع احتمال:** فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته با تابع توزیع $F_X(x)$ باشد (تابع توزیع برای هر ثابت x برابر است با احتمال انباشته‌ی محور طول‌ها از $-\infty$ تا x)

از طرفی می‌دانیم X گسسته است هرگاه تکیه‌گاه X، $S_X$ شمارش‌پذیر باشد $X: S\to S_X$

$S_X=\{x_1,x_2,\dots\}$ و $f(x): S_X\to R^+$ $F: R\to[0,1]$

برای متغیر تصادفی گسسته X، احتمال در هر نقطه روی محور طول‌ها تشکیل یک تابع حقیقی با ویژگی‌های زیر را می‌دهد که این تابع را تابع احتمال X (~~یا تابع احتمال X~~) می‌نامند و با $f_X(x)$ یا در حالت گسسته بیشتر بصورت $P(X=x)$ نشان می‌دهند.

1) $f(x_i)=P(X=x_i)>0 \quad x_i\in S_X$

2) $f(x_i)=P(X=x_i)=0 \quad x_i\notin S_X$

3) $\sum f(x_i)=\sum P(X=x_i)=1$

برعکس هر تابع با ویژگیهای بالا، احتمالی یک متغیر تصادفی گسسته است.

نکته: تابع توزیع برحسب تابع احتمالی بصورت زیر است

$$F_X(x)=P(X\le x)=\sum_{t\le x}P(X=t)$$ در حالت گسسته

Subject:

Year.  Month.  Date.  ( )

نکته ۲: تابع چگالی در هر $x_i$ برحسب تابع توزیع

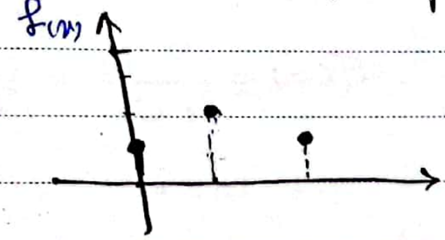
$$P(X=x_i)=F(x_i)-F(x_i^-)$$

$$\underbrace{P(X=x_i)}_{P(x_i^- \leq X \leq x_i)}$$

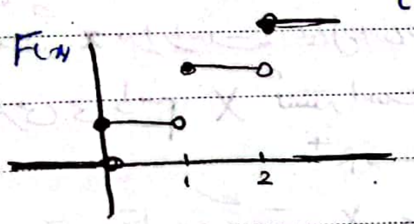
مثال: سکه‌ای نااریب را دوبار می‌اندازیم فرض کنید $X$ شماره شیرها باشد

$$P(X=0)=\frac{1}{4} \qquad P(X=1)=\frac{1}{2}$$
$$P(X=2)=\frac{1}{4}$$

$$f(x)=P(X=x)=\begin{cases} \frac{1}{4} & x=0 \\ \frac{2}{4} & x=1 \\ \frac{1}{4} & x=2 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$




$$F(x)=\sum_{t \leq x} P(X=t)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{1}{4} & 0 \leq x<1 \\ \frac{3}{4} & 1 \leq x<2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$




تابع چگالی متغیر تصادفی پیوسته

یک یا اجتماع عددی

می‌دانیم $X$ پیوسته است هرگاه تکیه‌گاه $X$ چند فاصله باشد

$$X: S \longrightarrow S_X$$

یک یا چند فاصله به طور پیوسته

پس $S_X$ در این حالت شمارش ناپذیر (ناشمارا) است.

از طرفی $F_X(x)$ متغیر تصادفی پیوسته، پیوسته است پس احتمال در هر نقطه برابر صفر است.

$$P(X=x_0)=0 \qquad F_X: \mathbb{R} \to [0,1]$$

$$P(x_0 \leq X \leq x_0)=F(x_0)-F(x_0^-)$$

PAPCO

فرض کنید در نقطه ثابت $x_0$ داشته باشیم $f(x_0) = F'(x_0)$

از تعریف مشتق

$$f(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}$$

پس

$$P(x_0 < X \le x_0+h) = F(x_0+h) - F(x_0) = h\, f(x_0)$$

پس احتمال در یک فاصله بسیار کوچک به یک تابع $f(x_0)$ متناسب است

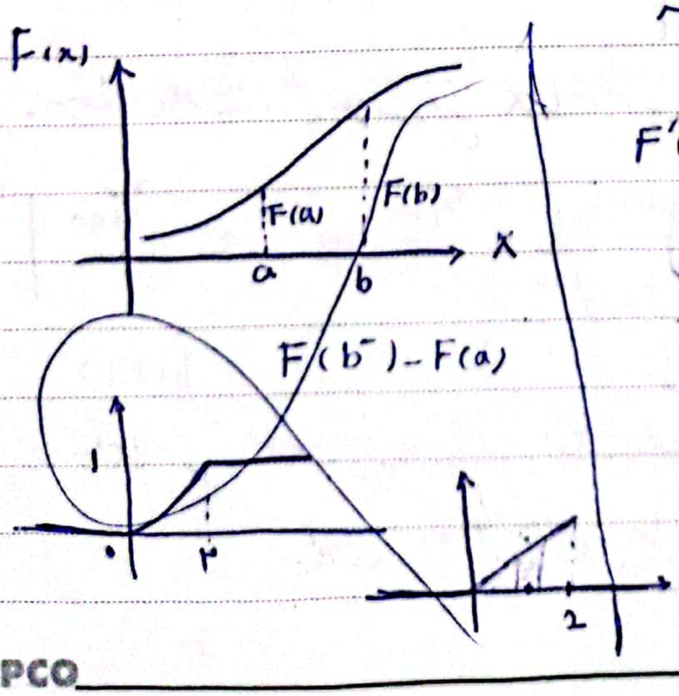
$h \to 0$ ~~$P(X=x_0)=0$~~ ~~$F(x_0)-F(x_0)=0$~~ $\Rightarrow F_X(x) = P(X\le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$

پس اگر $X$ یک متغیر تصادفی پیوسته باشد میزان فشردگی احتمال در هر نقطه روی محور طولها تشکیل یک تابع حقیقی با خواص زیر را می‌دهد که آن را تابع چگالی $X$ می‌نامند

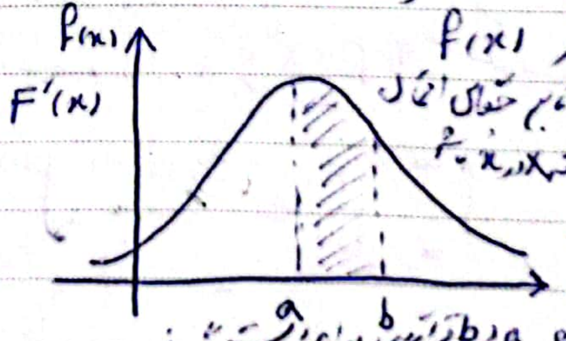
1) $f(x) \geq 0$ 2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{S_x} f(x)\,dx = 1$

$f(x) : S_x \xrightarrow{R} R^+$

پس برخلاف متغیر تصادفی گسسته مقدار $f(x_0)$ برابر احتمال در $x_0$ نمی‌باشد و حتی ممکن است در حالت پیوسته $f(x_0) > 1$ باشد



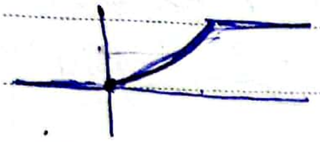

نکته: اگر $f(x)$ نشان‌دهنده تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی پیوسته $X$ باشد آنگاه احتمال اینکه $X$ بین $a$ و $b$ قرار بگیرد برابر است با:



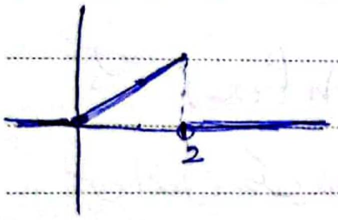

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Subject.
Year. Month. Date. ( )

مثال ۱: مثال داده



$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x^2/4 & 0\le x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}$$



$$\Rightarrow F'(x)=f(x)=\begin{cases}x/2 & 0\le x<2\\ 0 & \text{o.w}\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x/2\,dx=\frac{x^2}{4}\Big|_0^2=1$$

$$p(1/3<X<1/2)=\int_{1/3}^{1/2} f(x)\,dx=x^2/4\Big|_{1/3}^{1/2}=\frac{5}{144}$$

مثال ۲: فرض کنید متغیر تصادفی $X$ طول عمر یک لامپ و چسب باشد با تابع چگالی زیر نشان دهید

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{100}\exp\{-x/100\} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

یک تابع چگالی است. تابع توزیع $X$ را بیابید و $p(X\ge 50)$ را محاسبه کنید

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{100}e^{-x/100}=\int_0^{\infty}\frac{1}{100}e^{-x/100}=-e^{-x/100}\Big|_0^{\infty}=1$$

$$f(x)>0$$

برای پیدا کردن تابع توزیع باید بدین طریق عمل کنید

$$F(x)=p(X\le x)=\int_0^{x}\frac{1}{100}e^{-t/100}\,dt$$

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$= -e^{-x/100}\Big|_{0}^{x} = -e^{-x/100}+1$$

$$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ 1-e^{-x/100} & x\geq 0 \end{cases}$$

$$p(X\geq ۵۰) = 1-p(X<۵۰) = 1-\int_0^{۵۰}\frac{1}{100}e^{-x/100}dx$$

$$= 1-F(۵۰) = 1-1+e^{-1/2} = ۰/۶۰۷$$

مثال ۳ m را طوری تعیین کنید،

$$f(x) = \begin{cases} m/\sqrt{x} & 0<x<1 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

تابع چگالی شود

$$\int_0^1 \frac{m}{\sqrt{x}}dx = 2mx^{1/2}\Big|_0^1 = 2m = 1 \Rightarrow m = 1/2$$

تعریف امید ریاضی (کمیت مورد انتظار یک متغیر تصادفی یا میانگین یک تابع احتمال)

فرض کنید $X$ یک متغیر تصادفی با چگالی $f(x)$ باشد امید ریاضی $X$ عددی به صورت زیر است

$$E(X) = \begin{cases} \sum_x x f(x) = \sum_x x\,p(X=x) & \text{حالت گسسته} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx & \text{حالت پیوسته} \end{cases}$$

که معمولاً به آن میانگین $X$ یا میانگین چگالی $f(x)$ هم می‌نامند.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

در مثال دایره :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & 0<x<2 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_0^2 x \cdot \frac{x}{2}\,dx = \frac{x^3}{6}\Big|_0^2 = \frac{4}{3}$$

یعنی اگر به تعداد زیادی آزمایش تکرار شود بطور متوسط انتظار داریم که میانگین $4/3$ شود

در حالت کلی می توان امید ریاضی از $X$ را نیز تعریف کرد.

$$E(g(X)) = \begin{cases} \sum_x g(x) f(x) = \sum_x g(x) P(X=x) & \text{گسسته} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\,dx & \text{حالت پیوسته} \end{cases}$$

**مثال:** سکه‌ای را سه بار می‌اندازیم فرض کنید $X$ شمارهٔ شیرها باشد امید ریاضی تابع $Y = X^2$ را بدست آورید

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $1/8$ | $3/8$ | $3/8$ | $1/8$ |

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} & x=0 \\ \frac{3}{8} & x=1 \\ \frac{3}{8} & x=2 \\ \frac{1}{8} & x=3 \\ 0 & o.w \end{cases}$$



$P(x_1 \le X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1)$

$$E(X^2) = \sum x^2 f(x) = (0 \times \tfrac{1}{8}) + (1^2 \times \tfrac{3}{8}) + (2^2 \times \tfrac{3}{8}) + (3^2 \times \tfrac{1}{8}) = 3$$

فرض کنید $X$ دارای چگالی زیر باشد امید $Y=\sqrt{X}$ را بیابید

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

$$E(Y) = E(\sqrt{X}) = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{x}\, f(x)\, dx = \int_0^2 \sqrt{x} \cdot \frac{x}{2}\, dx$$

$$= \int_0^2 \frac{x^{3/2}}{2}\, dx = \frac{1}{5} x^{5/2} \Big|_0^2$$

$$= \frac{4}{5}\sqrt{2}$$

۱) خواص امید ریاضی　$x_i$ها متغیر تصادفی $a_i$ها مقدار ثابت

$$X = a_1 X_1 + \dots + a_n X_n$$

$$EX = a_1 E X_1 + \dots + a_n E X_n$$

۲) $X \overset{d}{=} Y$ ، $E(h(X)) = E(h(Y))$

## واریانس و انحراف معیار متغیر تصادفی

با فرض داشتن تابع احتمال یک متغیر تصادفی ممکن است علاقه داشته باشیم شاخصی برای پراکندگی آن بیابیم. این شاخص واریانس متغیر تصادفی می‌گویند.

تعریف: اگر $X$ متغیر تصادفی باشد آنگاه $V(X)$ :

$$V(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - E^2(X)$$

$X^2 + E^2(X) - 2XEX$

خاصیت　$Y = aX + b \Rightarrow V(Y) = a^2 \operatorname{var}(X)$ ، $V(X+a) = V(X)$ ، $V(c)$

مقدار ثابت　مقدار ثابت

## توزیع توأم دو متغیر تصادفی

فرض کنید $X$ و $Y$ دو متغیر تصادفی (گسسته - پیوسته) باشند تابع دو متغیره زیر را تابع توزیع توأم $X$ و $Y$ می‌نامند

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \le x, Y \le y)$$



$x$ ، $y$ دو عدد حقیقی، منظور از $(X \le x, Y \le y)$ اشتراک دو پیشامد $X \le x$ و $Y \le y$

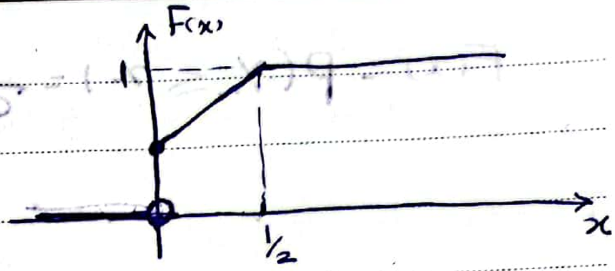
Subject:
Year. Month. Date. ( )

1) $0 \leq F(x) \leq 1$

2) غیرنزولی است

3) $F(0^-) = 0$

$\left\{\begin{array}{l} F(0^+) = \frac{1}{2} \\ F(0) = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$ پس $F(x)$ در صفر ناپیوسته است ولی



$F(0) = F(0^+) = \frac{1}{2}$

یعنی از راست پیوسته است.

متغیر تصادفی X آمیخته‌ای از گسسته و پیوسته است و X متغیر تصادفی آمیخته می‌باشد

$$P(0 < X < \tfrac{1}{2}) = F(\tfrac{1}{2}^-) - \underbrace{F(0)}_{1/2} = 1 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}$$

پس سه نوع تابع توزیع داریم:

1) هرگاه احتمال در نقاط جداگانه توزیع شده باشد، X گسسته و نمودار $F(x)$ پله‌ای است که در این نقاط ناپیوسته و دارای جهش است.

2) هرگاه احتمال در یک یا چند فاصله به طور پیوسته توزیع شده باشد X از نوع پیوسته و نمودار $F(x)$ پیوسته است.

3) هرگاه احتمال در یک یا چند فاصله به طور پیوسته و در یک یا چند نقطه به طور جداگانه توزیع شده باشد X از نوع آمیخته است و $F(x)$ پیوسته با یک یا چند نقطه ناپیوستگی است که در آنها جهش دارد.

PAPCO

چند توزیع مهم آماری :

توزیع های گسسته

توزیع برنولی : Bernouli Distribution

آزمایشی که فضای نمونه آن تنها دو پیشامد شکست و پیروزی تشکیل شده باشد را آزمایش برنولی گوئیم.

$S = \{$ پیروزی , شکست $\}$

مثلا بازی شیر و خط . اکنون متغیر تصادفی X را بصورت زیر در نظر بگیرید

$$X = \begin{cases} 1 & \text{اگر نتیجه آزمایش موفقیت باشه} \\ 0 & \text{شکست باشه} \end{cases} \xrightarrow{\text{به طوری که}} \begin{array}{l} P(X=0) = q = 1-p \\ P(X=1) = p \end{array}$$

در این صورت متغیر تصادفی X را یک متغیر تصادفی برنولی و توزیع آن را توزیع برنولی گوئیم و به صورت

$X \sim ber(1, p)$ یا $ber(p)$

نمایش داده می شود. پس

| $x$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $f_X(x) = P(X=x)$ | $1-p$ | $p$ |

پس می توان تابع احتمال توزیع برنولی را به صورت زیر نوشت :

$$\cancel{f_X(x)}\ P(X=x) = \begin{cases} p^x (1-p)^{1-x} & x = 0, 1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$E(X) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p \qquad E(X^2) = p \qquad var(X) = pq$

مثال : یک تاس را یک مرتبه پرتاب می کنیم و قرار می دهیم

$$X = \begin{cases} 1 & \text{اگر عدد ۴ مشاهده شود} \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases} \qquad X \sim ber(1, \frac{1}{6})$$

$$P(X=x)\ \cancel{f_X(x)} = \left(\frac{1}{6}\right)^x \left(\frac{5}{6}\right)^{1-x}$$

$$E(X) = \frac{1}{6} \qquad var(X) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$$

توزیع دوجمله ای : Binomial Distribution

Subject:

Year. Month. Date. ( )

اگر یک آزمایش برنولی با پارامتر $p$ را $n$ بار مستقلاً انجام دهیم مثلاً در پرتاب سکه فرض کنید شیر آمدن پیروزی باشد یعنی $p(H)=p$ سکه را $n$ بار مستقلاً می اندازیم اکنون فرض کنید متغیر تصادفی $X$ تعداد پیروزیها، (تعداد شیرها) باشد در این حالت $X$ دارای توزیع دوجمله‌ای است.

$X =$ تعداد موفقیتها در $n$ آزمایش مستقل برنولی

$$X \sim Bin(n, p)$$

$$p(X=x) \quad f_X(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \qquad x = 0, 1, 2, \dots n$$

$n$ تا آزمایش : $n-x$ تا شکست و $x$ تا موفقیت

$\binom{n}{x} =$ تعداد حالاتی که در $n$ آزمایش $x$ موفقیت مشاهده شود

$X_1 \sim ber(p) \quad \dots \quad X_n \sim ber(p) \qquad X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ از هم مستقلند

می توان نشان داد:

$$E(X) = np \qquad var(X) = npq$$

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p = np$$

$$V(X) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = npq$$

مثال: یک تاس را ۵ بار پرتاب می کنیم

الف) احتمال اینکه عدد ۴ دقیقاً ۳ بار مشاهده شود را بیابید

ب) احتمال اینکه عدد ۴ حداکثر ۲ بار مشاهده شود را بیابید

$X:$ تعداد ۴ در ۵ بار پرتاب سکه

$X =$ آمدن ۴ $\quad$ ~~$P(X=4)$~~ $\quad X \sim b(5, \frac{1}{6})$ $\quad n=5$

$$p(X=x) \quad \cancel{f_X(x)} = \binom{5}{x}\left(\frac{1}{6}\right)^x \left(\frac{5}{6}\right)^{5-x} \qquad x = 0, 1, 2, \dots 5$$

$$p(X=3) = f_X(3) = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^{5-3} = 0/032$$

$$p(X \le 2) = \sum_{x=0}^{2} f_X(x) = \binom{5}{0} \frac{1}{6}^0 \frac{5}{6}^0 + \dots = 0/9645$$

توزیع فوق هندسی Hyper Geometric Distri:

اگر آزمایشات برنولی که از هم مستقل نباشند دیگر نمی توان از توزیع دوجمله‌ای استفاده کرد

PAPCO

(۲)

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

Subject:

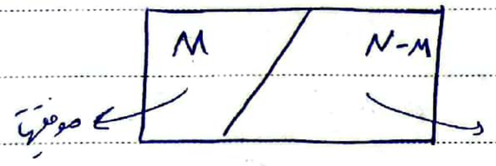
Year. Month. Date. ( )

$$E(X(X-1)) = \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} = \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{y=0}^{\infty} \lambda^y / y! = \lambda^2$$

$$\Rightarrow EX^2 - EX = \lambda^2 \Rightarrow EX^2 = \lambda^2 + \lambda$$

فرض کنید جامعه به دو قسمت جمعیت موفقیت و جمعیت شکست تقسیم شود

اگر فرض n عضو از جامعه N تایی بدون جایگذاری انتخاب کنیم به چنین آزمایشی آزمایش فوق هندسی می‌گوییم



X: تعداد موفقیتها در n آزمایش غیرمستقل

$$f_X(x) = p(X=x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

x عضو از M تا

n-x از N-M تا

در کل n تا از N تا

$$\max(0, n-N+M) \le x \le \min(n, M)$$

$$E(X) = \frac{nM}{N} \qquad Var(X) = \frac{nM}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

مثال ۲.۴.۵ ص ۱۸۶ و نکته ص ۱۸۶

## توزیع پواسون Poisson Distribution

وقتی تعداد موفقیتها در یک فاصله زمانی یا ناحیه مشخص مدنظر باشد از توزیع پواسن استفاده می‌کنیم برای مثال X تعداد ~~تصادفهایی~~ تصادفاتی باشد که در یک ~~ساعت~~ ماه از یک چهارراه به خصوص رخ می‌دهد یا تعداد غلطهای تایپی در هر صفحه کتاب ، ....

~~مثال~~ تابع احتمال پواسن با پارامتر $\lambda$ به صورت زیر می‌باشد

$$p(X=x) \; \cancel{f(x;\lambda)} = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} & x=0,1,2,\ldots \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$X \sim p(\lambda)$$

$$E(X) = \lambda \qquad var(X) = \lambda$$

$$\sum_{x=0} x e^{-\lambda}\lambda^x / x! = \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{y=0}^{\infty} \lambda^y / y! = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

مثال: تعداد تصادفات اتومبیل در یک چهارراه ماهانه به طور متوسط ۴ می‌باشد احتمال اینکه در عرض یک هفته تصادف رخ ندهد چیست؟

$$X \sim p(4) \to f_X(x) = \frac{e^{-0.93}\, 0.93^x}{x!} \qquad p($$

۴ — ۳۰ روز

۰٫۹۳ — ۷

PAPCO

$$p(X=0) = e^{-0.93} = 0.394$$

خصوصیات آزمایش پواسن : ۱) تعداد موفقیتها که در یک فاصله (زمانی یا مکانی) رخ دهد مستقل از فواصل دیگر باشد
۲) احتمال موفقیت در یک فاصله (زمانی یا مکانی) متناسب با طول فاصله باشد . (به موفقیتهای خارج از فاصله بستگی نداشته باشد)
Subject: Year. Month. Date.
۳) احتمال رخ دادن بیش از یک موفقیت در فواصل کوچک (زمانی یا مکانی) قابل اغماض باشد
در توزیع دوجمله‌ای

نکته : اگر $n$ بزرگ و $p$ کوچک باشد به طوریکه $np \to \lambda > 0$
$n \to \infty$ و $p \downarrow$
مقدار ثابت مثل $\lambda$
آن گاه می توان ثابت نشان داد :

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{x}p^x q^{n-x} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

ص ۱۸۸ تست الها
مثالها ۱-۵-۵
۲-۵-۵
۳-۵-۵

توزیع هندسی : Geometric Distribution

حداقل ۱ باشد
فرض کنید $X$ تعداد آزمایشات مستقل برنولی تا رسیدن به یک موفقیت باشد در این صورت

$$X \sim G(p)$$

$x-1$ تا شکست تا رسیدیم به اولین پیروزی

① $P(X=x) = \cancel{f_X(x)} = pq^{x-1} \quad x=1,2,3,\dots$

نشان دهید :

$E(X) = \frac{1}{p} \qquad V(X) = \frac{q}{p^2}$

② $f_X(x) = pq^{x} \quad x=0,1,2,\dots$

$E(X) = \frac{q}{p}$

مثال : فرض کنید احتمال قبولی یک نفر در امتحان رانندگی ۰/۷ باشد احتمال اینکه این شخص بار سوم قبول شود را بیابید .

$$P(X=3) = pq^2 = 0.7 \times 0.3^2 = 0.063$$

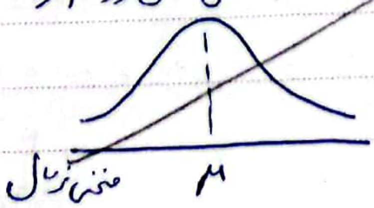
پس دوبار شکست داشته‌ام

توزیع دوجمله‌ای منفی ص ۱۹۰

چند توزیع مهم پیوسته :

یکی از مهم‌ترین و کاربردی‌ترین توزیعهای آماری ، توزیع نرمال می‌باشد این توزیع توسط ابراهام دوموآور (۱۶۶۷-۱۷۵۴) معرفی شده است .

توزیع این توزیع متقارن و به صورت زنگی می‌توان منحنی آن را رسم کرد .




پس منحنی نسبت به خط $X=\mu$ متقارن است .

Subject : Date

**توزیع دوجمله‌ای منفی:** اگر آزمایشات مستقل برنولی (موفقیت ـ شکست) را آنقدر تکرار کنیم تا به تعداد معینی موفقیت دست یابیم چنین آزمایشی را آزمایش دوجمله‌ای منفی گویند.

$X$: تعداد آزمایشات مستقل برنولی تا رسیدن به $r$ موفقیت

$$X \sim NB(r, p)$$

پارامترهای توزیع دوجمله‌ای منفی

$r$: تعداد موفقیتها مورد نظر

$p$: احتمال موفقیت

در $x-1$ آزمایش قبل $r-1$ موفقیت — تعداد شکست

$$P(X=x) = \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r} \qquad r=1 \Rightarrow G(p)$$

یعنی $x$ آزمایش انجام شده که $r$ موفقیت داشته باشیم

تعداد موفقیتها قبل از $r$ امین موفقیت

هندسی

$$X = X_1 + \cdots + X_r$$

$$\begin{cases} E(X) = E(X_1) + \cdots E(X_r) = \dfrac{r}{p} \\ Var(X) = \dfrac{rq}{p^2} \end{cases}$$

**مثال:** در دهه گذشته نسبت پرتابهای موفق در یک پایگاه، ۰/۸۵ بوده است فرض کنید که آزمایشی طرح‌ریزی شده است که مستلزم ۳ پرتاب موفق است احتمال اینکه دقیقاً ۵ پرتاب لازم باشد را بیابید.

$$p = 0.85 \qquad r = 3$$

$$P(X=5) = \binom{5-1}{3-1} (0.85)^3 (0.15)^{5-3} = 0.0829$$

احتمال اینکه پرتابهای لازم تا رسیدن به $r=3$ موفقیت $x=5$ بار باشد

Subject :　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　Date

مثال ۲: معلم زبان آموزشگاهی به خاطر نمی آورد که کدام یک از ۱۲ کلیدی که در دست دارد مربوط به دفتر کار او است اگر کلیدها را به تصادف و با جایگذاری امتحان کند ۱) احتمال اینکه دفتر کارش تنها بعد از سه امتحان باز شود را بیابید. ۲) به طور متوسط باید چند کلید را برای باز شدن در دفتر کارش امتحان کند.

$X \sim G\left(\frac{1}{12}\right)$　　　X تعداد آزمایشات لازم تا رسیدن به اولین موفقیت (باز شدن در)

$P(X=3) = \left(\frac{1}{12}\right)\left(\frac{11}{12}\right)^{3-1} = \frac{121}{1728}$

سه آزمایش تا رسیدن به یک موفقیت

$E(X) = \frac{1}{P} = \frac{1}{1/12} = 12$

مثال ۳: سه نفر با هم در یک محوطه خاص سکه پرتاب می کنند آن یکی که در اقلیت باشد برنده است حالا ... اگر هر سه سکه جور بیاید پرتاب سکه دوباره تکرار می گردد. احتمال اینکه کمتر از ۴ بار پرتاب سکه لازم باشد را بیابید.

X : تعداد پرتاب‌ها لازم تا رسیدن به اولین غیر یک جور　　　$X \sim G(p)$

HTT
THH
HTH
THT
TTH
HHT

$p = 1 - P(\{HHH, TTT\}) = 1 - \frac{2}{8} = \frac{3}{4}$

$P(X<4) = P(X \le 3) = F_X(3) = 1 - q^x = 1 - (1/4)^3 = 0.984$

$$\sum_{x=1}^{x} pq^{x-1} = p\sum_{x=1}^{x} q^{x-1} = p\left[1+q+q^2+\dots q^{x-1}\right] = p\left[\frac{1(1-q^x)}{1-q}\right] = 1-q^x$$

توزیع یکنواخت گسسته: ساده‌ترین توزیع احتمال گسسته است به طوری که در آن متغیر تصادفی گسسته X تمام مقادیرش را با احتمالات یکسان اختیار می کند

MICRO

(۴)

توزیع یکنواخت گسسته: ساده‌ترین توزیع احتمال گسسته است به طوری که در آن متغیر تصادفی گسسته X ، k مقدار متمایز را با احتمال یکسان اختیار می‌کند.

Subject : Date

$$X \sim DU(K) \rightarrow P(X=x)=\frac{1}{K} \qquad x=x_1,\dots,x_K$$

Discrete uniform

$$E(X)=\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K} x_i \qquad Var(X)=\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}(x_i-E(X))^2$$

مثال: یک صفحه هدف‌زنی دایره‌ای شکل به ۱۵ قطاع مساوی تقسیم شده و با شماره‌های ۱ تا ۱۵ مشخص گردیده است. اگر X برابر عددی باشد که تیر در قطاع مربوط به آن اصابت می‌کند توزیع احتمال X را به دست آورده و میانگین و واریانس X را محاسبه کنید. احتمال اینکه تیر در قطاع با شماره کمتر از ۱۰ برخورد کند را بیابید.

$$X \sim DU(15) \qquad P(X=x)=\frac{1}{15} \qquad x=1,\dots,15$$

$$E(X)=\frac{1}{15}\sum_{x=1}^{15} x = \frac{1}{15}\cdot\overbrace{\frac{15(15+1)}{2}}^{x(n+1)/2}=8$$

$$Var(X)=\frac{1}{15}\sum_{x=1}^{15}\underbrace{(x-8)^2}_{x^2+64-16x}=\frac{1}{15}\left[(1-8)^2+\dots+(1-15)^2\right]=\frac{56}{3}$$

$$\sum_{x=1}^{15} x^2+64-16\left(\frac{15(15+1)}{2}\right)$$

توزیع‌های پیوسته:

تاکنون تمام توزیع‌هایی که تعریف شد مربوط به متغیر تصادفی گسسته خاص بودند. اکنون چند توزیع مهم پیوسته مورد بررسی قرار می‌گیرند.

توزیع یکنواخت پیوسته: گوییم متغیر تصادفی X دارای توزیع یکنواخت در فاصله $(a,b)$ است هرگاه:

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & a<x<b\\ 0 & o.w.\end{cases} \qquad X\sim U(a,b)$$

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & a\leq x<b\\ 1 & b\leq x\end{cases}$$

$$E(X)=\int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx=\frac{x^2}{2(b-a)}\Big|_a^b=\frac{a+b}{2}$$

$$var(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{(a-b)^2}{12}$$

مثال: فرض کنید $B$ عددی تصادفی از فاصله $[-3,3]$ باشد احتمال اینکه معادله درجه دوم $x^2+Bx+1=0$ حداقل یک ریشه حقیقی داشته باشد؟

$$F_B(b)=\frac{1}{6} \qquad -3<b<3$$

$$\Delta=b^2-4ac=B^2-4\geqslant 0$$

$$P(B^2-4\geqslant 0)=P(B^2\geqslant 4)=P(|B|\geqslant 2)$$

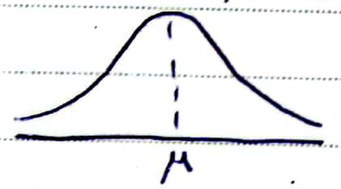
$$=1-P(-2<B<2)=1-\int_{-2}^{2}\frac{1}{6}\,db=1-\frac{4}{6}=\frac{1}{3}$$

$E(X-EX)^2 =$
$V(X)=E(X^2)-E^2(X)$
$V(aX)=a^2V(X)$
Subject: $V(X+a)=V(X)$ Date

## توزیع نرمال :

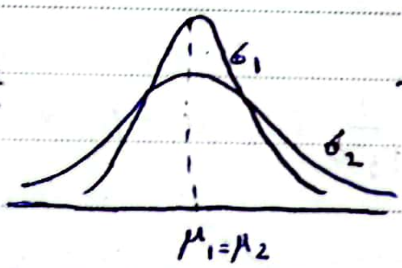
مهم ترین توزیع پیوسته آماری توزیع نرمال است و به دلیل داشتن خواص خوبی که دارا است
(متقارن (مد، میانه، میانگین برابرند) نسبت به حاشیه‌سازی و شرطی سازی خطی سازی بسته است
یعنی اگر $(X_1,X_2)\sim N_2$ آنگاه $X_1\sim N$ و $X_2\sim N$ و $X_2|X_1\sim N$ و ( $X_1\sim N,\ X_2\sim N \Rightarrow X_1+X_2\sim N$

اغلب در مسائل کاربردی فرض بر نرمال بودن متغیر تصادفی مورد بررسی است شکل
این توزیع به صورت زیر است

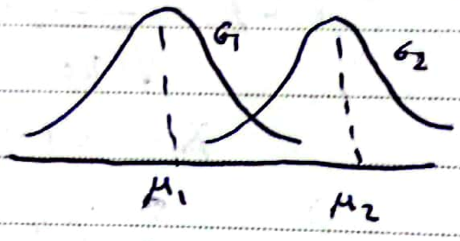



→ پس نسبت به یک قائم از $\mu$ متقارن است
یک نمایی

منحنی توزیع نرمال به دو پارامتر $\mu$ و $\sigma^2$ بستگی دارد



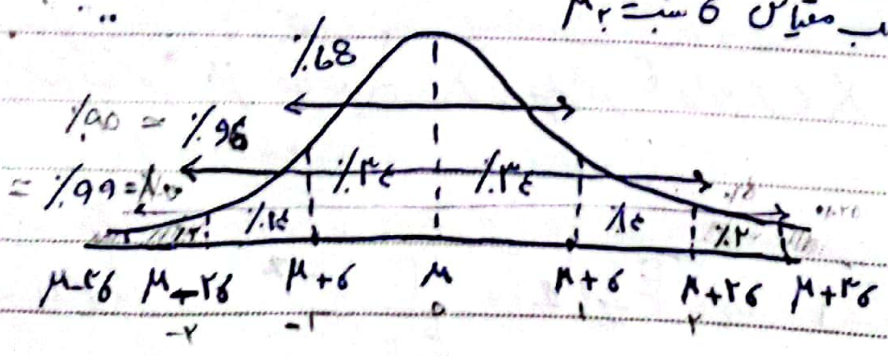

$\sigma_1<\sigma_2$




$\sigma_1=\sigma_2\ ,\ \mu_1<\mu_2$

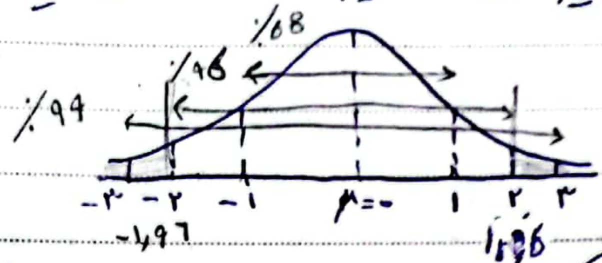
چون $\mu$ (میانگین) مکان نمودار را تغییر می دهند به آن پارامتر مکان، و چون $\sigma^2$ شکل
نمودار را تغییر می دهد به آن پارامتر شکل یا مقیاس نرمی گویند.

نحوه توزیع مساحت زیر منحنی نرمال به صورت زیر است
برحسب مقیاس $\sigma$ نسبت به $\mu$



Subject : Date

اگر $\mu = 0$ و $\sigma = 1$ توزیع نرمال را توزیع نرمال استاندارد گویند.




منحنی نرمال تنها دارای یک نقطه ماکزیمم در $x=\mu$ است و نسبت به خط $x=\mu$ متقارن است.

$$f(\mu - a) = f(\mu + a)$$
$$f(-1) = f(1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1 \qquad \lim_{x \to \pm\infty} f_X(x) = 0$$

تابع چگالی نرمال به صورت

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\} \quad -\infty < x < \infty$$

نمایش می‌دهیم $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

تابع توزیع $X$ $\quad F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \mu \qquad E(X^2) = \int x^2 f_X(x)\,dx = \mu^2 + \sigma^2$$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \sigma^2$$

پس پارامتر مکان $\mu$ میانگین $X$ و پارامتر $\sigma^2$ واریانس $X$ می‌باشد.

تابع چگالی نرمال استاندارد:

$$\mu = 0,\ \sigma^2 = 1 \qquad f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \quad -\infty < z < \infty$$

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt$$

که این تابع به راحتی قابل محاسبه نیست و در مقادیر $\Phi(z)$ به صورت تابعی از $z$ در جداولی در انتهای کتب احتمال معمولاً موجود است.

$$\Phi(0) = P(Z \leq 0) = 0.5$$

$$\Phi(1.96) = P(Z \leq 1.96) = 0.975$$

چون نمودار قرینه نسبت به محور عرض‌ها

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z) = \Phi(-1.96) = 0.025$$

نشان دهید اگر $Z \sim N(0,1)$ ، $E(Z) = 0$ و $Var(Z) = 1$

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\, dz = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

$$E(Z^2) = 1 \qquad Var(Z) = 1$$

قضیه: هرگاه $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ آنگاه با تبدیل $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ می‌توان نشان داد

$$Z \sim N(0,1)$$

چون جداول نرمال استاندارد در اکثر کتب آماری ارائه شده‌اند لذا اگر $\mu = 0$ و $\sigma^2 = 1$ نباشد با تبدیل $Z$ می‌توان هر متغیر نرمالی را به استاندارد تبدیل کرد و از جداول نرمال استاندارد استفاده کرد.

مثال: فرض کنید $X \sim N(2,9)$ مطلوب است $P(X<3)$ ، $P(-5<X<4)$

$$X \sim N(2,9)$$

$$P(X<3) = P\left(Z < \frac{3-2}{3}\right)$$

$$= P(Z < ۰٫۳۳) = ۰٫۶۲۹۳$$



$$P(-5 < X < 4) = P\left(\frac{-5-2}{3} < \overbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}^{Z} < \frac{4-2}{3}\right) = P(-۲٫۳۳ < Z < ۰٫۶۷) = P(Z < ۰٫۶۷)$$

$$- P(Z < -۲٫۳۳) = \Phi(۰٫۶۷) - \Phi(-۲٫...$$

$\Phi(۰٫۶۷) = 0.7486 \qquad 0.0099 = \Phi(-۲٫۳۳)$

Subject :                                                            Date

+ $X_1 \dots X_n$ را یک نمونه تصادفی از متغیر $X$ با تابع چگالی احتمال $f_X(x)$ گوییم هرگاه

۱) $X_1 \dots X_n$ هم توزیع با $X$ باشند

۲) از هم مستقل باشند

**ترکیب خطی چند متغیر نرمال:**

فرض کنید $X_1 \dots X_n$ ، $n$ متغیر مستقل هر کدام دارای توزیع $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ آنگاه می توان نشان داد:

$$\text{if} \quad Y = c_0 + c_1 X_1 + \dots + c_n X_n \Rightarrow Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$$

$c_i$ ها ثابت

$$\mu_Y = E(Y) = c_0 + c_1\mu_1 + \dots c_n\mu_n = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu_i$$

$$\sigma_Y^2 = c_1^2 \sigma_1^2 + \dots + c_n^2 \sigma_n^2 = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \sigma_i^2$$

**نکته**

در حالت خاص فرض کنید $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ و $c_1 = \dots = \frac{1}{n}$ ، $c_0 = 0$

$$\Rightarrow E(Y) = \frac{\mu}{n} + \mu/n + \dots + \mu/n = \mu$$

$$V(Y) = \frac{1}{n^2}\sigma^2 + \dots + \frac{1}{n^2}\sigma^2 = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

که در آن

$$Y = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \Rightarrow Y = \bar{X}$$

پس

$$\text{if } X_1 \dots X_n \text{ مستقل و } X_i \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

**مثال**: درآمد روزانه شخصی از سه محل تامین می گردد از محل اول مقدار ثابت ۱۲۰ تومان، و از محل دوم مقدار تصادفی $X_1 \sim N(100, 64)$ و از محل سوم مقدار تصادفی $X_2 \sim N(80, 36)$ است.

با فرض مستقل بودن $X_1$ و $X_2$ احتمال اینکه درآمد روزانه این شخص بیش از ۳۱۰ تومان شود چقدر است.

درآمد شخص $Y = \underset{c_0}{120} + \underset{c_1=1}{X_1} + \underset{c_2=1}{X_2} \sim N(\underbrace{120+100+80}_{300}, \underbrace{64+36}_{100})$

$$P(Y > 310) = P\left(\frac{Y-\mu}{\sigma} > \frac{310-300}{10}\right) = P(Z > 1)$$

$$= 1 - P(Z \le 1) = 1 - \Phi(1) = 0.1587$$

۷

فرض کنید یک ویژگی خاص از یک جامعه مورد نظر است ($X$) برای $X$ می توان نمونه $x_1, \dots, x_n$ را انتخاب کرد. درحالی که $x_1 \dots x_n$ قابل تغییر ند هر کدام متغیر تصادفی اند

نمونه تصادفی $x_1 \dots x_n$ دو به دو مستقل و هم توزیع با $X$

Subject:

Date

**قضیه حد مرکزی**: فرض کنید $\overbrace{X_1 \dots X_n}$ نمونه ای تصادفی از توزیعی با میانگین $\mu$ و واریانس $\sigma^2$ باشد به طوری که $\sigma^2 < \infty$ اگر $n$ بزرگ باشد (به اندازه کافی) آن گاه $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq z\right) = \Phi(z)$$

یعنی تقریبا $\frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

و به عبارتی می توان گفت $\bar{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ یا می توان گفت $\sum X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$

($n$ به اندازه کافی بزرگ باشد معمولاً $n \geq 30$ مد نظر است).

مثلاً فرض کنید $Y_1, \dots, Y_n$ نمونه تصادفی از توزیع $ber(p)$ باشد پس

$$X = \sum_{i=1}^{n} Y_i \sim Bin(np, npq)$$

اگر $n$ بزرگ باشد طبق قضیه حد مرکزی:

$$\frac{X - np}{\sqrt{npq}} \underset{\text{تقریبا}}{\sim} N(0, 1)$$

**مثال ۱**: درجه حرارت شهری دارای توزیع نرمال با میانگین ۶۸ درجه فارنهایت و انحراف معیار ۴ درجه فارنهایت می باشد. احتمال اینکه درجه حرارت بیش از ۷۰ درجه فارنهایت باشد چقدر است.

$$X \sim N(68, 16) \qquad P(X \geq 70) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \geq \frac{70 - 68}{4}\right) = P(Z \geq 0.5)$$

$$= 1 - P(Z \leq 0.5) = P(Z \leq -0.5)$$

$$= \Phi(-0.5) = 0.3085$$

**مثال ۲**: در شهری ۵۶ درصد از رای دهندگان زن هستند احتمال اینکه از ۵۰ نفر رای دهنده حداقل ۳۰ نفر زن باشند چقدر است.

$X$ تعداد زن ها در میان ۵۰ نفر $X \sim Bin(50, 0.56)$

$$P(X \geq 30) = P\left(\frac{X - np}{\sqrt{npq}} \geq \frac{30 - 28}{\sqrt{12.32}}\right) = P(Z \geq 0.57) = P(Z \leq -0.57)$$

$$= 0.284$$

**تعریف نمونه تصادفی:** $X_1 \dots X_n$ را یک نمونه تصادفی از متغیر تصادفی $X$ با تابع چگالی احتمال $f_X(x)$ گویند هرگاه ۱) $X_1 \dots X_n$ هم توزیع با $X$ باشند ۲) از هم مستقل باشند

**قضیه حد مرکزی:** فرض کنید $X_1 \dots X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیعی با میانگین $\mu$ و واریانس $\sigma^2$ باشد به طوری که $\sigma^2 > 0$ اگر $n$ به اندازه کافی بزرگ باشد آن گاه

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z\right) = \Phi(z) \qquad \bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

یعنی $\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ به عبارت دیگر $\bar{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2/n)$ و یا

$\sum X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$

است ($n \geq 30$)

**چند مثال:**

**مثال:** فرض کنید $Y_1 \dots Y_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع $ber(p)$ برنولی

$$X = \sum_{i=1}^{n} Y_i \sim N(np, npq)$$

$\sim Bin(n,p)$

اگر $n$ بزرگ باشد طبق قضیه حد مرکزی

$$\frac{X - np}{\sqrt{npq}} \sim N(0,1)$$

**مثال ۲:** درجه حرارت شهری دارای توزیع نرمال با میانگین ۶۸ درجه فارنهایت و انحراف معیار ۴ درجه فارنهایت می‌باشد احتمال اینکه درجه حرارت بیش از ۷۰ درجه فارنهایت باشد چقدر است

$X \sim N(68, 16)$ $\qquad P(X \geq 70) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{70-68}{4}\right)$

$= P(Z \geq 0.5) = 1 - P(Z \leq 0.5) = P(Z \leq -0.5)$

$= \Phi(-0.5) = 0.3085$

**مثال ۳:** در شهری ۵۶ درصد از رای دهندگان زن هستند احتمال اینکه از ۵۰ نفر رای دهنده حداقل ۳۰ نفر زن باشند چقدر است

$np = 28$

$X$ تعداد زنان در میان ۵۰ نفر $\qquad X \sim Bin(50, 0.56)$

$$P(X \geq 30) = P\left(\frac{X - np}{\sqrt{npq}} \geq \frac{30-28}{\sqrt{12.32}}\right) = P(Z \geq 0.57)$$

$= P(Z \leq -0.57) = 0.284$

Subject : Date

مثال ۴: یک نمونه تصادفی ۷۲ تایی از تابع چگالی احتمال زیر را در نظر بگیرید. احتمال اینکه حداقل ۳۰ عضو نمونه از ۳ بزرگتر باشند تقریبا چقدر است.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & x>1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$n = 72$ نمونه ← تعداد بزرگتر از ۳ ← موفقیت

تعداد کوچکتر از ۳ ← شکست

$$p = P(X>3) = \int_3^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_3^\infty = \frac{1}{3}$$

اکنون چون $n>30$ است و $Y$ را متغیر تصادفی جدید ← تعداد موفقیت‌ها در $n$ آزمایش در نظر بگیریم

$$Y \sim Bin(72, \tfrac{1}{3}) \approx N(\underbrace{\tfrac{72}{3}}_{24}, \underbrace{\tfrac{72}{3}\times\tfrac{2}{3}}_{16})$$

$$P(Y \geq 30) = P\Big(\frac{Y-np}{\sqrt{npq}} \geq \underbrace{\frac{30-24}{4}}_{1.5}\Big)$$

$$= 1-\Phi(1.5) = 1-0.9332$$

نکته: چون توزیع دوجمله‌ای یک توزیع گسسته و توزیع نرمال یک توزیع پیوسته است بهتر در موقع تقریب زدن دوجمله‌ای به وسیله نرمال در محاسبه احتمالات از تصحیح پیوستگی نیز استفاده کنیم

$X \sim Bin(n,p)$

$$P(X=k) = P(k-0.5 < X < k+0.5)$$

$$P(X \leq k) = P(X < k+\tfrac{1}{2})$$

مثلا در مثال بالا بهتر است $P(Y>29.5)$ محاسبه شود که تفاوت زیادی در نتیجه ندارد.

مثال ۵: فرض کنید $X_1$، $X_2$ و $X_3$ به ترتیب نمرات دروس ریاضی، فیزیک و آمار (۴ واحدی) (۲ واحدی) (۳ واحدی) ~~...~~ معدل یک دانشجو باشد به طوری که

$$X_1 \sim N(12,4) \qquad X_2 \sim N(14,2) \qquad X_3 \sim N(15,2)$$

MICRO

Subject : Date

الف) اگر ۵۰ نفر این ۳ درس را انتخاب کرده باشند معدل چند نفرشان در این ۳ درس از ۱۴/۵ بیشتر است.

$$n = 50 \qquad \underset{\text{معدل یک نفر}}{Y} = \frac{4X_1 + 3X_2 + 3X_3}{10} \sim N(14/5, 1)$$

$$P(Y > 14/5) = P\left(Z > \frac{15/5 - 14/5}{1}\right) = P(Z > 1) = 1 - \underbrace{\Phi(1)}_{0.8413} = 0.1587$$

پس می توان گفت $8 \cong \overset{n}{50} \times \overset{p}{0.1587}$ نفر معدل بیشتر از ۱۴/۵ دارند

توزیع نمایی: یکی دیگر از توزیع های آماری توزیع نمایی است که در آمار، خصوصی تئوری احتمال، تئوری صف، زمان انتظار ... کاربرد دارد.

توزیع متغیر تصادفی X که دارای تابع چگالی به صورت

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda} & x > 0, \lambda > 0 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases} \qquad \theta e^{-\theta x} \quad \theta > 0$$

است را یک متغیر تصادفی نمایی با پارامتر $\lambda$ می نامند و X دارای توزیع نمایی با پارامتر $\theta$ را به صورت $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ نشان می دهند.

$$E(X) = \int_0^\infty \frac{x}{\lambda} e^{-x/\lambda} dx = \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty \underset{u}{x} \underbrace{\frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda} dx}_{dv} \qquad v = -e^{-x/\lambda} \quad x = du$$

$$-x/\lambda\, e^{-x/\lambda}\Big|_0^\infty + \underbrace{\int e^{-x/\lambda} dx}_{\lambda e^{-x/\lambda}\big|_0^\infty} = \lambda$$

$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2 \cdot \left(\frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda}\right) dx = 2\lambda^2$$

$$V(X) = 2\lambda^2 - \lambda^2 = \lambda^2$$

~~معادل توزیع نمایی ... به این صورت است~~

دیدیم توزیع هندسی ... : ادامه آزمایش بر اساس اینکه معدل ضامن رابطه بین توزیع نمایی و پواسن: برای توزیع تعداد اتفاقات (موفقیتها) در یک زمان یا مکان معین می باشند

Subject :                                                    Date ..........

و می‌توان نشان داد که در یک آزمایش پواسن توزیع زمان می‌شد تا وقوع اولین اتفاق

و یا توزیع زمان می‌شد بین دو اتفاق متوالی از توزیع نمایی پیروی می‌کند.

تعداد اتفاقات ← توزیع پواسن    $X \sim Poiss(\mu t)$ → $Y \sim \mathcal{E}(1/\mu)$

زمان بین اتفاقات ← نمایی    $X$ تعداد اتفاقات در فاصله ← $X \leftarrow [0,t]$    اثبات: زمان تا رسیدن به اولین اتفاق

~~فرض~~ یک آزمایش پواسن با پارامتر $\mu$ که $\mu$ در آن

میانگین تعداد اتفاقات در یک واحد زمانی است را در نظر بگیرید و تعریف کنید

$X = [0, t]$ تعداد اتفاقات در فاصله

$Y =$ زمان تا رسیدن به اولین اتفاق

$X \sim Poiss(\mu t)$ خواستیم

$$P(Y>t) = P(X=0) = e^{-\mu t}$$

$$F_Y(t) = 1 - P(Y>t) = P(Y \le t) = 1 - e^{-\mu t}$$

$$\Rightarrow f_Y(t) = \mu e^{-\mu t} = F_Y'(t) \qquad t>0$$

$$\Rightarrow Y \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{\mu}\right)$$

پس در یک آزمایش پواسن با میانگین $\mu$ زمان تا رسیدن به اولین اتفاق دارای توزیع نمایی با پارامتر $\frac{1}{\mu}$ است.

مثال: مدت زمان (برحسب دقیقه) قطارهای مشهد تا مرزداران دارای متغیر تصادفی نمایی با میانگین ۱۰ دقیقه است. مطلوب است

$$P(X>EX)$$

$$X \sim \mathcal{E}(10) \rightarrow E(X) = 10 \qquad P(X>10) = \int_{10}^{\infty} \frac{1}{10} e^{-x/10}\, dx$$

$$= -e^{-x/10} \Big|_{10}^{\infty} = e^{-1} = 0/3679$$

مثال ۲: فرض کنید به طور متوسط ۸ تاکسی در یک ساعت به یک ایستگاه وارد می شوند

الف) احتمال اینکه در نیم ساعت اول حداقل یک تاکسی وارد ایستگاه شود را بیابید

ب) احتمال اینکه زمان بین ورود دو تاکسی بیشتر از دو برابر میانگین زمانی ورود شده را بیابید.

$1 \quad 8$

$0/5 \quad 4$

$$X \sim P(4) \qquad P(X \geq 1) = 1 - P(X<1) = 1 - e^{-4} = 0/9817$$

Taxi 1 — Taxi 2

$$Y \sim \mathcal{E}(1/8) \rightarrow E(Y) = 1/8$$

۸ اتفاق در یک ساعت

$$P(Y > 2E(Y)) = P(Y > 1/4) = \int_{1/4}^{\infty} 8e^{-8y}\,dy$$

در یک آزمایش پواسن با میانگین $\lambda$
زمان تا رسیدن به اولین اتفاق
$\sim \mathcal{E}(1/\lambda)$

$$= -e^{-8y}\Big|_{1/4}^{\infty} = 0/1353$$

مثال ۳: فرض کنید متغیر تصادفی $X$ نشانگر طول عمر نوعی لاستیک برحسب ساعت باشد که دارای توزیع نمایی با میانگین ۵۰۰ ساعت است. اگر بدانیم طول عمر یک لاستیک از این نوع از ۷۰۰ ساعت کمتر بوده است احتمال اینکه طول عمر آن از ۳۰۰ ساعت بیشتر باشد را بیابید

$$X \sim \mathcal{E}(500)$$

$$P(X>300 \mid X<700) = \frac{P(X>300,\ X<700)}{P(X<700)}$$

$$= P(300<X<700) \,/\, P(X<700)$$

$$= \frac{\int_{300}^{700} \frac{1}{500} e^{-x/500}\,dx}{\int_{0}^{700} \frac{1}{500} e^{-x/500}\,dx} = \frac{0/3022}{0/7534} \simeq 0/4$$

**نکته ۱:** به سادگی می توان نشان داد که اگر $X \sim \varepsilon(\lambda)$ آنگاه

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ 1-e^{-x/\lambda} & x \geq 0 \end{cases} \qquad F_X(x) = P(X \leq x) = \int_0^x \frac{1}{\lambda} e^{-t/\lambda} dt$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda}\left[-e^{-t/\lambda}\right]_0^x = 1-e^{-x/\lambda}$$

**نکته ۲:** توزیع نمایی دارای خاصیت عدم حافظه ای به شرح زیر

$$P(X > s+t \mid X>t) = P(X>s) \Rightarrow$$ X دارای خاصیت فقدان حافظه است $\forall\, t,s>0 \in R^+$

$$\Updownarrow$$

$$P(X>s+t) = P(X>s)P(X>t)$$

**نکته ۳:** در یک فرایند پواسن با پارامتر $\lambda$ اگر $X$ نمایانگر زمان لازم بین رخداد دو اتفاق باشد آنگاه

$$X \sim P(\lambda) \rightarrow Y \sim \varepsilon(1/\lambda) \Rightarrow f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda y}$$

**مثال:** مدت زمانی که لازم است تا یک ماشین را تعمیر نیم (برحسب ساعت) دارای توزیع نمایی با پارامتر $\lambda = \frac{1}{۳}$ است الف) احتمال اینکه مدت تعمیرش از ۳ ساعت طول کشد را بدست آورید ب) احتمال اینکه مدت زمان تعمیر حداقل ۱۲ ساعت طول کشد به شرط آن که بدانیم بیش از ۹ ساعت از زمان تعمیر گذشته باشد را بدست آورید.

$$X \sim \varepsilon(1/۳) \rightarrow f_X(x) = ۳e^{-۳x}$$

$$P(X>۳) = 1-P(X\leq ۳) = e^{-1} \simeq ۰/۳۶۷۹$$

$$P(X>۱۲ \mid X>۹) = P(X>۳) = ۰/۳۶۷۹$$

Subject :                                                                 Date

**توزیع گاما:** فرض کنید $\alpha$ و $\lambda$ مقادیر حقیقی مثبت اما نامعلوم باشند اگر متغیر تصادفی $X$ دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f_X(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \qquad x>0$$

که در آن $\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y} dy$ گوییم $X$ دارای توزیع گاما با پارامتر $\alpha$ و $\lambda$ است

$$X \sim \Gamma(\alpha, \lambda) \quad \text{یا} \quad G(\alpha, \lambda)$$

بعضی خواص $\Gamma(\alpha)$ :

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) \qquad \Gamma(n+1) = n! \qquad \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

**نکته ۱:** در توزیع گاما اگر $\alpha=1$ باشد

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda} \qquad \rightarrow X \sim \mathcal{E}(\tfrac{1}{\lambda})$$

اگر $\alpha = \frac{n}{2}$ و $\lambda = \frac{1}{2}$ :

$$f_X(x) = \frac{(\frac{1}{2})^{n/2}}{\Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-x/2} \Rightarrow \chi^2_{n} = \Gamma(n/2, 1/2)$$

**نکته ۲:** اگر $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ می دانیم $Z_i = \frac{X_i-\mu}{\sigma}$ دارای $N(0,1)$ آنگاه

$Z_i^2 \sim \chi^2_1$ و $\sum_{i=1}^n Z_i^2 = Z_1^2 + \dots + Z_n^2 \sim \chi^2_n$ و همچنین

$$\text{if} \begin{cases} Z \sim N(0,1) \\ W \sim \chi^2_n \end{cases} \Rightarrow T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{W}{n}}} \sim t_n$$

دارای توزیع $t$ استودنت با $n$ درجه آزادی است. توزیعی متقارن اما با دمهای بلندتری از نرمال .

Subject : Date

**تمرین:** اگر $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ و $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ تابع کنند اگر $X$ و $Y$ مستقل باشند
حذف

$$X+Y\sim N(\mu_1+\mu_2\ ,\ \sigma_1^2+\sigma_2^2)$$

**تمرین:** اگر $X$ دارای توزیع نمایی با پارامتر $\theta$ باشد تابع چگالی $Y=\ln X$ را محاسبه کنید

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0\\ 0 & o.w\end{cases}$$

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\ln X\le y)=P(X\le e^y)$$

$$=\int_0^{e^y}\frac{1}{\theta}e^{-t/\theta}dt=(-e^{-t/\theta})_0^{e^y}=1-e^{-\frac{e^y}{\theta}}$$

$$\Rightarrow f_Y(y)=\frac{1}{\theta}e^{y}e^{-e^y/\theta}$$

**تمرین:** اگر چگالی توأم $x$ و $y$ به صورت زیر باشد

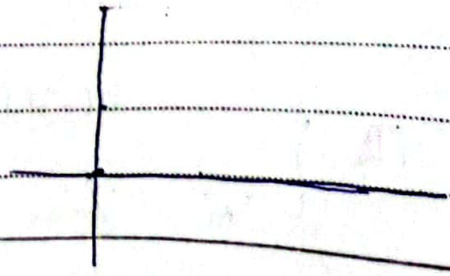
$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-(x+y)} & x>0\quad y>0\\ 0 & o.w\end{cases}$$

تابع چگالی احتمال $Z=\frac{X+Y}{۲}$ را بیابید

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P\left(\frac{X+Y}{2}\le z\right)=P(X+Y\le ۲z)$$

$$=P(X\le ۲z-y)$$

$$=\int_0^{2z}\int_0^{۲z-y}e^{-(x+y)}\,dx\,dy$$



مثال: یک خریدار قطعات الکتریکی آنها را در بسته‌های ۱۲ تایی خریداری می‌کند. وی از هر بسته ۳ قطعه را به تصادف انتخاب و هنگامی که همه قطعات انتخابی سالم باشند بسته را می‌پذیرد. اگر ۲۵ درصد از بسته‌ها دارای ۳ قطعه معیوب و ۷۵ درصد فقط یک قطعه معیوب داشته باشند خریدار چه درصدی از بسته‌ها را می‌پذیرد.

بسته‌ها معیوب دارای قطعه‌های ۳ معیوب

$$\frac{\binom{3}{0}\binom{9}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{21}{55} \qquad \frac{\binom{1}{0}\binom{11}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{3}{4}$$

$$/25 \times \frac{21}{55} + 0/75 \times \frac{3}{4} \simeq 0/66$$

مثال: یک مهندس اکتشاف نفت عنوان کرده است که چاهی که به منظور اکتشاف نفت در یک منطقه از جنوب ایران حفر می‌شود با احتمال ۳۰٪ به نفت می‌رسد. با فرض این که رسیدن به نفت در حفر چاه‌ها مستقل از هم باشند احتمال اینکه سومین چاه نفت در دهمین حفر چاه رخ دهد چقدر است.

$Y$: تعداد چاه‌های حفر شده تا رسیدن به ۳ موفقیت

$$Y \sim NB(r=3, 0/3)$$

$$P(Y=10) = \binom{9}{2} p^3 q^{9-3}$$

$$\frac{9!}{2!\,7!}\, 0/3^3\, 0/7^7 \simeq 0/08$$

مثال: اگر بانکی به طور متوسط در روز ۶ چک برگشتی دریافت کند احتمال اینکه در یک روز بس الف) ۴ چک برگشتی ب) بیش از یک چک برگشتی ج) ۱۰ چک برگشتی در دو روز متوالی دریافت کند چقدر است.

$$X \sim Pois(6) \qquad P(X=4) = \frac{e^{-6}6^4}{4!} = 0/135$$

$$P(X>1) = 1 - P(X \le 1) = 1 - \frac{e^{-6}6^0}{0!} - \frac{e^{-6}6^1}{1!} = 0/983$$

$$Y \sim pois(12) \rightarrow P(Y=10) = \frac{e^{-12}12^{10}}{10!} = 0/105$$

Subject :

Date ........

مثال: کلاس درس آمار و احتمال باید در ساعت ۴:۳۰ شروع شود اگر $X$ زمان شروع کلاس درس دارای توزیع یکنواخت در فاصله ۴:۲۵ تا ۴:۳۵ باشد احتمال پیشامدهای زیر را بدست آورید

$$X \sim U(-5, 5)$$

۴:۳۵ ۴:۳۰ ۴:۲۵

$-5$ $5$

الف) کلاس درس حداقل ۲ دقیقه زودتر شروع شود

ب) کلاس درس حداقل ۴ دقیقه دیرتر شروع شود

$$P(X \leq -2) = \frac{-2-(-5)}{5-(-5)} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{x-a}{b-a} \qquad -5 \leq x \leq +5$$

$$P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - F(4) = 1 - \frac{4-(-5)}{5-(-5)} = \frac{1}{10}$$

تمرین: اگر $X \sim U(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ مقادیر $P(X > 0)$ و $P(|X| > \frac{1}{8})$ را بیابید

مثال: مصرف روزانه آب یک شهر تقریباً دارای توزیع گاما با پارامترهای $\alpha = 2$ و $\lambda = \frac{1}{3}$

الف - اگر ظرفیت کل منابع آب ۹ میلیون لیتر باشد احتمال اینکه در یک روز شهر دچار کمبود آب شود چقدر است

$$f_X(x) = \frac{(1/3)^2 x e^{-x/3}}{\Gamma(2)} = \frac{1}{9} x e^{-x/3} \quad x > 0$$

$$P(X > 9) = \int_9^\infty \frac{1}{9} x e^{-x/3} dx = 4e^{-3}$$

مثال: اگر $X \sim N(100, 25)$ مطلوبست احتمال $P(|X - 100| < 2)$

$$P\left(\left|\frac{X-100}{5}\right| < \frac{2}{5}\right) = P(|Z| < 0.4)$$

$$= P(-0.4 < Z < 0.4) = \Phi(0.4) - \Phi(-0.4)$$

مثال: شعاع کره‌ای یک عدد تصادفی بین ۲ و ۴ است میانگین حجم آن را بیابید. احتمال اینکه حجم آن حداکثر $۳۶\pi$ شود را بیابید.

$X \sim (۲,۴) \quad \frac{1}{b-a}$ حجم کره $V = \frac{۴}{۳}\pi X^۳$

$$E(V) = E(\frac{۴}{۳}\pi X^۳) = \frac{۴}{۳}\pi \int_۲^۴ \frac{x^۳}{۲} dx = ۴۰\pi$$

$$P(V < ۳۶\pi) = P(\frac{۴}{۳}\pi X^3 < ۳۶\pi) = P(X^۳ < ۲۷)$$

$$= P(X < ۳) = \int_۲^۳ \frac{dx}{۲} = \frac{1}{۲}$$

مثال: اگر $X$ دارای توزیع یکنواخت در فاصله $(-1,۳)$ باشد و $Y$ دارای توزیع نمایی با پارامتر $\theta$ باشد $\theta$ را طوری بیابید $V(X) = V(Y)$

$$X \sim U(-1,۳) \longrightarrow V(X) = \frac{(a-b)^۲}{۱۲} = \frac{(-1-۳)^۲}{۱۲} = \frac{۱۶}{۱۲}$$

$$Y \sim \mathcal{E}(\theta) \Rightarrow V(Y) = \theta^2$$

مثال: اگر $X$ دارای توزیع یکنواخت در فاصله $(0,1)$ باشد $E(-\ln X)$ را بیابید

$$E(-\ln X) = \int_0^1 -\ln x \, dx = -[x\ln x - x]_0^1 = 1$$

$-\ln X = Y \qquad G_Y(y) = P(Y \leq y) = P(-\ln X \leq y)$

$$= P(\ln \frac{1}{X} \leq y) = P(\frac{1}{X} \leq e^y)$$

$F_X(x) = \frac{x-a}{b-a} \quad a \leq x < b \qquad = P(X > e^{-y}) = 1 - P(X < e^{-y})$

$$G_Y(y) = 1 - \frac{e^{-y} - a}{b-a} \Rightarrow g_Y(y) = \frac{e^{-y}(b-a)}{(b-a)^2} = \frac{e^{-y}}{\underbrace{b-a}_{1}} = e^{-y}$$

$E(Y) = 1 \qquad \sim \mathcal{E}(1)$

Subject : Date :

مثال: فرض کنید ۴۰٪ از ماهی‌های یک دریاچه از نوع مخصوصی باشد اگر هر بار یک ماهی گرفته نوع آن را مشخص و دوباره به دریاچه برگردانیم احتمال اینکه در دهمین بار پنجمین ماهی از نوع فوق مشاهده شود را بیابید.

$P = \%40 = 0/4$

X: تعداد آزمایشات لازم تا رسیدن به ۲ موفقیت

$X \sim NB(5, 0/4)$ $\quad r=5$

$$P(X=10) = \binom{\overset{9}{x-1}}{\underset{4}{r-1}} 0/4^5 \; 0/6^5$$

مثال: فرض کنید موتورهای هواپیما در حال پرواز با احتمال $1-p$ مستقل از یکدیگر خراب شود اگر در یک پرواز موفقیت‌آمیز لازم باشد اکثریت موتورهای هواپیما سالم باشند برای چه مقداری از p، یک هواپیمای ۵ موتوره مطمئن‌تر از یک هواپیمای سه موتوره است

برای اینکه هواپیمای ۵ موتوره پرواز موفقیت‌آمیزی داشته باشد باید ۳ موتورش درست کار کنند.

X: تعداد موفقیت‌ها $\quad X \sim Bin(5, p) \quad P(X=3) = \binom{5}{3} p^3 (1-p)^2$

$$P(X=4) = \binom{5}{4} p^4 (1-p) \qquad P(X=5) = p^5$$

کارکرد ۵ موتوره $\quad P(X \geq 3) = \binom{5}{3} p^3 (1-p)^2 + \binom{5}{4} p^4 (1-p) + p^5 \quad (1)$

$p^2 (10p(1-p)^2 + 5p^2(1-p) + p^3)$

هواپیمای سه موتوره باید ۲ موتوران درست کار کنند

$$P(X=2) = \binom{3}{2} p^2 (1-p) \qquad P(X=3) = p^3$$

کارکرد هواپیمای سه موتوره $\quad P(X \geq 2) = \binom{3}{2} p^2 (1-p) + p^3 \quad (2)$

MICRO

$(1) > (2) \Rightarrow$

$(1) - (2) > 0 \Rightarrow p > 1/2$

مثال: ~~احتمال اینکه بیماری در اثر عمل جراحی ⋯ قلب خوب شود ۹۰ درصد است~~

اگر $X$ دارای تابع احتمالی به صورت زیر باشد

| $x$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $p$ | $1-2p$ | $p$ |

به ازای چه مقادیر از $p$ واریانس $X$ ماکسیمم می‌شود

$$E(X) = (1-2p) + 2p = 1 \qquad V(X) = (1-2p) + 4p - 1$$

$$E(X^2) = (1-2p) + 4p = 1+2p \qquad = 4p - 2p = 2p$$


$$p = 1/2 \rightarrow V(X) = 1$$

$$0 < 1-2p < 1 \Rightarrow p < 1/2$$

$$1-2p < 1 \qquad p > 0$$

اگر متغیر تصادفی $X$ دارای میانگین $1/3$ و چگالی زیر باشد مقدار $a$ و $b$ را تعیین کنید و واریانس $X$ را محاسبه کنید

$$f_X(x) = \begin{cases} ax+b & 0<x<1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$-2/3 \; -1$

$$E(X) = \int_0^1 (ax^2+bx)\,dx = a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^1 (ax+b)\,dx = a\frac{x^2}{2} + bx\Big|_0^1 = \frac{a}{2} + b = 1 \Rightarrow a + 2b = 2$$

$$a = 2(1-b)$$

$$\frac{2(1-b)}{3} + \frac{b}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{4(1-b)+3b}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{4-b}{6} = \frac{1}{3} \rightarrow b = 2 \qquad a = -2$$

$$-2x+2$$

$$E(X^2) = a\frac{x^4}{4} + b\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = a/4 + b/3 = -1/2 + \frac{2}{3}$$

$$= \frac{-3+4}{6} = 1/6$$

$$V(X) = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{3-2}{18} = \frac{1}{18}$$

Subject :                                                                 Date

اگر X یک متغیر تصادفی با تابع احتمال زیر باشد

| $x$ | $-3$ | $6$ | $9$ |
| --- | --- | --- | --- |
| $P(X=x)$ | $1/6$ | $1/2$ | $1/3$ |

مطلوبست $E(X)$ ، $E(X^2)$ و $E((2X+1)^2)$

$E(X) = -3/6 + 6/2 + 9/3 =$ $\qquad E(4X^2+2X+1)$

$E(X^2) = \underbrace{9/6} + \underbrace{36/2}_{۱۸} + \underbrace{81/3}_{۲۷} =$ $\qquad = 4EX^2 + 2EX + 1$

فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f_X(x) = \begin{cases} x^2 & 0 < x \le 1 \\ c & 1 < x < a \\ 0 & o.w \end{cases} \qquad E(X) = ۵/۴$$

مقدار a و c را تعیین و $var(2X+3)$ را بیابید

$$E(X) = \int_0^1 x^3 dx + \int_1^a cx\, dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 + c\frac{x^۲}{۲}\Big|_1^a$$

$$= 1/4 + \frac{ca^۲}{۲} - \frac{c}{۲} = ۵/۴$$

$$\Rightarrow ca^2 - c = 2 \Rightarrow c(a^2-1) = 2$$

$$\underbrace{c(a-1)}_{2/3}(a+1) = 2$$

$$\int_0^1 x^۲ dx + \int_1^a c\, dx = \frac{x^۳}{۳}\Big|_0^1 + cx\Big|_1^a = \frac{1}{۳} + ac - c = 1$$

$$\Rightarrow c(a-1) = \frac{2}{3}$$

$$a+1 = 3 \rightarrow a = 2 \qquad c = 2/3$$

$$var(2X+3) = 4\,var(X) = 4(E(X^2) - E^2X)$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

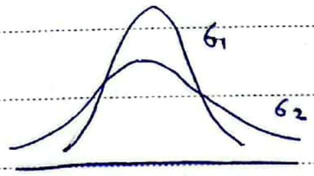
یک متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال با پارامتر میانگین $\mu$ و واریانس $\sigma^2$ است اگر چگالی آن به صورت زیر باشد:

$$f(x;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \qquad -\infty<x<\infty$$

$\mu \in R$

$\sigma > 0$

$$X \sim N(\mu,\sigma^2)$$




$\sigma_1<\sigma_2$ $\qquad E(X)=\mu \qquad Var(X)=\sigma^2$

نکته ۱: if $X_1 \cdots X_n$ مستقل و $X_i \sim N(\mu_i,\sigma_i^2) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_i, \sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2\right)$

نکته ۲: یک متغیر تصادفی نرمال به صورت $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ را می‌توان استاندارد کرد

$$Z=\frac{X-\mu}{\sigma} \longrightarrow Z\sim N(0,1)$$

با استاندارد کردن متغیر تصادفی X مشاهده می‌شود که Z دیگر به واحد اندازه‌گیری بستگی ندارد.

$$E(Z)=E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)=0 \qquad Var(Z)=1$$

در این صورت تابع چگالی Z:

$$\phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}} \qquad -\infty<z<\infty$$

می‌باشد.

صفحه بعد

بعد از نکته شش

~~توزیع نمایی Exponential Distribution~~ | توزیع یکنواخت پیوسته

Continuous uniform Distribution ~~متغیر تصادفی X دارای توزیع~~

متغیر تصادفی X دارای توزیع یکنواخت در فاصله $(a,b)$ است هرگاه چگالی آن به صورت زیر باشد

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & a<x<b\\ 0 & o.w\end{cases} \qquad X\sim U(a,b)$$



$$E(X)=\frac{a+b}{2} \qquad Var(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

Subject:
Year: Month: Date: ( )

و تابع توزیع متغیر تصادفی یکنواخت به صورت زیر بدست می آید

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x<a \\ \frac{x-a}{b-a} & a\le x<b \\ 1 & b\le x \end{cases}$$

نکته: در توزیع دوجمله‌ای اگر n بزرگ باشد می توان نشان داد

$$Z = \frac{X-np}{\sqrt{npq}} \sim N(0,1)$$

$$X \sim Bin(n,p) \xRightarrow[\text{if } n>30]{} Z = \frac{X-np}{\sqrt{npq}} \sim N(0,1)$$

قضیه حد مرکزی:

مثال: درجه حرارت در شهری دارای توزیع نرمال با میانگین ۶۸ درجه فارنهایت و انحراف معیار ۴ درجه فارنهایت می باشد احتمال اینکه درجه حرارت بیش از ۷۰ درجه فارنهایت باشد چقدر است.

$$X \sim N(۶۸, ۱۶) \qquad P(X \geq ۷۰) = ?$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{X-\mu}{6} \geq \frac{۷۰-۶۸}{۴}\right) = P(Z \geq ۰/۵)$$

$$= P(Z \leq -۰/۵) = ۰/۳۰۸۵$$

مثال: در شهری ۵۶ درصد از رای دهندگان زن هستند احتمال اینکه از ۵۰ نفر رای دهند حداقل ۳۰ نفر زن باشند چقدر است.

$$X \text{ تعداد زنان در میان ۵۰ نفر رای دهند } \sim Bin(۵۰, \overset{n>۳۰}{۰/۵۶})$$

$$E(X) = np = ۲۸ \qquad Var(X) = npq = ۱۲/۳۲$$

$$P(X \geq ۳۰) = P\left(\frac{X-np}{\sqrt{npq}} \geq \frac{۳۰-۲۸}{\sqrt{۱۲/۳۲}}\right) = P(Z \geq ۰/۵۷)$$

$$= ۰/۲۸ = 1 - \underbrace{P(Z \leq ۰/۵۷)}_{۰/۷۱۵۷}$$