فصل چهارم

آزمون فرض‌های آماری

Scanned with CamScanner

۱.۴ مقدمه

در بخش ۱.۳ بیان شد که استنباط آماری پارامتری دارای دو شاخهٔ مهم برآورد پارامتر نامعلوم جامعه و آزمون فرض‌های آماری است. در فصل سوم به مبحث برآورد نقطه‌ای و فاصله‌ای پارامتر نامعلوم جامعه پرداخته و روش به‌دست آوردن و معیارهای خوب بودن یک برآوردگر را بررسی کردیم. همچنین برای پارامترهای مختلف جامعه برآوردهای نقطه‌ای و فاصله‌ای را به‌دست آوردیم.

در برآورد پارامتر نامعلوم جامعه می‌خواهیم از روی نمونهٔ جمع‌آوری شده از جامعه یک مقدار یا یک فاصله را به‌عنوان برآورد یا تخمینی از پارامتر نامعلوم ارائه دهیم. اما در مسائل روزمره و پژوهش‌ها با تصمیم‌گیری دربارهٔ قبول یا رد یک پیشنهاد یا یک ادعا مواجه هستیم. برای مثال در خرید یک کالای جدید با این مسئله روبرو می‌شویم که آیا این کالا دارای دوام بیشتری نسبت به کالاهای مشابه در بازار است؟ یا در یک پژوهش دربارهٔ یک روش تدریس جدید با این سوال روبرو هستیم که آیا این روش تدریس کاراتر از روش تدریس قبلی است؟ در هر یک از این مثال‌ها یک متغیر تصادفی X (برای مثال طول عمر کالا یا میزان درک مطلب از روش تدریس) داریم که توزیع آن نامشخص و یا دارای توزیعی است که به پارامتر نامعلوم θ وابسته است. در برآوردیابی هدف تعیین یک مقدار یا فاصله برای θ از روی نمونهٔ جمع‌آوری شده از جامعه (X) است. اما در مثال‌های بالا هدف تصمیم‌گیری از روی داده‌ها در مورد پذیرش یا رد پیشنهاد یا ادعای بیان شده و پاسخ به پرسش مطرح شده هستیم. این ادعای مطرح شده (بهتر بودن کالای جدید یا کاراتر بودن روش تدریس جدید) یک فرض آماری و این تصمیم‌گیری و پاسخ به پرسش مطرح شده، براساس آزمون فرض آماری از روی نمونهٔ جمع‌آوری شده از جامعه انجام می‌شود. در بیشتر علوم اجتماعی، رفتاری، پزشکی و ...، مسئلهٔ آزمون فرض‌های آماری بیشتر مد نظر است تا برآورد پارامترهای نامعلوم جامعه.

در این فصل به مسئلهٔ مهم آزمون فرض‌های آماری خواهیم پرداخت و ضمن معرفی مفاهیم اولیهٔ آزمون فرض‌های آماری، روشی برای انجام آزمون این فرض‌ها ارائه داده و آزمون فرض روی پارامترهای مختلف جامعه را بررسی می‌کنیم.

Scanned with CamScanner

۲.۴ مفاهیم اولیهٔ آزمون فرض‌های آماری

با توجه به مطالب بیان شده در بخش ۱.۴، می‌توان تعریف زیر را برای یک فرض آماری ارائه داد.

تعریف ۱.۴ یک فرض اماری ادعایی دربارهٔ یک یا چند جامعهٔ در حال بررسی یا پارامتر(های) این جامعه‌ها است که ممکن است درست یا نادرست باشد. به‌عبارت دیگر یک فرض آماری ادعا یا گزاره‌ای در مورد توزیع یک جامعه یا توزیع یک متغیر تصادفی است.

برای اینکه درک بهتری از فرض‌های آماری داشته باشیم، به ذکر یک مثال می‌پردازیم.

مثال ۱.۴ بررسی‌های انجام شده روی داروی سرماخوردگی نوع A نشان می‌دهد که این دارو روی ۷۰ درصد بیماران مؤثر است و سبب درمان سرماخوردگی می‌شود. یک داروساز داروی جدیدی را تولید و عرضه کرده و ادعا می‌کند که داروی جدید از داروی A در درمان سرماخوردگی مؤثرتر است. این ادعای داروساز یک فرض آماری است. برای بررسی ادعای این داروساز بایستی این دارو را به افرادی در جامعه که سرماخوردگی دارند، تجویز کرده و تأثیر آن را بررسی کنیم. اما تجویز این دارو برای تمام افراد سرماخوردهٔ جامعه معقولانه نیست زیرا ممکن است سرماخوردگی را تشدید یا اثرات جانبی دیگر داشته باشد. ناچار بایستی دارو را تنها به تعدادی از افراد بیمار جامعه تجویز کنیم که این تعداد همان نمونهٔ ما را تشکیل می‌دهند. بنابراین فرض کنید که داروی جدید را به ۳۰ بیمار تجویز کنیم و متغیر تصادفی X را برابر تعداد بیمارانی در بین ۳۰ بیمار در نظر بگیریم که سرماخوردگی آن‌ها را داروی جدید درمان کرده باشد. دراین‌صورت $X \sim B(۳۰, p)$ و در آن p درصد موثر بودن داروی جدید در درمان سرماخوردگی در جامعهٔ بیماران است که مقداری نامعلوم است. مؤثر بودن داروی جدید نسبت به داروی A به معنای $p > ۰/۷۰$ است. بنابراین در رابطه با این سوال که « آیا میزان موثر بودن داروی جدید در درمان سرماخوردگی بیشتر از داروی A است؟ » با دو حالت (دو فرض آماری) زیر مواجه هستیم.

۱) داروی جدید مؤثرتر از داروی A است: $p > ۰/۷۰$

۲) داروی جدید مؤثرتر از داروی A نیست: $p \leq ۰/۷۰$

حال بایستی به‌وسیله‌ی اطلاعاتی که از نمونه به‌دست می‌آید دربارهٔ صحیح بودن یا نبودن این فرض‌های آماری نتیجه‌گیری کنیم.

Scanned with CamScanner

یک فرضی آماری را اصطلاحاً فرضیه یا فرضیه آماری گویند. در این کتاب از اصطلاح فرض موقعی که با یک فرض آماری مواجه هستیم، استفاده می‌کنیم. همان گونه که در مثال ۱.۴ مشاهده شد، در یک مسئلهٔ آزمون فرض‌های آماری با دو فرض روبرو هستیم. یکی از این فرض‌ها را فرض صفر یا فرض خنثی گویند و با نماد H_0 نمایش می‌دهند و فرض دیگر را فرض مقابل گویند و با نماد H_1 نمایش می‌دهند. اغلب در یک مسئلهٔ آزمون فرض‌های آماری، هرگاه بخواهیم یک ادعا را از طریق اطلاعات حاصل از نمونهٔ جمع‌آوری شده از جامعه تأیید کنیم، خلاف آن ادعا را در فرض H_0 و خود ادعا را در فرض مقابل H_1 قرار می‌دهیم (این موضوع همواره صحت ندارد و در بحث‌های بعد آن را بیشتر توضیح خواهیم داد). بنابراین در مثال ۱.۴ با مسئلهٔ آزمون فرض‌های زیر مواجه هستیم

$$\begin{cases} H_0 : p \leq ۰/۷۰ \\ H_1 : p > ۰/۷۰ \end{cases}$$

بنابراین داروساز سعی در ردکردن فرض H_0 و اثبات ادعای خود (پذیرش فرض H_1) دارد.

آزمون فرض‌های آماری در یک مسئلهٔ آزمون فرض‌های آماری اگر اطلاعات به‌دست آمده از نمونه با فرض H_0 ناسازگار باشد در این‌صورت فرض H_0 را رد می‌کنیم و در مقابل فرض H_1 را می‌پذیریم و اگر اطلاعات به‌دست آمده از نمونه با فرض H_0 سازگار باشد دراین‌صورت گوییم که اطلاعات به‌دست آمده از نمونه دلیلی بر رد فرض H_0 ندارد و یا در حقیقت گوییم فرض H_0 را می‌پذیریم. برای مثال در مثال ۱.۴ اگر درصد افراد بهبود یافته در نمونه از ۷۰ درصد بیشتر باشد فرض H_0 را رد می‌کنیم و ادعای داروساز را می‌پذیریم و در مقابل اگر درصد افراد بهبود یافته در نمونه کمتر از ۷۰ درصد باشد آنگاه دلیلی بر رد فرض H_0 نداریم. در چنین حالتی بیان نمی‌کنیم که فرض H_0 را می‌پذیریم زیرا فرض H_0 خلاف ادعای داروساز است. در حقیقت بیان می‌کنیم که براساس اطلاعات حاصل از این نمونه دلیلی بر رد فرض H_0 (یا پذیرش H_1) نداریم.

ناحیهٔ بحرانی و آمارهٔ آزمون برای انجام یک آزمون آماری نیاز به آماره و ناحیهٔ بحرانی آزمون داریم که با ذکر یک مثال آن‌ها را تشریح می‌کنیم.

مثال ۲.۴ فرض کنید که یک داروی استاندارد ۲۵٪ در درمان یک بیماری مؤثر است و شخصی ادعا می‌کند که دارویی که او ساخته است ۵۰٪ در درمان آن بیماری مؤثر است.

Scanned with CamScanner

بنابراین برای تحقیق در صحت حرف این شخص با آزمون فرض‌های زیر مواجه می‌شویم

$$\begin{cases} H_۰ : p = \frac{۱}{۴} \\ H_۱ : p = \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

حال این سؤال مطرح می‌شود که چگونه این فرض‌ها را آزمون کنیم. همان‌طور که قبلاً گفته شد، بایستی نمونه‌ای از بیماران را در نظر بگیریم و دارو را روی آن‌ها آزمایش کنیم. فرض کنید که ۲۰ بیمار را انتخاب کنیم و متغیر تصادفی X را برابر تعداد بیماران بهبود یافته توسط داروی جدید در بین ۲۰ بیمار در نظر بگیریم. در این‌صورت اگر مقادیر مشاهده شدهٔ X کوچک باشد، برای مثال کمتر از ۸، آنگاه نمی‌توان $H_۰$ را رد کرد زیرا در این‌صورت کمتر از ۴۰% افراد بیمار بهبود یافته‌اند و نمی‌تواند $p = \frac{۱}{۲}$ باشد. حال فرض کنید قرارداد کنیم که اگر مقادیر مشاهده شدهٔ X بزرگ‌تر یا مساوی ۹ باشد آنگاه فرض $H_۰$ را رد خواهیم کرد. یعنی اگر مقادیر مشاهده شدهٔ X متعلق به مجموعهٔ $C = \{x | x \geq ۹\}$ باشد آنگاه فرض $H_۰$ را رد کنیم و اگر چنین نبود $H_۰$ را رد نکنیم. به این آمارهٔ X که بر اساس مقادیر مشاهده شدهٔ آن فرض $H_۰$ را رد یا قبول می‌کنیم آمارهٔ آزمون گویند و به ناحیهٔ C که تمامی مقادیر مربوط به رد فرض $H_۰$ را به‌دست می‌دهد، ناحیهٔ بحرانی آزمون گویند.

تعریف ۲.۴ آمارهٔ $T = T(X_۱, \cdots, X_n)$ که براساس مقادیر مشاهده شدهٔ آن یک فرض را رد یا قبول می‌کنیم آمارهٔ آزمون گویند و به مجموعهٔ مقادیری از این آماره که به‌ازای آن فرض $H_۰$ را بایستی رد کرد، ناحیهٔ بحرانی آزمون گویند و با نماد C نمایش می‌دهند. متمم ناحیهٔ بحرانی یعنی C' را ناحیهٔ پذیرش آزمون گویند.

اگر ناحیهٔ بحرانی C یک آزمون مشخص شود در این‌صورت با جمع‌آوری نمونه و محاسبهٔ $t = T(x_۱, \cdots, x_n)$ می‌توان آزمون آماری را به‌صورت زیر انجام داد. اگر $T(x_۱, \cdots, x_n) \in C$ آنگاه فرض $H_۰$ را رد می‌کنیم و در غیر این‌صورت آن را می‌پذیریم.
بنابراین در مثال ۲.۴ اگر $x \geq ۹$ فرض $H_۰$ را رد می‌کنیم و در غیر این‌صورت آن را می‌پذیریم.

Scanned with CamScanner

خطاهای آزمون

آیا قضاوتی را که در مثال ۲.۴ انجام دادیم بدون خطا است؟ جواب این سوال منفی است. زیرا ممکن است در واقع H_0 درست باشد یعنی داروی جدید نیز ۲۵٪ موثر باشد و ما مشاهده کنیم که در این نمونهٔ ۲۰ بیماری ۱۰ بیمار بهبود یافته‌اند و در نتیجه فرض H_0 را رد کنیم. بنابراین ممکن است فرض H_0 درست باشد و ما آن را رد کنیم که این خطا را خطای نوع اول آزمون گویند. در مقابل ممکن است که فرض H_0 درست نباشد یعنی داروی جدید ۵۰٪ موثر باشد و ما مشاهده کنیم که ۶ بیمار از بین ۲۰ بیمار بهبود یافته‌اند و در نتیجه فرض H_0 را بپذیریم. بنابراین ممکن است فرض H_0 نادرست باشد و ما آن را بپذیریم که این خطا را خطای نوع دوم آزمون گویند. احتمال خطای نوع اول را با α نمایش می‌دهند و آن را **سطح معنی‌دار** یا **سطح تشخیص آزمون** گویند و احتمال خطای نوع دوم را با β نمایش می‌دهند. بنابراین

$$\begin{aligned}
\alpha &= P(\text{رد شود } H_0 \text{ فرض} \mid \text{درست است } H_0) \\
&= P(T(X_1,\cdots,X_n)\in C \mid \text{درست است } H_0) \\
\beta &= P(\text{پذیرفته شود } H_0 \text{ فرض} \mid \text{درست است } H_1) \\
&= P(T(X_1,\cdots,X_n)\notin C \mid \text{درست است } H_1)
\end{aligned}$$

نتیجه‌ی آزمون / واقعیت	فرض H_0 درست است	فرض H_1 درست است
فرض H_0 رد می‌شود	خطای نوع اول	
فرض H_0 پذیرفته می‌شود		خطای نوع دوم

شکل ۱.۴: خطاهای آزمون

توان آزمون احتمال رد کردن فرض H_0 در صورتی که فرض H_1 درست باشد؛ یعنی احتمال رد کردن فرض H_0 به حق را توان آزمون گویند و با β^* نشان می‌دهند. بنابراین

Scanned with CamScanner

$$\begin{aligned}\beta^* &= P(\text{رد شود } H_\circ \text{ درست است|فرض } H_\text{۱}) \\ &= \text{۱} - P(\text{پذیرفته شود } H_\circ \text{ درست است|فرض } H_\text{۱}) = \text{۱} - \beta\end{aligned}$$

مثال ۳.۴ در مثال ۲.۴ احتمال خطای نوع اول و دوم و توان آزمون را محاسبه کنید.

حل : در مثال ۲.۴ داشتیم که $C = \{x|x \geq \text{۹}\}$ و $X \sim B(\text{۲۰}, p)$ بنابراین

$$\begin{aligned}\alpha &= P(X \in C| \text{ درست } H_\circ) = P\left(X \geq \text{۹}\middle|p = \frac{\text{۱}}{\text{۴}}\right) \\ &= \text{۱} - P\left(X \leq \text{۸}\middle|p = \frac{\text{۱}}{\text{۴}}\right) = \text{۱} - \text{۰/۹۵۹۱} = \text{۰/۰۴۰۹} \\ \beta &= P(X \notin C| \text{ درست } H_\text{۱}) = P\left(X < \text{۹}\middle|p = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\right) \\ &= P\left(X \leq \text{۸}\middle|p = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\right) = \text{۰/۲۵۱۷} \\ \beta^* &= \text{۱} - \beta = \text{۱} - \text{۰/۲۵۱۷} = \text{۰/۷۴۸۳}\end{aligned}$$

بنابراین احتمال خطای نوع اول کم و احتمال خطای نوع دوم زیاد است.

مثال ۴.۴ در مثال ۲.۴ اگر ناحیهٔ بحرانی به‌صورت $C = \{x|x \geq \text{۸}\}$ باشد، احتمال خطای نوع اول و دوم و توان آزمون را محاسبه کنید.

حل :

$$\begin{aligned}\alpha &= P\left(X \geq \text{۸}\middle|p = \frac{\text{۱}}{\text{۴}}\right) = \text{۱} - P\left(X \leq \text{۷}\middle|p = \frac{\text{۱}}{\text{۴}}\right) \\ &= \text{۱} - \text{۰/۸۹۸۲} = \text{۰/۱۰۱۸} \\ \beta &= P\left(X < \text{۸}\middle|p = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\right) = P\left(X \leq \text{۷}\middle|p = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\right) = \text{۰/۱۳۱۶} \\ \beta^* &= \text{۱} - \text{۰/۱۳۱۶} = \text{۰/۸۶۸۴}\end{aligned}$$

بنابراین احتمال خطای نوع اول افزایش یافت و در مقابل احتمال خطای نوع دوم کاهش یافت.

با مقایسهٔ دو مثال بالا دیده می‌شود که با تغییر دادن ناحیهٔ بحرانی نمی‌توان هم خطای نوع اول و هم خطای نوع دوم را هم‌زمان کاهش داد. موقعی که یکی را کاهش می‌دهیم، دیگری افزایش می‌یابد و برعکس. بنابراین بایستی آن ناحیهٔ بحرانی را انتخاب کنیم که با قرار دادن یک حداکثر مقدار برای احتمال خطای نوع اول بتوان احتمال خطای نوع دوم را تا آن‌جا که ممکن است کاهش داد یا به‌عبارتی تا آنجا که ممکن است توان آزمون را حداکثر کرد.

Scanned with CamScanner

مثال ۵.۴ فرض کنید $X \sim N(\mu, ۴)$ و فرض‌های زیر را در نظر بگیرید

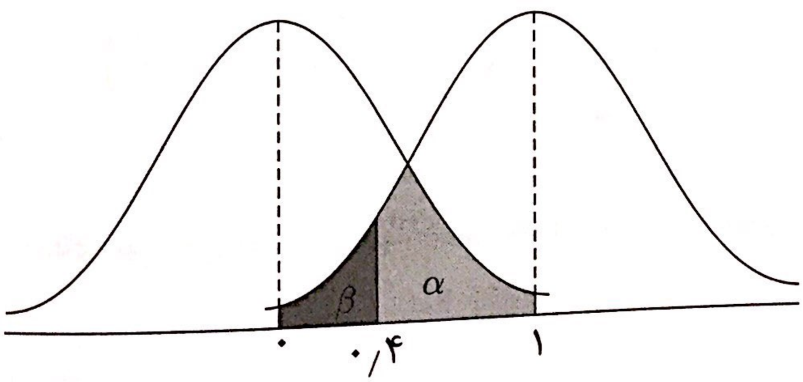
$$\begin{cases} H_۰ : \mu = ۰ \\ H_۱ : \mu = ۱ \end{cases}$$

یک نمونهٔ تصادفی $X_۱, X_۲, \cdots, X_{۲۵}$ از X جمع‌آوری شده است. اگر در آزمون $H_۰$ در مقابل $H_۱$ ناحیهٔ بحرانی به‌صورت $C = \{X_۱, \cdots, X_{۲۵} | \overline{X} > ۰/۴\}$ باشد، احتمال خطای نوع اول و دوم و توان آزمون را حساب کنید.

حل: با توجه به اینکه $\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{۴}{n}\right)$، پس از جدول III داریم

$$\begin{aligned}
\alpha &= (\text{ رد شود } H_۰ \text{ درست است |فرض } H_۰) = P(\overline{X} > ۰/۴ | \mu = ۰) \\
&= P\left(\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{۰/۴ - ۰}{\frac{۲}{۵}}\right) = P(Z > ۱) \\
&= ۱ - P(Z \leq ۱) = ۱ - ۰/۸۴۱۳ = ۰/۱۵۸۷ \\
\beta &= (\text{ پذیرفته شود } H_۰ \text{ درست است |فرض } H_۱) = P(\overline{X} \leq ۰/۴ | \mu = ۱) \\
&= P\left(\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{۰/۴ - ۱}{\frac{۲}{۵}}\right) = P(Z \leq -۱/۵) = ۰/۰۶۶۸ \\
\beta^* &= ۱ - \beta = ۱ - ۰/۰۶۶۸ = ۰/۹۳۳۲
\end{aligned}$$

در شکل ۲.۴ نمودار α و β در مثال ۵.۴ نمایش داده شده‌اند. مشاهده می‌شود که هر چه α را کاهش دهیم، β افزایش می‌یابد.



شکل ۲.۴: نمودار α و β

مثال ۶.۴ در مثال ۵.۴ اگر ناحیهٔ بحرانی به‌صورت $C = \{X_۱, \cdots, X_{۲۵} | \overline{X} > c\}$ باشد، مقدار c را چنان تعیین کنید که $\alpha = ۰/۱$ باشد و احتمال خطای نوع دوم و توان آزمون را محاسبه کنید.

Scanned with CamScanner

حل :

$$\cdot/\text{۱} = \alpha = P(\overline{X} > c|\mu = \cdot) = P\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{c-\cdot}{\frac{\text{۲}}{\text{۵}}}\right) = P(Z > \text{۲}/\text{۵}c)$$

در نتیجه $P(Z \leq \text{۲}/\text{۵}c) = \cdot/\text{۹}$ و از جدول III نتیجه می‌شود که $\text{۲}/\text{۵}c = z_{\cdot/\text{۹}} = \text{۱}/\text{۲۸}$ و یا $c = \frac{\text{۱}/\text{۲۸}}{\text{۲}/\text{۵}} = \cdot/\text{۵۱۲}$. همچنین

$$\begin{aligned}
\beta &= P(\overline{X} \leq c|\mu = \text{۱}) = P\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{\cdot/\text{۵۱۲}-\text{۱}}{\frac{\text{۲}}{\text{۵}}}\right) \\
&= P(Z \leq -\text{۱}/\text{۲۲}) = \cdot/\text{۱۱۱۲} \\
\beta^* &= \text{۱}-\beta = \text{۱}-\cdot/\text{۱۱۱۲} = \cdot/\text{۸۸۸۸}
\end{aligned}$$

مثال ۷.۴ فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته با یکی از تابع‌های احتمال زیر باشد.

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$f_0(x)$	۰/۰۵	۰/۰۵	۰/۱	۰/۱	۰/۲	۰/۵
$f_1(x)$	۰/۱	۰/۱۵	۰/۲۵	۰/۱۵	۰/۲۵	۰/۱

در آزمون فرض‌های $\begin{cases} X \sim f_0 \\ X \sim f_1 \end{cases}$ کدام‌یک از ناحیه‌های بحرانی زیر را ترجیح می‌دهید؟ چرا؟

$$C_1 = \{x_1, x_3\} \qquad C_2 = \{x_2, x_3\}$$

حل : در هر مورد احتمال خطای نوع اول و توان آزمون را محاسبه می‌کنیم. در مورد ناحیهٔ C_1 داریم

$$\alpha = P(X = x_1 \text{ یا } X = x_3|H_0) = \cdot/\cdot\text{۵} + \cdot/\text{۱} = \cdot/\text{۱۵}$$
$$\beta^* = P(X = x_1 \text{ یا } X = x_3|H_1) = \cdot/\text{۱} + \cdot/\text{۲۵} = \cdot/\text{۳۵}$$

در مورد ناحیهٔ C_2 داریم

$$\alpha = P(X = x_2 \text{ یا } X = x_3|H_0) = \cdot/\cdot\text{۵} + \cdot/\text{۱} = \cdot/\text{۱۵}$$
$$\beta^* = P(X = x_2 \text{ یا } X = x_3|H_1) = \cdot/\text{۱۵} + \cdot/\text{۲۵} = \cdot/\text{۴۰}$$

Scanned with CamScanner

با توجه به اینکه احتمال خطای نوع اول برای هر دو ناحیه یکسان است $(\alpha = ۰/۱۵)$ ولی توان آزمون ناحیهٔ $C_۲$ بیشتر از ناحیهٔ $C_۱$ است، پس ناحیهٔ $C_۲$ را ترجیح می‌دهیم.

انواع فرض‌ها فرض‌های آماری به‌طور کلی به دو دسته ساده و مرکب تقسیم می‌شوند. فرضی را ساده گوییم که تحت آن فرض توزیع جامعه کاملاً مشخص گردد. مثلاً در مثال ۵.۴ فرض $H_۰ : \mu = ۰$ یک فرض ساده است. فرضی را مرکب گوییم که تحت آن فرض توزیع جامعه کاملاً مشخص نمی‌گردد. مثلاً در مثال ۱.۴ فرض $H_۱ : p > ۰/۷$ یک فرض مرکب است زیرا اگر این فرض درست باشد مقدار p دقیقاً مشخص نمی‌شود و در نتیجه توزیع جامعه کاملاً مشخص نمی‌گردد.

آزمون‌های یک طرفه و دو طرفه فرض کنید θ پارامتر نامعلوم جامعه باشد و بخواهیم آزمون‌هایی در مورد این پارامتر انجام دهیم. آزمون هر فرض آماری که در آن فرض مقابل یک طرفه باشد، آزمون یک طرفه نامیده می‌شود. برای مثال اگر $\theta_۰$ مقدار ثابتی از θ باشد آنگاه هر یک از آزمون‌های زیر یک طرفه هستند

$$\begin{cases} H_۰ : \theta \leq \theta_۰ \\ H_۱ : \theta > \theta_۰ \end{cases} \qquad \begin{cases} H_۰ : \theta = \theta_۰ \\ H_۱ : \theta > \theta_۰ \end{cases} \tag{۱.۴}$$

$$\begin{cases} H_۰ : \theta \geq \theta_۰ \\ H_۱ : \theta < \theta_۰ \end{cases} \qquad \begin{cases} H_۰ : \theta = \theta_۰ \\ H_۱ : \theta < \theta_۰ \end{cases} \tag{۲.۴}$$

آزمون هر فرض آماری که در آن فرض مقابل دو طرفه باشد یعنی

$$\begin{cases} H_۰ : \theta = \theta_۰ \\ H_۱ : \theta \neq \theta_۰ \end{cases} \tag{۳.۴}$$

یک آزمون دو طرفه نامیده می‌شود.

همان‌گونه که بیان شد اغلب ادعای بیان شده را در فرض $H_۱$ و خلاف آن را در فرض $H_۰$ می‌گذرانند و سعی در رد فرض $H_۰$ براساس اطلاعات حاصل از نمونه می‌نمایند. اما این موضوع همواره صحت ندارد و بستگی به ماهیت مسئله، ادعا می‌تواند در فرض $H_۰$ یا $H_۱$ قرار گیرد (به‌طور معمول حالت تساوی در فرض $H_۰$ قرار می‌گیرد، موارد بالا را مشاهده کنید). برای مثال به نمونهٔ زیر توجه کنید.

Scanned with CamScanner

مثال ۸.۴ فرض کنید طول عمر لامپ‌های تولیدی یک کارخانه دارای توزیع نمایی با میانگین θ ساعت است.

(الف) براساس اطلاعات قبلی میانگین طول عمر لامپ‌های تولیدی ۲۰۰ ساعت است و یک مهندس ادعا می‌کند براساس روشی که او پیشنهاد می‌کند می‌توان میانگین طول عمر لامپ‌ها را افزایش داد. بنابراین با فرض‌های زیر مواجه می‌شویم.

$$\begin{cases} H_\circ : \theta = ۲۰۰ \\ H_۱ : \theta > ۲۰۰ \end{cases}$$

(ب) براساس اطلاعات قبلی میانگین طول عمر لامپ‌های تولیدی کمتر از ۳۰۰ ساعت است و یک مهندس ادعا می‌کند براساس روشی که او پیشنهاد می‌کند می‌توان لامپ‌هایی با میانگین طول عمر ۳۰۰ ساعت تولید کرد. بنابراین با فرض‌های زیر مواجه می‌شویم.

$$\begin{cases} H_\circ : \theta = ۳۰۰ \\ H_۱ : \theta < ۳۰۰ \end{cases}$$

در حالت (الف) ادعا در فرض $H_۱$ و در حالت (ب) ادعا در فرض $H_\circ$ است.

با توجه به مطالبی که در این بخش بیان گردید مشاهده می‌شود که برای انجام آزمون فرض‌های آماری نیاز به تعیین ناحیهٔ بحرانی C آزمون داریم. روش‌های مختلفی برای تعیین این ناحیه وجود دارد که در بخش بعد یکی از این روش‌ها را بررسی می‌کنیم.

۳.۴ آزمون نسبت درست‌نمایی (اختیاری)

یکی از روش‌های متداول ساختن ناحیه بحرانی آزمون، روش نسبت درست‌نمایی است. در این بخش این روش را برای آزمون فرض ساده در مقابل ساده و همچنین آزمون فرض ساده در مقابل فرض دو طرفه بررسی می‌کنیم.

۱.۳.۴ آزمون فرض ساده در مقابل فرض ساده

فرض کنید $X_۱, X_۲, \cdots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی n تایی از توزیعی با تابع چگالی احتمال (یا تابع احتمال) $f_\theta(x)$ باشد و بخواهیم آزمون فرض سادهٔ $H_\circ : \theta = \theta_\circ$ در مقابل فرض سادهٔ

Scanned with CamScanner

$H_1: \theta = \theta_1$ که θ_0 و θ_1 مقادیر ثابتی هستند را انجام دهیم. در روش نسبت درست‌نمایی ابتدا آمارهٔ نسبت درست‌نمایی تحت دو فرض را به‌صورت زیر تشکیل می‌دهیم

$$\lambda(\boldsymbol{x}) = \frac{f_{\theta_0}(\boldsymbol{x})}{f_{\theta_1}(\boldsymbol{x})} = \frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)}$$

که در آن $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ مقدار مشاهده شدهٔ $\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_n)$ است. سپس ناحیه بحرانی آزمون را به‌صورت $C = \{\boldsymbol{x} | \lambda(\boldsymbol{x}) < \lambda_0\}$ تشکیل می دهیم که در آن λ_0 به‌گونه‌ای تعیین می‌شود که احتمال خطای نوع اول α باشد، یعنی $P_{\theta_0}(\lambda(\boldsymbol{X}) < \lambda_0) = \alpha$.

مثال ۹.۴ در مثال ۵.۴ ناحیه بحرانی آزمون نسبت درست‌نمایی در سطح معنی‌دار $\alpha = ۰/۱$ را به‌دست آورید.

حل : در مثال ۵.۴ داریم

$$f_\mu(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} f_\mu(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x_i-\mu)^2} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

بنابراین در آزمون فرض‌های $\begin{cases} H_0: \mu = 0 \\ H_1: \mu = 1 \end{cases}$ داریم

$$\lambda(\boldsymbol{x}) = \frac{f_{\mu=0}(\boldsymbol{x})}{f_{\mu=1}(\boldsymbol{x})} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-0)^2}}{e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-1)^2}} = e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{n}{2}}$$

بنابراین ناحیه بحرانی به‌صورت $e^{-\sum_{i=1}^{n} X_i + \frac{n}{2}} < \lambda_0$ یا $\sum_{i=1}^{n} X_i > \frac{n}{2} - \ln\lambda_0$ یا معادلاً $\overline{X} > c$ است، که در آن

$$0/1 = \alpha = P_{\mu=0}\left(e^{-\sum_{i=1}^{n} X_i + \frac{n}{2}} < \lambda_0\right) = P_{\mu=0}(\overline{X} > c)$$

بنابراین همانند مثال ۶.۴ نتیجه می‌شود که $c = 0/512$ و در نتیجه ناحیه بحرانی به‌صورت $C = \{\boldsymbol{X} | \overline{X} > 0/512\}$ است.

مثال ۱۰.۴ فرض کنید $X_1, X_2, \cdots, X_{10}$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع $N(0, \sigma^2)$ باشند. ناحیه بحرانی آزمون نسبت درست‌نمایی در سطح $\alpha = 0/05$ برای آزمون فرض‌های $\begin{cases} H_0: \sigma^2 = 3 \\ H_1: \sigma^2 = 1 \end{cases}$ را به‌دست آورید.

Scanned with CamScanner

حل :

$$f_{\sigma^۲}(\boldsymbol{x})=\prod_{i=۱}^{۱۰}f_{\sigma^۲}(x_i)=\prod_{i=۱}^{۱۰}\frac{۱}{\sqrt{۲\pi\sigma^۲}}e^{-\frac{۱}{۲\sigma^۲}x_i}=(۲\pi\sigma^۲)^{-\frac{۱۰}{۲}}e^{-\frac{۱}{۲\sigma^۲}\sum_{i=۱}^{۱۰}X_i^۲}$$

در نتیجه

$$\lambda(\boldsymbol{x})=\frac{f_{\sigma^۲=۳}(\boldsymbol{x})}{f_{\sigma^۲=۱}(\boldsymbol{x})}=\frac{(۲\pi(۳))^{-\frac{۱۰}{۲}}e^{-\frac{۱}{۶}\sum_{i=۱}^{۱۰}x_i^۲}}{(۲\pi)^{-\frac{۱۰}{۲}}e^{-\frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{۱۰}x_i^۲}}=۳^{-۵}e^{\frac{۱}{۳}\sum_{i=۱}^{۱۰}X_i^۲}$$

پس ناحیه بحرانی آزمون عبارت است از $۳^{-۵}e^{\frac{۱}{۳}\sum_{i=۱}^{۱۰}X_i^۲}<\lambda_۰$ و یا معادلاً $\sum_{i=۱}^{۱۰}X_i^۲<c$ که در آن

$$۰/۰۵=\alpha=P_{\sigma^۲=۳}\left(\sum_{i=۱}^{۱۰}X_i^۲<c\right)=P_{\sigma^۲=۳}\left(\sum_{i=۱}^{۱۰}\frac{X_i^۲}{۳}<\frac{c}{۳}\right)=P\left(\chi^۲_{(۱۰)}<\frac{c}{۳}\right)$$

زیرا تحت فرض $H_۰$، $\frac{X_i}{\sqrt{۳}}\sim N(۰,۱)$ و $\sum_{i=۱}^{۱۰}\frac{X_i^۲}{۳}\sim\chi^۲_{(۱۰)}$. حال با استفاده از جدول IV داریم

$$\frac{c}{۳}=\chi^۲_{۰/۰۵}(۱۰)=۳/۹۴\Longrightarrow c=۱۱/۸۲$$

بنابراین ناحیه بحرانی عبارت است از $C=\left\{\boldsymbol{X}\middle|\sum_{i=۱}^{۱۰}X_i^۲<۱۱/۸۲\right\}$.

۲.۳.۴ آزمون فرض ساده در مقابل فرض دو طرفه

فرض کنید $X_۱,X_۲,\cdots,X_n$ نمونه‌ای تصادفی n تایی از توزیعی با تابع چگالی احتمال یا تابع احتمال $f_\theta(x)$ باشد و بخواهیم آزمون فرض ساده $H_۰:\theta=\theta_۰$ در مقابل فرض دو طرفه $H_۱:\theta\neq\theta_۰$ را انجام دهیم که در آن $\theta_۰$ مقداری ثابت است. در روش نسبت درست‌نمایی ابتدا آمارهٔ نسبت درست‌نمایی تحت دو فرض را به‌صورت زیر تشکیل می‌دهیم

$$\lambda(\boldsymbol{x})=\frac{L(\theta_۰)}{\sup_{\theta\in\Theta}L(\theta)}$$

که $L(\theta)=f_\theta(x_۱,\cdots,x_n)$ تابع درست‌نمایی است. سپس ناحیه بحرانی آزمون را به‌صورت $C=\{\boldsymbol{X}|\lambda(\boldsymbol{X})<\lambda_۰\leq ۱\}$ تشکیل می‌دهیم که در آن $\lambda_۰$ به‌گونه‌ای تعیین می‌شود که احتمال خطای نوع اول α باشد. یعنی $\alpha=P_{\theta_۰}(\lambda(\boldsymbol{X})<\lambda_۰)$.

Scanned with CamScanner

مثال ۱۱.۴ فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع $N(\mu, \sigma^2)$ باشد که در آن σ^2 مقداری معلوم است. در آزمون فرض‌های
$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$
ناحیه بحرانی آزمون نسبت درست‌نمایی در سطح معنی‌دار α را به‌دست آورید.

حل :

$$L(\mu) = \prod_{i=1}^{n} f_\mu(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2} = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

بنابراین

$$l(\mu) = \ln L(\mu) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

و در نتیجه

$$\frac{\partial l(\mu)}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = 0 \Longrightarrow \mu = \overline{x}$$

چون $\frac{\partial^2 l(\mu)}{\partial \mu^2} = \frac{-n}{\sigma^2} < 0$ پس برآوردگر حداکثر درست‌نمایی μ عبارت از $\widehat{\mu} = \overline{X}$ است و در نتیجه

$$\sup_{\Theta} L(\mu) = L(\widehat{\mu}) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$$

از طرفی

$$L(\mu_0) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \lambda(\boldsymbol{x}) &= \frac{L(\mu_0)}{\sup_{\Theta} L(\mu)} = \frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}}{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}} \\ &= \frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2 + n(\overline{x}-\mu_0)^2]}}{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}} = e^{-\frac{n}{\sigma^2}(\overline{x}-\mu_0)^2} \end{aligned}$$

Scanned with CamScanner

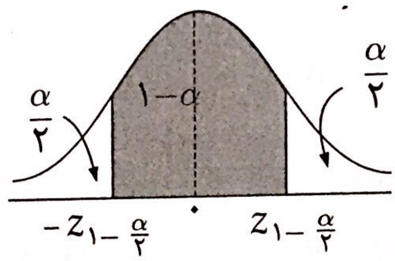
در نتیجه ناحیهٔ بحرانی به‌صورت $e^{-\frac{n}{\sigma^2}(\overline{X}-\mu_0)^2} < \lambda_0$ و یا معادلاً $\frac{n}{\sigma^2}(\overline{X}-\mu_0)^2 > k$ و یا $\left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| > c$ است که در آن

$$\alpha = P_{\mu_0}\left(\left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| > c\right) = 1 - P\left(-c < \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < c\right)$$

$$\Longrightarrow P\left(-c < \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < c\right) = 1-\alpha$$

چون تحت فرض H_0، $Z = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$، پس با توجه به شکل ۳.۴، $C = z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ و در نتیجه ناحیه بحرانی عبارت است از

$$C = \left\{\boldsymbol{X}\,\middle|\,|Z| = \left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\}$$



شکل ۳.۴

۴.۴ مراحل انجام یک آزمون

همان‌طور که در بخش‌های قبل مشاهده شد، در انجام آزمون فرض‌های آماری پس از تشکیل فرض‌ها، بایستی ناحیه بحرانی آزمون را تعیین کرده و از روی آن نسبت به رد یا پذیرش فرض H_0 تصمیم‌گیری کنیم. در زیر یک قاعدهٔ کلی برای تعیین ناحیه بحرانی که در نمونه‌های تصادفی از جامعهٔ نرمال یا تقریباً نرمال صدق می‌کنند، ارائه می‌دهیم. توجه کنید که این قاعده براساس روش آزمون نسبت درست‌نمایی در توزیع نرمال قابل اثبات است. ولی در حالت کلی و در توزیع‌های دیگر ممکن است این قاعده صحیح نباشد و در چنین حالتی بایستی روش آزمون نسبت درست‌نمایی را مستقیماً به‌کار برد.

در آزمون فرض روی پارامتر θ، فرض کنید $T(\boldsymbol{X}) = T(X_1, \cdots, X_n)$ یک برآوردگر خوب برای پارامتر θ باشد (برای مثال $\overline{X}$ برای μ، S^2 برای σ^2 و ...). در این‌صورت

Scanned with CamScanner

(الف) در آزمون فرض‌های یک طرفه (۱.۴) ناحیه بحرانی به‌صورت $T(\boldsymbol{X}) > c$ است که در آن c به‌گونه‌ای تعیین می‌شود که سطح معنی‌دار آزمون α باشد، یعنی

$$\alpha = P_{\theta=\theta_0}(T(\boldsymbol{X}) > c)$$

(ب) در آزمون فرض‌های یک طرفه (۲.۴) ناحیه بحرانی به‌صورت $T(\boldsymbol{X}) < c$ است که در آن c به‌گونه‌ای تعیین می‌شود که سطح معنی‌دار آزمون α باشد، یعنی

$$\alpha = P_{\theta=\theta_0}(T(\boldsymbol{X}) < c)$$

(پ) در آزمون فرض‌های دوطرفه (۳.۴) ناحیه بحرانی به‌صورت $T(\boldsymbol{X}) < c_1$ یا $T(\boldsymbol{X}) > c_2$ با $c_1 < c_2$ است که در آن c_1 و c_2 به‌گونه‌ای تعیین می‌شود که سطح معنی‌دار آزمون α باشد، یعنی

$$\alpha = P_{\theta=\theta_0}(T(\boldsymbol{X}) < c_1 \text{ یا } T(\boldsymbol{X}) > c_2) \Longrightarrow 1-\alpha = P(c_1 < T(\boldsymbol{X}) < c_2)$$

توجه شود که در هر حالت علامت نامساوی در ناحیه بحرانی مطابق علامت نامساوی در فرض H_1 آزمون مربوطه است (برای مثال اگر $H_1 : \theta > \theta_0$ آنگاه ناحیه بحرانی به‌صورت $T(\boldsymbol{X}) > c$ است).

با توجه به مطالب بالا، برای انجام یک آزمون آماری بایستی مراحل زیر را طی کرد:

۱) تعیین فرض‌های صفر H_0 و مقابل H_1.

۲) تعیین یک سطح معنی‌دار α که معمولاً آن را ۰/۰۱ یا ۰/۰۵ یا ۰/۱ می‌گیرند (هر جا در این کتاب سطح معنی‌دار مشخص نشده باشد، مقدار ۰/۰۵ در نظر گرفته می‌شود).

۳) تعیین آمارهٔ آزمون $T(\boldsymbol{X}) = T(X_1, \cdots, X_n)$ که معمولاً براساس برآورد نقطه‌ای پارامتر نامعلوم θ است.

۴) تعیین ناحیه بحرانی آزمون C که براساس آمارهٔ آزمون، فرض مقابل و سطح معنی‌دار α تعیین می‌شود.

۵) محاسبه مقدار مشاهده شدهٔ آمارهٔ آزمون براساس نمونهٔ تصادفی مشاهده شدهٔ $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

Scanned with CamScanner

۶) نتیجه‌گیری: اگر مقدار محاسبه شدهٔ آمارهٔ آزمون یعنی $T(\boldsymbol{x}) = T(x_1, \cdots, x_n)$ در ناحیهٔ بحرانی C قرار گیرد آنگاه فرض H_0 را رد می‌کنیم و در غیر این‌صورت فرض H_0 را قبول می‌کنیم.

در بخش بعد این مراحل را در انجام آزمون فرض روی پارامترهای مختلف جامعه به‌کار می‌بریم.

۵.۴ آزمون فرض‌های آماری روی پارامترهای نامعلوم جامعه

در این بخش با توجه به مطالب بیان شده در بخش‌های قبل، آزمون فرض‌های آماری روی پارامترهای نامعلوم جامعه را بررسی می‌کنیم.

۱.۵.۴ آزمون روی میانگین جامعه با معلوم بودن واریانس جامعه

فرض کنید که از یک جامعهٔ X با میانگین نامعلوم μ و واریانس معلوم σ^2 یک نمونهٔ تصادفی $X_1, X_2, \cdots, X_n$ انتخاب کرده باشیم و بخواهیم آزمون‌هایی روی میانگین μ انجام دهیم. برای این منظور سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

(الف) در آزمون فرض $\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$ که در آن μ_0 مقداری معلوم است، اگر $\overline{X}$ برآوردگر μ مقادیر بزرگ را اختیار کند یعنی $\overline{X} > c$ آنگاه فرض H_0 را رد می‌کنیم. بنابراین ناحیه بحرانی آزمون به‌صورت $\overline{X} > c$ است که در آن c به‌گونه‌ای تعیین می‌گردد که سطح معنی‌دار آزمون برابر مقدار مشخص شدهٔ α باشد. یعنی

$$\alpha = P(\overline{X} > c | \mu = \mu_0)$$

حال اگر جامعه نرمال باشد یا اینکه نرمال نبوده اما $n \geq ۳۰$ باشد آنگاه طبق مطلب بخش ۵.۲ داریم که

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(۰, ۱)$$

Scanned with CamScanner

بنابراین برای تعیین c داریم که

$$\alpha = P(\overline{X} > c|\mu = \mu_0) = P\left(\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{c - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = P\left(Z > \frac{c - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

در نتیجه

$$\frac{c - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = z_{1-\alpha} \Longrightarrow c = \mu_0 + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

بنابراین ناحیهٔ بحرانی آزمون به‌صورت $\overline{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ و یا $\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_{1-\alpha}$ است. در نتیجه

(۴.۴)

در آزمون فرض $\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$ فرض H_0 رد می‌شود اگر و فقط اگر

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_{1-\alpha}$$

توجه کنید که اگر فرض H_0 به‌صورت $H_0 : \mu \leq \mu_0$ باشد آنگاه می‌توان نشان داد که ناحیهٔ بحرانی هنوز به‌صورت (۴.۴) است.

(ب) در آزمون فرض $\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases}$ اگر $\overline{X}$ مقادیر کوچک را اختیار کند یعنی $\overline{X} < c$ آنگاه فرض H_0 را رد می‌کنیم. بنابراین ناحیهٔ بحرانی به‌صورت $\overline{X} < c$ است که در آن c با انجام عملیات مشابه قسمت (الف) برابر $c = \mu_0 - z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ به‌دست می‌آید و بنابراین ناحیهٔ بحرانی به‌صورت $\overline{X} < \mu_0 - z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ و یا $\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_{1-\alpha}$ خواهد بود. در نتیجه

(۵.۴)

در آزمون فرض $\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases}$ فرض H_0 رد می‌شود اگر و فقط اگر

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{1-\alpha}$$

توجه کنید که اگر فرض H_0 به‌صورت $H_0 : \mu \geq \mu_0$ باشد آنگاه می‌توان نشان داد که ناحیهٔ بحرانی هنوز به‌صورت (۵.۴) است.

Scanned with CamScanner

پ) در آزمون فرض $\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$ اگر $\overline{X}$ مقادیر کوچک یا مقادیر بزرگ را اختیار کند یعنی $\overline{X} > c_2$ یا $\overline{X} < c_1$ آنگاه فرض H_0 را رد می‌کنیم. بنابراین ناحیهٔ بحرانی به‌صورت $\overline{X} > c_2$ یا $\overline{X} < c_1$ است که در آن c_1 و c_2 به‌صورت زیر تعیین می‌گردند

$$\alpha = P(\overline{X} < c_1 \text{ یا } \overline{X} > c_2 | \mu = \mu_0) \Longrightarrow 1 - \alpha = P(c_1 < \overline{X} < c_2 | \mu = \mu_0)$$

بنابراین

$$1 - \alpha = P\left(\frac{c_1 - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{c_2 - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

و در نتیجه با توجه به شکل ۳.۴ داریم

$$-\frac{c_1 - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{c_2 - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

یا $c_1 = \mu_0 - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ و $c_2 = \mu_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. بنابراین ناحیهٔ بحرانی به‌صورت $\overline{X} > \mu_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ یا $\overline{X} < \mu_0 - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ یا معادلاً $\left|\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ است. در نتیجه

در آزمون $\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$ فرض H_0 رد می‌شود اگر و فقط اگر $$\lvert Z\rvert = \left\lvert\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right\rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$	(۶.۴)

رابطهٔ آزمون فرض و فاصلهٔ اطمینان توجه کنید که ناحیهٔ پذیرش فرض H_0 متمم ناحیهٔ بحرانی است. بنابراین ناحیهٔ پذیرش فرض H_0 در (۶.۴) به‌صورت $-z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ یا

$$\overline{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu_0 < \overline{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

است. این فاصله همان فاصلهٔ اطمینان $(1 - \alpha)100\%$ برای μ در بخش ۱.۶.۳ است. یعنی ناحیهٔ پذیرش فرض H_0 همان فاصلهٔ اطمینان $(1 - \alpha)100\%$ است. بنابراین اگر μ_0 در داخل فاصلهٔ اطمینان $(1 - \alpha)100\%$ قرار گیرد فرض H_0 را می‌پذیریم و در غیر این‌صورت آن را رد می‌کنیم.

Scanned with CamScanner

مثال ۱۲.۴ یک کارخانه وسایل ورزشی و ماهی‌گیری یک نخ ماهی‌گیری را ساخته است که به‌طور متوسط دارای قدرت تحمل ۱۵ کیلو با انحراف معیار ۰/۵ کیلو است. اگر یک نمونهٔ تصادفی ۵۰ تایی از نخ‌های ماهی‌گیری دارای میانگین قدرت تحمل ۱۴/۸ کیلوگرم باشد، فرض $\mu = ۱۵$ در مقابل $\mu \neq ۱۵$ را در سطح معنی‌دار ۰/۰۱ آزمون کنید.

حل : آزمون مد نظر از نوع (پ) یعنی $\begin{cases} H_۰ : \mu = ۱۵ \\ H_۱ : \mu \neq ۱۵ \end{cases}$ است که در آن $\mu_۰ = ۱۵$، $\sigma = ۰/۵$، $n = ۵۰$، $\overline{x} = ۱۴/۸$ و $\alpha = ۰/۰۱$ است. بنابراین

$$Z = \frac{\overline{x} - \mu_۰}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{۱۴/۸ - ۱۵}{\frac{۰/۵}{\sqrt{۵۰}}} = -۲/۸۲۸ \quad , \quad z_{۱-\frac{\alpha}{۲}} = z_{۰/۹۹۵} = ۲/۵۷۵$$

چون $۲/۸۲۸ = |Z| > z_{۱-\frac{\alpha}{۲}} = ۲/۵۷۵$ پس فرض $H_۰$ رد می‌شود و چون

$$-۲/۸۲۸ = Z < -Z_{۱-\frac{\alpha}{۲}} = -۲/۵۷۵$$

نتیجه می‌گیریم که میانگین قدرت تحمل نخ‌های ماهی‌گیری ۱۵ نبوده بلکه در واقع کمتر از ۱۵ است.

توجه کنید که فاصله اطمینان ۹۹ درصدی برای μ عبارت است از

$$\mu \in \left(۱۴/۸ - ۲/۵۷۵\frac{۰/۵}{\sqrt{۵۰}}, ۱۴/۸ + ۲/۵۷۵\frac{۰/۵}{\sqrt{۵۰}}\right) = (۱۴/۶۲, ۱۴/۹۸)$$

چون $۱۵ \notin (۱۴/۶۲, ۱۴/۹۸)$ پس فرض $H_۰$ رد می‌شود.

مثال ۱۳.۴ تعداد زیادی از بیماران مبتلا به یک بیماری خاص را گرد آورده و گزارش کرده‌اند که مدت درمان بیماری به روش استاندارد دارای میانگین ۱۵ روز و انحراف معیار ۳ روز است. ادعا شده که یک روش جدید می‌تواند مدت درمان را کوتاهتر کند و انحراف معیار درمان همان ۳ روز است. برای روش جدید درمان را بر روی ۷۰ بیمار آزمایش کرده و میانگین مدت درمان ۱۴ روز شده است. آیا در سطح معنی‌دار ۰/۰۲۵ روش جدید بهتر است؟

Scanned with CamScanner

حل: در این مثال با آزمون $\begin{cases} H_0 : \mu = ۱۵ \\ H_1 : \mu < ۱۵ \end{cases}$ مواجه هستیم، پس فرض H_0 را رد می‌کنیم

در صورتی‌که $Z = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_{1-\alpha}$ از طرفی داریم که

$$\alpha = ۰/۰۲۵ \Longrightarrow z_{1-\alpha} = z_{۰/۹۷۵} = ۱/۹۶$$
$$Z = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{۱۴ - ۱۵}{\frac{۳}{\sqrt{۷۰}}} = -۲/۷۸۹$$

چون $-۱/۹۶ = -z_{1-\alpha} > Z = -۲/۷۸۹$ پس فرض H_0 رد می‌شود، یعنی میانگین مدت درمان روش جدید کمتر است.

۲.۵.۴ مقدار احتمال

در بخش‌های قبل با تعیین سطح معنی‌دار α و تشکیل ناحیهٔ بحرانی، تصمیم به رد یا پذیرش فرض H_0 می‌نمودیم. روش دیگری برای تصمیم‌گیری دربارهٔ رد یا پذیرش فرض H_0 استفاده از مقدار احتمال یا p- مقدار است. برای پی بردن به مفهوم p- مقدار، ابتدا به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱۴.۴ یک کارخانه تولید کننده لامپ‌های روشنایی لامپ‌هایی تولید می‌کند که طول عمر آن‌ها از توزیع نرمال با حد متوسط ۸۰۰ ساعت و انحراف معیار ۴۰ ساعت پیروی می‌کند. یک دستگاه جدید برای تولید لامپ به بازار آمده است و ادعا می‌شود که میانگین طول عمر لامپ‌های تولیدی توسط این دستگاه افزایش یافته است. یک نمونهٔ تصادفی ۳۰ تایی از لامپ‌های تولیدی توسط این دستگاه دارای حد متوسط طول عمر ۸۱۰ ساعت است. این ادعا را در سطح معنی‌دار ۰/۰۵ و ۰/۱ آزمون کنید.

حل: در این مثال با آزمون $\begin{cases} H_0 : \mu = ۸۰۰ \\ H_1 : \mu > ۸۰۰ \end{cases}$ مواجه هستیم پس فرض H_0 را رد می‌کنیم

اگر $Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_{1-\alpha}$ و یا $\overline{X} > c = \mu_0 + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. چون $\mu_0 = ۸۰۰$، $\sigma = ۴۰$، $n = ۳۰$ و $\overline{x} = ۸۱۰$ پس در سطح معنی‌دار $\alpha = ۰/۰۵$ داریم

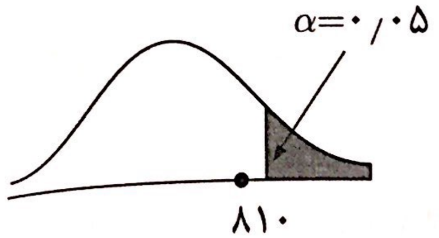
$$z_{1-\alpha} = z_{۰/۹۵} = ۱/۶۴۵ \Longrightarrow c = ۸۰۰ + ۱/۶۴۵\frac{۴۰}{\sqrt{۳۰}} = ۸۱۲/۰۱$$

Scanned with CamScanner

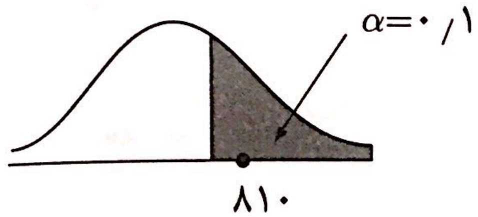
چون $\bar{x}=۸۱۰ \not> c=۸۱۲/۰۱$ پس در سطح معنی‌دار ۰/۰۵ فرض H_0 رد نمی‌شود.
همچنین در سطح معنی‌دار ۰/۱ داریم

$$z_{1-\alpha}=z_{۰/۹}=۲/۳۳ \Longrightarrow c=۸۰۰+۱/۲۸۱\frac{۴۰}{\sqrt{۳۰}}=۸۰۹/۳۶$$

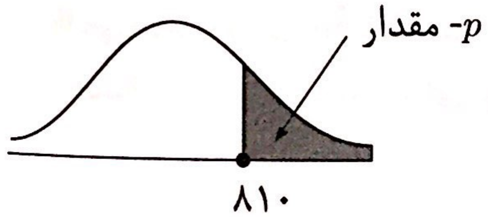
چون $\bar{x}=۸۱۰ > c=۸۰۹/۳۶$ پس در سطح معنی‌دار ۰/۱ فرض H_0 رد می‌شود.
در شکل ۴.۴ ناحیه بحرانی به‌صورت ناحیه هاشور زده شده برای سطح‌های معنی‌دار ۰/۰۵ و ۰/۱ و نقطه $\bar{x}=۸۱۰$ نمایش داده شده است.
همان‌گونه که مشاهده شد فرض H_0 به‌ازای $\alpha=۰/۰۵$ پذیرفته شد ولی به‌ازای $\alpha=۰/۱$ رد شد. در حالت $\alpha=۰/۰۵$ مقدار آمارهٔ آزمون $\bar{x}=۸۱۰$ در ناحیهٔ بحرانی قرار نگرفت و H_0 پذیرفته شد و در حالت $\alpha=۰/۱$ مقدار آمارهٔ آزمون $\bar{x}=۸۱۰$ در ناحیهٔ بحرانی قرار گرفت و H_0 رد شد. حال این سوال مطرح می‌شود که کوچک‌ترین مقداری از α که موجب می‌شود فرض H_0 رد شود چه مقدار است؟ این مقدار را p- مقدار گویند.



ناحیه بحرانی با $\alpha=۰/۰۵$



ناحیه بحرانی با $\alpha=۰/۱$



p- مقدار

شکل ۴.۴: ناحیهٔ بحرانی و p- مقدار

تعریف ۳.۴ کمترین مقداری از سطح معنی‌دار α که مقدار مشاهده شدهٔ آمارهٔ آزمون موجب رد فرض H_0 می‌شود را p- مقدار گویند.

برای مثال در مثال ۱۴.۴ چون ناحیه بحرانی به‌صورت $\overline{X} > c$ است پس p- مقدار به‌صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\begin{aligned} \text{مقدار} - p &= P(\overline{X} > \bar{x} | \mu=\mu_0) = P(\overline{X} > ۸۱۰ | \mu=۸۰۰) \\ &= P\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{۸۱۰-۸۰۰}{\frac{۴۰}{\sqrt{۳۰}}}\right) = P(Z > ۱/۳۷) \\ &= ۱ - P(Z \leq ۱/۳۷) = ۱ - ۰/۹۱۴۷ = ۰/۰۸۵۳ \end{aligned}$$

Scanned with CamScanner

یعنی کمترین مقدار α برای رد فرض H_0، ۰/۰۸۵۳ است و اگر α از این کمتر باشد (برای مثال $\alpha = ۰/۰۵$) فرض H_0 رد می‌شود.

طریقه محاسبه‌ی p- مقدار فرض کنید $T(\boldsymbol{X}) = T(X_1, \cdots, X_n)$ آمارهٔ آزمون و $t = T(x_1, \cdots, x_n)$ مقدار مشاهده شدهٔ آن باشد.

(الف) در آزمون یک طرفهٔ $\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta > \theta_0 \end{cases}$، p- مقدار برابر است با

$$p\text{- مقدار} = P_{\theta=\theta_0}(T(\boldsymbol{X}) > t)$$

(ب) در آزمون یک طرفهٔ $\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta < \theta_0 \end{cases}$، p- مقدار برابر است با

$$p\text{- مقدار} = P_{\theta=\theta_0}(T(\boldsymbol{X}) < t)$$

(پ) در آزمون دو طرفهٔ $\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta \neq \theta_0 \end{cases}$، p- مقدار برابر است با

$$\begin{aligned} p\text{- مقدار} &= ۲\min\{P_{\theta=\theta_0}(T(\boldsymbol{X}) < t), P_{\theta=\theta_0}(T(\boldsymbol{X}) > t)\} \\ &= \begin{cases} ۲P(T(\boldsymbol{X}) < t) & \text{اگر } t < ۰ \\ ۲P(T(\boldsymbol{X}) > t) & \text{اگر } t > ۰ \end{cases} \end{aligned}$$

طریقه انجام آزمون به‌وسیله p- مقدار در انجام یک آزمون آماری اگر $p\text{-مقدار} > ۰/۰۵$ باشد آنگاه فرض H_0 را می‌پذیریم و اگر $p\text{- مقدار} \leq ۰/۰۵$ باشد فرض H_0 را رد می‌کنیم. در نرم‌افزار SPSS، انجام آزمون براساس p- مقدار صورت می‌پذیرد و در خروجی p- مقدار با نماد Sig ظاهر می‌گردد. برای انجام آزمون‌های آماری روی پارامترهای مختلف جامعه با استفاده از نرم‌افزار SPSS به پیوست ب مراجعه کنید.

مثال ۱۵.۴ وزارت کار و امور اجتماعی، مزد روزانه کارگران کارخانه را به‌طور متوسط ۱۳۲۰۰ تومان با انحراف ۲۵۰۰ تومان تعیین نموده است. اگر مدیر کارخانه به ۴۰ کارگر خود روزانه به‌طور متوسط ۱۲۲۰۰ تومان پرداخت نماید، آیا می‌توان این کارخانه را متهم نمود که کمتر از مزد تعیین شدهٔ وزارت کار و امور اجتماعی پرداخت می‌کند؟

Scanned with CamScanner

حل : در این مثال با آزمون $\begin{cases} H_0 : \mu = ۱۳۲۰۰ \\ H_1 : \mu < ۱۳۲۰۰ \end{cases}$ مواجه هستیم که $\mu_0 = ۱۳۲۰۰$، $\overline{x} = ۱۲۲۰۰$، $\sigma = ۲۵۰۰$ و $n = ۴۰$ است. پس

$$\begin{aligned} p\text{-مقدار} &= P_{\mu=۱۳۲۰۰}(\overline{X} < ۱۲۲۰۰) \\ &= P_{\mu=۱۳۲۰۰}\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{۱۲۲۰۰ - ۱۳۲۰۰}{\frac{۲۵۰۰}{\sqrt{۴۰}}}\right) \\ &= P(Z < -۲/۵۳) = ۰/۰۰۵۷ \end{aligned}$$

چون $p\text{-مقدار} = ۰/۰۰۵۷ < ۰/۰۵$ پس فرض H_0 رد می‌شود و می‌توان کارخانه را متهم نمود. همچنین اگر بخواهیم به روش متداول و از طریق سطح معنی‌دار آزمون را انجام دهیم داریم که

$$\alpha = ۰/۰۵ \Longrightarrow z_{1-\alpha} = z_{۰/۹۵} = ۱/۶۴۵$$
$$Z = \frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{۱۲۲۰۰ - ۱۳۲۰۰}{\frac{۲۵۰۰}{\sqrt{۴۰}}} = -۲/۵۳$$

چون $Z = -۲/۵۳ < -۱/۶۴۵ = -z_{1-\alpha}$ پس فرض H_0 رد می‌شود.

۳.۵.۴ تعیین اندازهٔ نمونه

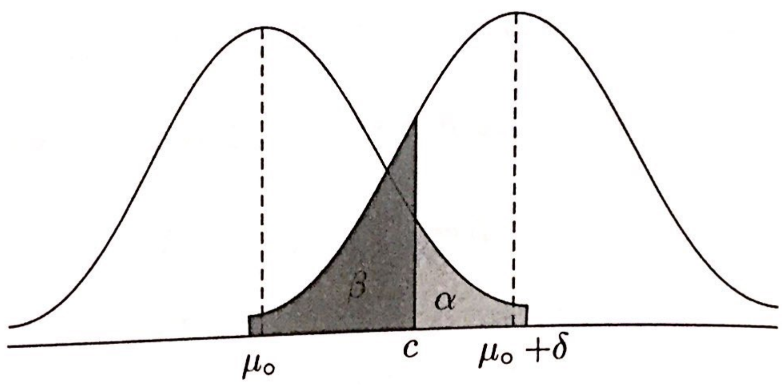
یکی از مسائل مهم در طرح‌ریزی انجام یک آزمون، تعیین اندازهٔ نمونهٔ n قبل از انجام آزمون برای رسیدن به یک حداکثر مقدار خطا است. در آزمون فرض‌های آماری با دو خطای α و β روبرو هستیم، بنابراین با تعیین یک مقدار احتمال مورد انتظار برای خطای نوع اول و دوم α و β می‌خواهیم اندازهٔ نمونهٔ n برای انجام آزمون فرض‌های آماری را به‌دست آوریم.

برای این منظور فرض کنید بخواهیم آزمون فرض‌های $\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$ را انجام دهیم. در این حالت ناحیهٔ بحرانی به‌صورت $\overline{X} > c$ است که در آن

$$\alpha = P(\overline{X} > \mu_0 | \mu = \mu_0) = P\left(\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{c-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \middle| \mu = \mu_0\right) = P\left(Z > \frac{c-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

پس $\frac{c-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = z_{1-\alpha}$. از طرفی احتمال خطای نوع دوم در یک نقطهٔ $\mu_1 = \mu_0 + \delta$ عبارت

است از (به شکل ۵.۴ توجه کنید)



شکل ۵.۴: تعیین اندازهٔ نمونه

$$\begin{aligned}\beta &= P(\overline{X} \leq c|\mu = \mu_1) = P\left(\frac{\overline{X} - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{c - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}\middle|\mu = \mu_1\right)\\ &= P\left(Z \leq \frac{c - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = P\left(Z \leq \frac{c - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} - \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)\\ &= P\left(Z \leq z_{1-\alpha} - \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)\end{aligned}$$

در نتیجه

$$z_\beta = z_{1-\alpha} - \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = -z_\alpha - \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

یا

$$n = \frac{(z_\alpha + z_\beta)^2\sigma^2}{(\mu_1 - \mu_0)^2} \tag{7.4}$$

برای آزمون فرض‌های $\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases}$ نیز با همان عملیات بالا می‌توان نشان داد که اندازهٔ نمونهٔ n در (۷.۴) صدق می‌کند. همچنین برای آزمون فرض دو طرفهٔ $\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$ با همان عملیات بالا می‌توان نشان داد که اندازهٔ نمونه در رابطهٔ زیر صدق می‌کند.

$$n = \frac{(z_{\frac{\alpha}{2}} + z_\beta)^2\sigma^2}{(\mu_1 - \mu_0)^2} \tag{8.4}$$

در صورتی که در رابطه‌های (۷.۴) و (۸.۴) مقدار σ^2 را ندانیم، با انجام یک نمونه مقدماتی و جایگزینی σ^2 با s^2 نمونهٔ مقدماتی و یا از اطلاعات قبلی مقداری را برای σ^2 به‌دست آورده و در این رابطه قرار می‌دهیم.

Scanned with CamScanner

مثال ۱۶.۴ در مثال ۱۳.۴ فرض کنید بخواهیم احتمال خطای نوع اول $\alpha = ۰/۰۲۵$ و احتمال خطای نوع دوم در $\mu_۱ = ۱۴$ برابر $\beta = ۰/۰۵$ شود. اندازهٔ نمونه را تعیین کنید.

حل : در مثال ۱۳.۴ داشتیم که $\mu_۰ = ۱۵$، $\sigma = ۳$، بنابراین با استفاده از (۷.۴) داریم

$$\alpha = ۰/۰۲۵ \Longrightarrow z_{۰/۰۲۵} = -۱/۹۶$$

$$\beta = ۰/۰۵ \Longrightarrow z_{۰/۰۵} = -۱/۶۴۵$$

$$n = \frac{(-۱/۹۶ - ۱/۶۴۵)^۲ ۳^۲}{(۱۵ - ۱۴)^۲} = ۱۱۶/۹۶$$

پس اندازهٔ نمونهٔ $n = ۱۱۷$ را در نظر می‌گیریم.

۴.۵.۴ آزمون روی میانگین جامعه با نامعلوم بودن واریانس

فرض کنید از یک جامعهٔ نرمال با میانگین نامعلوم μ و واریانس نامعلوم $\sigma^۲$ یک نمونهٔ تصادفی به اندازهٔ n انتخاب کرده باشیم و بخواهیم آزمون‌هایی روی میانگین جامعه μ انجام دهیم.

در آزمون فرض $\begin{cases} H_۰ : \mu = \mu_۰ \\ H_۱ : \mu > \mu_۰ \end{cases}$ ناحیهٔ بحرانی به‌صورت $\overline{X} > c$ است که در آن c به‌گونه‌ای تعیین می‌شود که سطح معنی‌دار آزمون برابر مقدار مشخص شدهٔ α باشد، یعنی

$$\alpha = P(\overline{X} > c | \mu = \mu_۰)$$

حال با استفاده از (۵.۲) داریم که $T = \dfrac{\overline{X} - \mu_۰}{S/\sqrt{n}} \sim t_{(n-۱)}$ و در نتیجه برای تعیین مقدار c داریم

$$\alpha = P\left(\frac{\overline{X} - \mu_۰}{S/\sqrt{n}} > \frac{c - \mu_۰}{S/\sqrt{n}} \middle| \mu = \mu_۰\right) = P\left(t_{(n-۱)} > \frac{c - \mu_۰}{S/\sqrt{n}}\right)$$

بنابراین $\dfrac{c - \mu_۰}{S/\sqrt{n}} = t_{۱-\alpha}(n-۱)$ یا $c = \mu_۰ + t_{۱-\alpha}(n-۱)\dfrac{S}{\sqrt{n}}$. بنابراین ناحیهٔ بحرانی آزمون به‌صورت $\overline{X} > \mu_۰ + t_{۱-\alpha}(n-۱)\dfrac{S}{\sqrt{n}}$ یا به‌صورت زیر است

$$\frac{\overline{X} - \mu_۰}{S/\sqrt{n}} > t_{۱-\alpha}(n-۱) \tag{۹.۴}$$

توجه کنید که اگر فرض $H_۰$ به‌صورت $H_۰ : \mu \leq \mu_۰$ باشد آنگاه می‌توان نشان داد که ناحیهٔ بحرانی هنوز به‌صورت (۹.۴) است.

Scanned with CamScanner

به همین ترتیب با انجام عملیات مشابه بخش ۱.۵.۴ می‌توان نشان داد که در انجام آزمون فرض $\begin{cases} H_\circ : \mu = \mu_\circ \\ H_\backprime : \mu < \mu_\circ \end{cases}$ یا $\begin{cases} H_\circ : \mu \geq \mu_\circ \\ H_\backprime : \mu < \mu_\circ \end{cases}$ ناحیهٔ بحرانی آزمون به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\frac{\overline{X} - \mu_\circ}{S/\sqrt{n}} < -t_{\backprime-\alpha}(n-\backprime) \tag{۱۰.۴}$$

همچنین در آزمون فرض $\begin{cases} H_\circ : \mu = \mu_\circ \\ H_\backprime : \mu \neq \mu_\circ \end{cases}$ ناحیهٔ بحرانی آزمون به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\left|\frac{\overline{X} - \mu_\circ}{S/\sqrt{n}}\right| > t_{\backprime-\frac{\alpha}{۲}}(n-\backprime) \tag{۱۱.۴}$$

توجه شود که اگر $n < ۳۰$ باشد و توزیع جامعه به‌صورت زنگی شکل (همانند توزیع نرمال) باشد، باز هم می‌توان از ناحیه‌های بحرانی بالا برای انجام آزمون فرض روی میانگین جامعه استفاده نمود. آزمون‌های آماری و ناحیه‌های بحرانی به‌دست آمده در بالا و بخش ۱.۵.۴ به‌طور خلاصه در جدول ۱.۴ آورده شده‌اند.

توجه کنید که در آزمون فرض $\begin{cases} H_\circ : \mu = \mu_\circ \\ H_\backprime : \mu \neq \mu_\circ \end{cases}$ متمم ناحیهٔ بحرانی (۱۱.۴) یعنی

$$-t_{\backprime-\alpha}(n-\backprime) < \frac{\overline{X} - \mu_\circ}{S/\sqrt{n}} < t_{\backprime-\alpha}(n-\backprime)$$ یا

$$\overline{X} - t_{\backprime-\alpha}(n-\backprime)\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu_\circ < \overline{X} + t_{\backprime-\alpha}(n-\backprime)\frac{S}{\sqrt{n}}$$

که ناحیهٔ پذیرش فرض $H_\circ$ است، همان فاصلهٔ اطمینان $۱۰۰(۱-\alpha)\%$ برای μ است. بنابراین اگر $\mu_\circ$ در داخل فاصلهٔ اطمینان $۱۰۰(۱-\alpha)\%$ قرار گیرد فرض $H_\circ$ پذیرفته و در غیر این‌صورت رد می‌شود. همچنین همانند بخش ۲.۵.۴ می‌توان براساس p- مقدار نیز آزمون فرض‌های آماری را انجام داد.

Scanned with CamScanner

جدول ۱.۴: آزمون‌های آماری روی میانگین یک جامعهٔ نرمال

شماره آزمون	H_0	H_1	آماره آزمون	ناحیه بحرانی
۱	$\mu = \mu_0$ یا $\mu \le \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$، σ معلوم	$Z > z_{1-\alpha}$
۲	$\mu = \mu_0$ یا $\mu \ge \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$، σ معلوم	$Z < -z_{1-\alpha}$
۳	$\mu = \mu_0$	$\mu \ne \mu_0$	$Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$، σ معلوم	$\lvert Z\rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$
۴	$\mu = \mu_0$ یا $\mu \le \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$، σ نامعلوم	$T > t_{1-\alpha}(n-1)$
۵	$\mu = \mu_0$ یا $\mu \ge \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$، σ نامعلوم	$T < -t_{1-\alpha}(n-1)$
۶	$\mu = \mu_0$	$\mu \ne \mu_0$	$T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$، σ نامعلوم	$\lvert T\rvert > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

مثال ۱۷.۴ نمونه‌ای تصادفی از پرونده‌های فراوان شرکتی نشان می‌دهد که سفارش‌ها برای قطعهٔ معینی از ماشین‌ها به‌ترتیب ۱۰، ۱۲، ۱۹، ۱۴، ۱۵، ۱۸، ۱۱ و ۱۳ روز بایگانی شده است. اگر تعداد روزهای بایگانی از توزیع نرمال پیروی کند، آیا در سطح معنی‌دار ۰/۰۱ می‌توان ادعا کرد که میانگین زمان بایگانی چنین سفارش‌هایی از ۱۰/۵ روز بیشتر است؟

حل : در این مثال با آزمون فرض $\begin{cases} H_0 : \mu = 10/5 \\ H_1 : \mu > 10/5 \end{cases}$ مواجه هستیم که در آن σ^2 نامعلوم است. بنابراین از آزمون شمارهٔ ۴ جدول ۱.۴ استفاده می‌کنیم. از داده‌ها به‌دست می‌آوریم که $n = 8$، $\sum_{i=1}^{8} x_i = 112$ و $\sum_{i=1}^{8} x_i^2 = 1640$ بنابراین

$$\overline{x} = \frac{112}{8} = 14, \qquad s^2 = \frac{1}{7}\left[1640 - \frac{(112)^2}{8}\right] = 10/286$$

$$\alpha = 0/01 \Longrightarrow t_{1-\alpha}(n-1) = t_{0/99}(7) = 3/0$$

Scanned with CamScanner

$$T=\frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}=\frac{۱۴-۱۰/۵}{\sqrt{\frac{۱۰/۲۸۶}{۸}}}=۳/۰۸۷$$

چون $۳/۰ = t_{۱-\alpha}(n-۱) < T = ۳/۰۸۷$ پس فرض H_0 رد می‌شود، یعنی میانگین زمان بایگانی بیش از ۱۰/۵ روز است همچنین p- مقدار این آزمون برابر است با

$$\begin{aligned}
p\text{- مقدار} &= P_{\mu=\mu_0}(\overline{X}>\overline{x})=P_{\mu=۱۰/۵}(\overline{X}>۱۴)\\
&= P\left(\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}>\frac{۱۴-۱۰/۵}{\sqrt{\frac{۱۰/۲۸۶}{۸}}}\right)=P(Z>۳/۰۸۷)\\
&= ۱-P(Z\leq ۳/۰۸۷)=۱-۰/۹۹۹=۰/۰۰۱
\end{aligned}$$

چون $۰/۰۱ > ۰/۰۰۱ = p$- مقدار، پس فرض H_0 رد می‌شود.

مثال ۱۸.۴ یک تولید کنندهٔ بستنی ادعا دارد که محصولش در هر لیوان به‌طور متوسط ۵۰۰ کالری دارد. برای آزمون این ادعا، نمونه‌ای تصادفی ۲۵ تایی از لیوان‌های بستنی انتخاب کرده و مشاهده می‌کنیم که $\overline{x}=۵۱۰$ و $s=۲۳$ است. ادعای این شخص را در سطح معنی‌دار ۰/۰۵ به سه روش بررسی کنید.

حل: در این مثال با آزمون فرض $\begin{cases}H_0:\mu=۵۰۰\\ H_1:\mu\neq ۵۰۰\end{cases}$ با σ^2 نامعلوم مواجه هستیم، پس از آزمون ۶ جدول ۱.۴ استفاده می‌کنیم.

$$T=\frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}=\frac{۵۱۰-۵۰۰}{\frac{۲۳}{\sqrt{۲۵}}}=۲/۱۷\quad,\quad t_{۱-\frac{\alpha}{۲}}(n-۱)=t_{۰/۹۷۵}(۲۴)=۲/۰۶$$

چون $t_{۱-\frac{\alpha}{۲}}(n-۱)=۲/۰۶ < |T| = ۲/۱۷$ پس فرض H_0 رد می‌شود. یعنی ادعای تولید کننده بستنی صحیح نیست. این آزمون را می‌توان با استفاده از فاصلهٔ اطمینان نیز به‌صورت زیر انجام داد

$$\begin{aligned}
\mu_0 &\in \left(\overline{x}-t_{۱-\frac{\alpha}{۲}}(n-۱)\frac{s}{\sqrt{n}},\overline{x}+t_{۱-\frac{\alpha}{۲}}(n-۱)\frac{s}{\sqrt{n}}\right)\\
&= \left(۵۱۰-۲/۰۶\frac{۲۳}{\sqrt{۲۵}},۵۱۰+۲/۰۶\frac{۲۳}{\sqrt{۲۵}}\right)=(۵۰۰/۵۲۴,۵۱۹/۴۷۶)
\end{aligned}$$

Scanned with CamScanner

چون $\mu_\circ = ۵۰۰ \notin (۵۰۰/۵۲۴, ۵۱۹/۴۷۶)$ پس فرض $H_\circ$ رد می‌شود. همچنین p-مقدار این آزمون برابر است با

$$
\begin{aligned}
p\text{- مقدار} &= ۲P_{\mu=\mu_\circ}(\overline{X} > \overline{x}) = ۲P_{\mu=۵۰۰}(\overline{X} > ۵۱۰) \\
&= ۲P\left(t_{(n-۱)} > \frac{۵۱۰ - ۵۰۰}{\frac{۲۳}{\sqrt{۲۵}}}\right) = ۲P(t_{(۲۴)} > ۲/۱۷) \\
&= ۲[۱ - P(t_{(۲۴)} < ۲/۱۷)] = ۲[۱ - ۰/۹۷۹] = ۲(۰/۰۲۱) = ۰/۰۴۲
\end{aligned}
$$

چون $۰/۰۵ > ۰/۰۴۲ = p$- مقدار، پس فرض $H_\circ$ رد می‌شود.

۵.۵.۴ آزمون روی واریانس جامعه

فرض کنید از یک جامعهٔ نرمال با میانگین نامعلوم μ و واریانس نامعلوم $\sigma^۲$ نمونهٔ تصادفی $X_۱, X_۲, \cdots, X_n$ به اندازهٔ n انتخاب کرده باشیم و بخواهیم آزمون‌هایی روی واریانس جامعه $\sigma^۲$ انجام دهیم. برای این منظور سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

(الف) در آزمون فرض $\begin{cases} H_\circ : \sigma^۲ = \sigma_\circ^۲ \\ H_۱ : \sigma^۲ > \sigma_\circ^۲ \end{cases}$ که در آن $\sigma_\circ$ مقداری ثابت است، $S^۲$ برآوردگری مناسب برای $\sigma^۲$ بود و ناحیهٔ بحرانی با توجه به بخش ۴.۴ به‌صورت $S^۲ > c$ است که در آن c به‌گونه‌ای تعیین می‌شود که سطح معنی‌دار آزمون α باشد، یعنی $\alpha = P(S^۲ > c|\sigma^۲ = \sigma_\circ^۲)$. از قضیهٔ ۴.۲.ب داریم $\frac{(n-۱)S^۲}{\sigma^۲} \sim \chi^۲_{(n-۱)}$، بنابراین

$$\alpha = P\left(\frac{(n-۱)S^۲}{\sigma^۲} > \frac{(n-۱)c}{\sigma_\circ^۲}\middle|\sigma^۲ = \sigma_\circ^۲\right) = P\left(\chi^۲_{(n-۱)} > \frac{(n-۱)c}{\sigma_\circ^۲}\right)$$

پس $\frac{(n-۱)c}{\sigma_\circ^۲} = \chi^۲_{۱-\alpha}(n-۱)$ یا $c = \frac{\sigma_\circ^۲}{n-۱}\chi^۲_{۱-\alpha}(n-۱)$. بنابراین ناحیهٔ بحرانی به‌صورت $S^۲ > \frac{\sigma_\circ^۲}{n-۱}\chi^۲_{۱-\alpha}(n-۱)$ یا به‌صورت زیر است

$$X^۲ = \frac{(n-۱)S^۲}{\sigma^۲} > \chi^۲_{۱-\alpha}(n-۱) \qquad (۱۲.۴)$$

توجه کنید که اگر فرض $H_\circ$ به‌صورت $H_\circ : \sigma^۲ \leq \sigma_\circ^۲$ باشد آنگاه می‌توان نشان داد که ناحیهٔ بحرانی هنوز به‌صورت (۱۲.۴) است.

Scanned with CamScanner

(ب) در آزمون فرض $\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2 \end{cases}$ ناحیهٔ بحرانی به‌صورت $S^2 < c$ است و همانند حالت (الف) می‌توان نشان داد که ناحیهٔ بحرانی آزمون به‌صورت زیر به‌دست می‌آید (اثبات به‌عنوان تمرین)

$$X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_\alpha(n-1) \tag{۱۳.۴}$$

همچنین اگر فرض H_0 به‌صورت $H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2$ باشد آنگاه ناحیهٔ بحرانی هنوز به‌صورت (۱۳.۴) است.

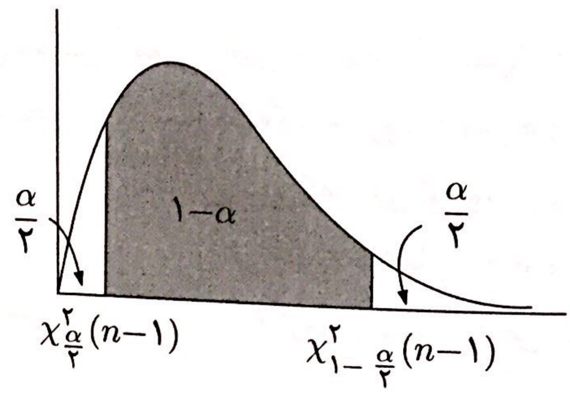
(پ) در آزمون فرض $\begin{cases} H_0 : \sigma = \sigma_0 \\ H_1 : \sigma \neq \sigma_0 \end{cases}$ با استفاده از بخش ۴.۴ ناحیهٔ بحرانی به‌صورت $S^2 < c_1$ یا $S^2 > c_2$ است که در آن $\alpha = P_{\sigma^2=\sigma_0^2}(S^2 < c_1$ یا $S^2 > c_2)$ است. در نتیجه

$$\begin{aligned} \alpha &= P_{\sigma^2=\sigma_0^2}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \frac{(n-1)c_1}{\sigma_0^2} \text{ یا } \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > \frac{(n-1)c_2}{\sigma_0^2}\right) \\ &= P\left(\chi^2_{(n-1)} < \frac{(n-1)c_1}{\sigma_0^2} \text{ یا } \chi^2_{(n-1)} > \frac{(n-1)c_2}{\sigma_0^2}\right) \end{aligned}$$

پس

$$1-\alpha = P\left(\frac{(n-1)c_1}{\sigma_0^2} < \chi^2_{(n-1)} < \frac{(n-1)c_2}{\sigma_0^2}\right)$$

با توجه به شکل ۶.۴ نتیجه می‌شود که



شکل ۶.۴: نمودار توزیع خی‌دو

$$\frac{(n-1)c_1}{\sigma_0^2} = \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \quad , \quad \frac{(n-1)c_2}{\sigma_0^2} = \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

یا

$$c_1 = \frac{\sigma_0^2}{n-1}\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \quad , \quad c_2 = \frac{\sigma_0^2}{n-1}\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

Scanned with CamScanner

در نتیجه ناحیهٔ بحرانی آزمون به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$X^{۲} = \frac{(n-۱)S^{۲}}{\sigma_{\circ}^{۲}} > \chi^{۲}_{۱-\frac{\alpha}{۲}}(n-۱) \quad \text{یا} \quad X^{۲} = \frac{(n-۱)S^{۲}}{\sigma_{\circ}^{۲}} < \chi^{۲}_{\frac{\alpha}{۲}}(n-۱) \qquad (۱۴.۴)$$

در جدول ۲.۴ آزمون‌های آماری و ناحیه‌های بحرانی به‌دست آمده در مورد واریانس جامعه خلاصه شده است.

نکته ۱.۴ اگر میانگین جامعه μ معلوم باشد آنگاه در جدول ۲.۴ از $S_{\mu}^{۲} = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}(X_i-\mu)^{۲}$ استفاده می‌کنیم و در این حالت درجهٔ آزادی $n-۱$ به n تبدیل می‌شود.

جدول ۲.۴: آزمون‌های آماری روی واریانس جامعهٔ نرمال

شماره آزمون	$H_{\circ}$	$H_{۱}$	آماره آزمون	ناحیه بحرانی
۷	$\sigma^{۲} = \sigma_{\circ}^{۲}$ یا $\sigma^{۲} \leq \sigma_{\circ}^{۲}$	$\sigma^{۲} > \sigma_{\circ}^{۲}$	$X^{۲} = \frac{(n-۱)S^{۲}}{\sigma_{\circ}^{۲}}$	$X^{۲} > \chi^{۲}_{۱-\alpha}(n-۱)$
۸	$\sigma^{۲} = \sigma_{\circ}^{۲}$ یا $\sigma^{۲} \geq \sigma_{\circ}^{۲}$	$\sigma^{۲} < \sigma_{\circ}^{۲}$	$X^{۲} = \frac{(n-۱)S^{۲}}{\sigma_{\circ}^{۲}}$	$X^{۲} < \chi^{۲}_{\alpha}(n-۱)$
۹	$\sigma^{۲} = \sigma_{\circ}^{۲}$	$\sigma^{۲} \neq \sigma_{\circ}^{۲}$	$X^{۲} = \frac{(n-۱)S^{۲}}{\sigma_{\circ}^{۲}}$	$X^{۲} > \chi^{۲}_{۱-\frac{\alpha}{۲}}(n-۱)$ یا $X^{۲} < \chi^{۲}_{\frac{\alpha}{۲}}(n-۱)$

مثال ۱۹.۴ یک مدرس ریاضی آزمون ریاضی جدیدی را پیشنهاد داده است که برای تعیین میزان دانش ریاضی دانشجویان تازه وارد به‌کار می‌رود. آزمون‌های قدیمی دارای واریانس حداقل ۱۰۰ هستند و این مدرس ادعا می کند که روش او موثر بوده است (یعنی واریانس را کاهش داده است). اگر ۲۰ دانشجو به روش جدید امتحان دهند و نمره‌های زیر را بیاورند، ادعای این مدرس را در سطح معنی‌دار ۰/۰۵ آزمون کنید؟ (فرض کنید نمره‌ها دارای توزیع نرمال هستند)

۶۷	۷۵	۹۲	۴۸	۵۲	۹۱	۶۴	۷۳	۸۰	۷۰
۸۹	۶۸	۵۳	۹۰	۵۰	۷۵	۶۵	۷۰	۵۰	۸۸

Scanned with CamScanner

حل : در این مثال با آزمون فرض $\begin{cases} H_0 : \sigma^2 \geq 500 \\ H_1 : \sigma^2 < 500 \end{cases}$ مواجه هستیم. پس از آزمون ۸ جدول ۲.۴ استفاده می‌کنیم از داده‌ها به‌دست می‌آوریم که

$$\sum_{i=1}^{20} x_i = 1410 \quad , \quad \sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 103540$$

و در نتیجه $s^2 = 217/63$. از طرفی

$$\alpha = 0/05 \Longrightarrow \chi^2_\alpha(n-1) = \chi^2_{0/05}(19) = 10/1$$

$$X^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{19(217/63)}{100} = 41/35$$

چون $10/1 = (n-1)\chi^2_\alpha \not< X^2 = 41/35$ پس فرض H_0 رد نمی‌شود و روش جدید واریانس را کاهش نمی‌دهد.

مثال ۲۰.۴ یک تولید کنندهٔ قطعه‌های پیش ساخته مدعی است که انحراف معیار مقاومت محصولات او برابر ۱۰ کیلوگرم بر سانتیمتر مربع است. یک نمونهٔ تصادفی ۱۰ تایی از این محصولات نتایج $\overline{x} = 312$ و $s^2 = 195$ را به‌دست داده است. اگر اندازهٔ مقاومت این محصولات دارای توزیع نرمال باشند، آیا نتایج به‌دست آمده با ادعای تولید کننده سازگار است؟ سطح معنی‌دار را ۰/۰۵ بگیرید.

حل : در این مثال با آزمون $\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = 100 \\ H_1 : \sigma^2 \neq 100 \end{cases}$ مواجه هستیم بنابراین از آزمون شماره ۹ جدول ۲.۴ استفاده می‌کنیم. در نتیجه

$$X^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{9(195)}{100} = 17/55$$

$$\alpha = 0/05 \Longrightarrow \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = \chi^2_{0/025}(9) = 2/70$$

$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) = \chi^2_{0/975}(9) = 19/0$$

چون $2/70 = (n-1)\chi^2_{\frac{\alpha}{2}} \not< X^2 = 17/55$ و $19/0 = (n-1)\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \not> X^2 = 17/55$ پس فرض H_0 رد نمی‌شود یعنی نتایج با ادعای تولید کننده سازگار است.

Scanned with CamScanner

توجه کنید که در این مثال p- مقدار به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned} P_{\sigma^۲=\sigma_۰^۲}(S^۲ < s^۲) &= P_{\sigma^۲=\sigma_۰^۲}\left(\frac{(n-۱)S^۲}{\sigma^۲} < \frac{۹(۱۹۵)}{۱۰۰}\right) \\ &= P(\chi^۲_{(۹)} < ۱۷/۵۵) \simeq ۰/۹۵۸ \\ \text{مقدار } p\text{-} &= ۲\min\left\{P_{\sigma^۲=\sigma_۰^۲}(S^۲ < s^۲), P_{\sigma^۲=\sigma_۰^۲}(S^۲ > s^۲)\right\} \\ &= ۲\min(۰/۹۵۸, ۱-۰/۹۵۸) = ۲(۰/۰۴۲) = ۰/۰۸۴ \end{aligned}$$

چون $۰/۰۵ < ۰/۰۸۴ = p$- مقدار، پس فرض $H_۰$ رد نمی‌شود.

۶.۵.۴ آزمون روی تفاضل میانگین دو جامعه

فرض کنید دو جامعه داریم که جامعهٔ اول دارای میانگین $\mu_۱$ و واریانس $\sigma_۱^۲$ و جامعهٔ دوم دارای میانگین $\mu_۲$ و واریانس $\sigma_۲^۲$ باشند. دو نمونهٔ تصادفی به اندازه‌های $n_۱$ و $n_۲$ به‌ترتیب از این دو جامعه انتخاب کرده و میانگین نمونه‌ها را با $\overline{X}_۱$ و $\overline{X}_۲$ و واریانس نمونه‌ها را با $S_۱^۲$ و $S_۲^۲$ نمایش می‌دهیم. فرض کنید این دو نمونهٔ تصادفی از یکدیگر مستقل باشند. می‌خواهیم آزمون‌هایی روی تفاضل میانگین دو جامعه یعنی $\mu_۱ - \mu_۲$ انجام دهیم. برای این منظور بستگی به معلوم یا نامعلوم بودن واریانس‌های $\sigma_۱^۲$ و $\sigma_۲^۲$ سه حالت مختلف را در زیر بررسی می‌کنیم.

(الف) واریانس دو جامعه معلوم باشد

در این حالت $\sigma_۱^۲$ و $\sigma_۲^۲$ معلوم هستند. حال اگر دو جامعه نرمال باشند یا اینکه $n_۱ \geq ۳۰$ و $n_۲ \geq ۳۰$ آنگاه از (۶.۲) داریم که $Z = \dfrac{(\overline{X}_۱ - \overline{X}_۲) - (\mu_۱ - \mu_۲)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_۱^۲}{n_۱} + \dfrac{\sigma_۲^۲}{n_۲}}} \sim N(۰, ۱)$. حال سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

در آزمون $\begin{cases} H_۰ : \mu_۱ - \mu_۲ = d_۰ \\ H_۱ : \mu_۱ - \mu_۲ > d_۰ \end{cases}$ ناحیهٔ بحرانی به‌صورت $\overline{X}_۱ - \overline{X}_۲ > c$ است که در آن

$$\alpha = P(\overline{X}_۱ - \overline{X}_۲ > c | \mu_۱ - \mu_۲ = d_۰)$$

Scanned with CamScanner

$$= P\left(\frac{(\overline{X}_۱ - \overline{X}_۲) - (\mu_۱ - \mu_۲)}{\sqrt{\frac{\sigma_۱^۲}{n_۱} + \frac{\sigma_۲^۲}{n_۲}}} > \frac{c - d_۰}{\sqrt{\frac{\sigma_۱^۲}{n_۱} + \frac{\sigma_۲^۲}{n_۲}}} \middle| \mu_۱ - \mu_۲ = d_۰\right)$$

$$= P\left(Z > \frac{c - d_۰}{\sqrt{\frac{\sigma_۱^۲}{n_۱} + \frac{\sigma_۲^۲}{n_۲}}}\right)$$

بنابراین $\frac{c - d_۰}{\sqrt{\frac{\sigma_۱^۲}{n_۱} + \frac{\sigma_۲^۲}{n_۲}}} = z_{۱-\alpha}$ و یا $c = d_۰ + z_{۱-\alpha}\sqrt{\frac{\sigma_۱^۲}{n_۱} + \frac{\sigma_۲^۲}{n_۲}}$. در نتیجه ناحیهٔ بحرانی به‌صورت

$$\overline{X}_۱ - \overline{X}_۲ > d_۰ + z_{۱-\alpha}\sqrt{\frac{\sigma_۱^۲}{n_۱} + \frac{\sigma_۲^۲}{n_۲}}$$

و یا به‌صورت

$$Z = \frac{(\overline{X}_۱ - \overline{X}_۲) - d_۰}{\sqrt{\frac{\sigma_۱^۲}{n_۱} + \frac{\sigma_۲^۲}{n_۲}}} > z_{۱-\alpha} \qquad (۱۵.۴)$$

است. توجه کنید که اگر $H_۰$ به‌صورت $H_۰ : \mu_۱ - \mu_۲ \leq d_۰$ باشد آنگاه می‌توان نشان داد که ناحیه بحرانی آزمون هنوز به‌صورت (۱۵.۴) است. به همین ترتیب می‌توان نشان داد که در آزمون فرض $\begin{cases} H_۰ : \mu_۱ - \mu_۲ = d_۰ \\ H_۱ : \mu_۱ - \mu_۲ < d_۰ \end{cases}$ یا $\begin{cases} H_۰ : \mu_۱ - \mu_۲ \geq d_۰ \\ H_۱ : \mu_۱ - \mu_۲ < d_۰ \end{cases}$ ناحیهٔ بحرانی آزمون به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$Z = \frac{(\overline{X}_۱ - \overline{X}_۲) - d_۰}{\sqrt{\frac{\sigma_۱^۲}{n_۱} + \frac{\sigma_۲^۲}{n_۲}}} < -z_{۱-\alpha} \qquad (۱۶.۴)$$

همچنین در آزمون فرض $\begin{cases} H_۰ : \mu_۱ - \mu_۲ = d_۰ \\ H_۱ : \mu_۱ - \mu_۲ \neq d_۰ \end{cases}$ با روشی مشابه حالت (پ) بخش ۱.۵.۴ می‌توان نشان داد که ناحیهٔ بحرانی آزمون به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

Scanned with CamScanner

جدول ۳.۴: آزمون‌های آماری روی تفاضل میانگین‌های دو جامعهٔ نرمال

شماره آزمون	H_0	H_1	آماره آزمون	ناحیه بحرانی
۱۰	$\mu_1 - \mu_2 = d_0$ یا $\mu_1 - \mu_2 \leq d_0$	$\mu_1 - \mu_2 > d_0$	$Z = \dfrac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - d_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ σ_1^2, σ_2^2 معلوم	$Z > z_{1-\alpha}$
۱۱	$\mu_1 - \mu_2 = d_0$ یا $\mu_1 - \mu_2 \geq d_0$	$\mu_1 - \mu_2 < d_0$	$Z = \dfrac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - d_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ σ_1^2, σ_2^2 معلوم	$Z < -z_{1-\alpha}$
۱۲	$\mu_1 - \mu_2 = d_0$	$\mu_1 - \mu_2 \neq d_0$	$Z = \dfrac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - d_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ σ_1^2, σ_2^2 معلوم	$\|Z\| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$
۱۳	$\mu_1 - \mu_2 = d_0$ یا $\mu_1 - \mu_2 \leq d_0$	$\mu_1 - \mu_2 > d_0$	$T = \dfrac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - d_0}{S_p\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$ $\sigma_1 = \sigma_2$ نامعلوم	$T > t_{1-\alpha}(n_1 + n_2 - 2)$
۱۴	$\mu_1 - \mu_2 = d_0$ یا $\mu_1 - \mu_2 \geq d_0$	$\mu_1 - \mu_2 < d_0$	$T = \dfrac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - d_0}{S_p\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$ $\sigma_1 = \sigma_2$ نامعلوم	$T < -t_{1-\alpha}(n_1 + n_2 - 2)$
۱۵	$\mu_1 - \mu_2 = d_0$	$\mu_1 - \mu_2 \neq d_0$	$T = \dfrac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - d_0}{S_p\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$ $\sigma_1 = \sigma_2$ نامعلوم	$\|T\| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2)$
۱۶	$\mu_1 - \mu_2 = do$ $\mu_1 - \mu_2 \leq do$	$\mu_1 - \mu_2 > do$	$T = \dfrac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - d_0}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}}$ $\sigma_1^2\ ,\ \sigma_2^2$ نامعلوم	$T > t_{1-\alpha}(\nu)$
۱۷	$\mu_1 - \mu_2 = do$ $\mu_1 - \mu_2 \geq do$	$\mu_1 - \mu_2 < do$	$T = \dfrac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - d_0}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}}$ $\sigma_1^2\ ,\ \sigma_2^2$ نامعلوم	$T < -t_{1-\alpha}(\nu)$
۱۸	$\mu_1 - \mu_2 = do$	$\mu_1 - \mu_2 \neq do$	$T = \dfrac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - d_0}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}}$ $\sigma_1^2\ ,\ \sigma_2^2$ نامعلوم	$\|T\| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu)$

Scanned with CamScanner

$$|Z| = \left| \frac{(\overline{X}_۱ - \overline{X}_۲) - d_۰}{\sqrt{\frac{\sigma_۱^۲}{n_۱} + \frac{\sigma_۲^۲}{n_۲}}} \right| > z_{۱-\frac{\alpha}{۲}} \quad (۱۷.۴)$$

ناحیه‌های بحرانی به‌دست آمده در (۱۵.۴)، (۱۶.۴) و (۱۷.۴) و آزمون‌های مربوطه در جدول ۳.۴ خلاصه شده‌اند.

مثال ۲۱.۴ یک نمونهٔ تصادفی به اندازهٔ ۳۶ از یک جامعه با انحراف معیار ۵/۲ دارای میانگین ۸۱ است. یک نمونهٔ تصادفی دیگر به اندازهٔ ۴۹ از یک جامعهٔ دیگر با انحراف معیار ۳/۴ دارای میانگین ۷۶ است. آیا در سطح معنی‌دار ۰/۰۶ میانگین این دو جامعه با هم برابر است؟

حل : در این مثال با آزمون فرض $\begin{cases} H_۰ : \mu_۱ = \mu_۲ \\ H_۱ : \mu_۱ \neq \mu_۲ \end{cases}$ مواجه هستیم که واریانس‌ها معلوم هستند بنابراین از آزمون شمارهٔ ۱۲ جدول ۳.۴ با $d_۰ = ۰$ استفاده می کنیم. از اطلاعات مسئله داریم که

$$n_۱ = ۳۶\,, \quad \sigma_۱ = ۵/۲\,, \quad \overline{x}_۱ = ۸۱$$
$$n_۲ = ۴۹\,, \quad \sigma_۲ = ۳/۴\,, \quad \overline{x}_۲ = ۷۶$$

بنابراین

$$Z = \frac{(\overline{x}_۱ - \overline{x}_۲) - d_۰}{\sqrt{\frac{\sigma_۱^۲}{n_۲} + \frac{\sigma_۲^۲}{n_۲}}} = \frac{۸۱ - ۷۶ - ۰}{\sqrt{\frac{(۵/۲)^۲}{۳۶} + \frac{(۳/۴)^۲}{۴۹}}} = ۵/۰۳۳$$

$$\alpha = ۰/۰۶ \Longrightarrow z_{۱-\frac{\alpha}{۲}} = z_{۰/۹۷} = ۱/۸۸$$

چون $z_{۱-\frac{\alpha}{۲}} = ۱/۸۸ < |Z| = ۵/۰۳۳$ پس فرض $H_۰$ رد می‌شود، یعنی $\mu_۱ \neq \mu_۲$ و چون $Z = ۵/۰۳۳ > ۱/۸۸$ بنابراین نتیجه می‌شود که $\mu_۱ > \mu_۲$ است.

(ب) واریانس دو جامعه نامعلوم اما مساوی باشند

در این حالت $\sigma_۱^۲ = \sigma_۲^۲ = \sigma^۲$ است و $\sigma^۲$ را با واریانس مشترک دو جامعه به‌صورت زیر برآورد می‌کنیم

$$\widehat{\sigma^۲} = S_p^۲ = \frac{(n_۱ - ۱)S_۱^۲ + (n_۲ - ۱)S_۲^۲}{n_۱ + n_۲ - ۲}$$

Scanned with CamScanner

حال اگر دو جامعه نرمال باشند آنگاه از (۹.۲) داریم که

$$T = \frac{(\overline{X}_۱ - \overline{X}_۲) - (\mu_۱ - \mu_۲)}{S_p\sqrt{\frac{۱}{n_۱} + \frac{۱}{n_۲}}} \sim t_{(n_۱+n_۲-۲)}$$

بنابراین با انجام عملیات مشابه حالت (الف)، برای سه نوع آزمون فرض‌های گفته شده در حالت (الف) می‌توان ناحیهٔ بحرانی آزمون‌ها را به‌دست آورد. این آزمون‌ها و ناحیه‌های بحرانی آزمون‌ها در جدول ۳.۴ تحت عنوان آزمون‌های شمارهٔ ۱۳، ۱۴ و ۱۵ آورده شده‌اند که اثبات آن‌ها به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌گردد.

مثال ۲۲.۴ یک کشاورز ادعا دارد که حد متوسط محصول گندم از نوع اول از حد متوسط محصول گندم از نوع دوم به اندازهٔ حداقل ۱۲ بشکه در هر هکتار بیشتر است. برای آزمون این ادعا ۵۰ هکتار از هر نوع دو گندم کشت کرده و تحت شرایط یکسان پرورش داده می‌شوند. نوع اول به‌طور متوسط ۸۶/۷ با انحراف استاندارد ۶/۲۸ بشکه در هر هکتار و نوع دوم به‌طور متوسط ۷۷/۸ با انحراف استاندارد ۵/۶۱ بشکه در هر هکتار محصول داده‌اند. با فرض برابری واریانس جامعه‌ها، ادعای کشاورز را در سطح معنی‌دار ۰/۰۵ آزمون کنید.

حل : در این مثال ادعا به‌صورت $\mu_۱ \geq \mu_۲ + ۱۲$ است پس با آزمون فرض $\begin{cases} H_۰ : \mu_۱ \geq \mu_۲ + ۱۲ \\ H_۱ : \mu_۱ < \mu_۲ + ۱۲ \end{cases}$ یا $\begin{cases} H_۰ : \mu_۱ - \mu_۲ \geq ۱۲ \\ H_۱ : \mu_۱ - \mu_۲ < ۱۲ \end{cases}$ مواجه هستیم. بنابراین از آزمون شمارهٔ ۱۴ جدول ۳.۴ با $d_۰ = ۱۲$ استفاده می‌کنیم. از اطلاعات مسئله داریم که

$$\begin{aligned} n_۱ &= ۵۰\ , \quad \overline{x}_۱ = ۸۶/۷\ , \quad s_۱ = ۶/۲۸ \\ n_۲ &= ۵۰\ , \quad \overline{x}_۲ = ۷۷/۸\ , \quad s_۲ = ۵/۶۱ \end{aligned}$$

بنابراین

$$s_p^۲ = \frac{۴۹(۶/۲۸)^۲ + ۴۹(۵/۶۱)^۲}{۵۰ + ۵۰ - ۲} = ۳۵/۴۶ \Longrightarrow s_p = ۵/۹۵$$

$$T = \frac{۸۶/۷ - ۷۷/۸ - ۱۲}{۵/۹۵\sqrt{\frac{۱}{۵۰} + \frac{۱}{۵۰}}} = -۲/۶۰۵$$

$$۱ - \alpha = ۰/۰۵ \Longrightarrow t_{۱-\alpha}(n_۱ + n_۲ - ۲) = t_{۰/۹۵}(۹۸) = z_{۰/۹۵} = ۱/۶۴۵$$

چون $-۲/۶۰۵ = T < -t_{۱-\alpha}(n_۱ + n_۲ - ۲) = -۱/۶۴۵$ پس $H_۰$ رد می‌شود، یعنی ادعای کشاورز نادرست است.

Scanned with CamScanner

پ) واریانس دو جامعه نامعلوم باشند

در این حالت $\sigma_۲^۲ \neq \sigma_۱^۲$ است. حال اگر دو جامعه نرمال باشند از (۱۰.۲) داریم که

$$T = \frac{(\overline{X}_۱ - \overline{X}_۲) - (\mu_۱ - \mu_۲)}{\sqrt{\frac{S_۱^۲}{n_۱} + \frac{S_۲^۲}{n_۲}}} \sim t_{(\nu)}$$

که در آن

$$\nu = \frac{\left(\frac{s_۱^۲}{n_۱} + \frac{s_۲^۲}{n_۲}\right)^۲}{\frac{\left(\frac{s_۱^۲}{n_۱}\right)^۲}{n_۱ - ۱} + \frac{\left(\frac{s_۲^۲}{n_۲}\right)^۲}{n_۲ - ۱}} \qquad (۱۸.۴)$$

بنابراین با انجام عملیات مشابه حالت (الف)، برای سه نوع آزمون گفته شده در حالت (الف) می‌توان ناحیهٔ بحرانی آزمون‌ها را به‌دست آورد. این آزمون‌ها و ناحیه‌های بحرانی در جدول ۳.۴ با عنوان آزمون‌های شمارهٔ ۱۶، ۱۷ و ۱۸ آورده شده‌اند که اثبات آن‌ها به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌گردد.

توجه کنید که اگر دو جامعه نرمال نباشند ولی $n_۱ \geq ۳۰$ و $n_۲ \geq ۳۰$ باشد آنگاه با استفاده از (۱۰.۲) آزمون‌های مربوط به‌صورت آزمون‌های ۱۶، ۱۷ و ۱۸ با قرار دادن $t_{۱-\alpha}(\nu) = z_{۱-\alpha}$ حاصل می‌شود.

مثال ۲۳.۴ ادعا شده است که حد متوسط زمان نمایش فیلم‌های تولیدی شرکت ۲ به مدت بیش از ۱۰ دقیقه از حد متوسط زمان نمایش فیلم‌های تولیدی توسط شرکت ۱ بیشتر است. برای بررسی ادعا زمان نمایش دو نمونه از فیلم این شرکت‌ها را جمع‌آوری کرده و اطلاعات زیر به‌دست آمده است.

شرکت ۱	۱۰۲	۸۶	۹۸	۱۰۹	۹۲		
شرکت ۲	۸۱	۱۶۵	۹۷	۱۳۴	۹۲	۸۷	۱۱۴

اگر زمان نمایش فیلم‌ها تقریباً نرمال باشد، این ادعا را در سطح معنی‌دار ۰/۰۱ آزمون کنید.

حل : در این مثال ادعا به‌صورت $\mu_۲ > \mu_۱ + ۱۰$ است پس با آزمون

$$\begin{cases} H_۰ : \mu_۱ - \mu_۲ \geq -۱۰ \\ H_۱ : \mu_۱ - \mu_۲ < -۱۰ \end{cases}$$

Scanned with CamScanner

مواجه هستیم. بنابراین از آزمون شمارهٔ ۱۷ جدول ۳.۴ با $d_۰ = -۱۰$ استفاده می‌کنیم. از داده‌ها به‌دست می‌آوریم

$$n_۱ = ۵\,, \quad \overline{x}_۱ = ۹۷/۴\,, \quad s_۱ = ۷۸/۸$$

$$n_۲ = ۷\,, \quad \overline{x}_۲ = ۱۱۰\,, \quad s_۲ = ۹۱۳/۱۳$$

$$T = \frac{۹۷/۴ - ۱۱۰ + ۱۰}{\sqrt{\frac{۷۸/۸}{۵} + \frac{۹۱۳/۱۳}{۷}}} = -۰/۲۱۵$$

بنابراین

$$\nu = \frac{\left[\frac{۷۸/۸}{۵} + \frac{۹۱۳/۱۳}{۷}\right]^۲}{\frac{\left(\frac{۷۸/۸}{۵}\right)^۲}{۴} + \frac{\left(\frac{۹۱۳/۱۳}{۷}\right)^۲}{۶}} = ۷/۳۷۶ \approx ۷$$

$$۱ - \alpha = ۰/۹۹ \Longrightarrow t_{۱-\alpha}(\nu) = t_{۰/۹۹}(۷) = ۳$$

چون $-۳ = -t_{۱-\alpha}(\nu) \not< T = -۰/۲۱۵$ پس $H_۰$ رد نمی‌شود، یعنی ادعا درست نیست.

۷.۵.۴ آزمون روی تفاضل میانگین مشاهده‌های زوجی

در بخش ۵.۶.۳ بیان شد که در برخی بررسی‌های آماری مشاهده‌ها به‌صورت زوج‌های $(X_۱, Y_۱), (X_۲, Y_۲), \cdots, (X_n, Y_n)$ هستند که X_i مقدار خصیصه مد نظر در عضو i ام قبل از انجام آزمایش و Y_i مقدار همان خصیصه در همان عضو i ام بعد از انجام آزمایش است. برای مثال اگر تاثیر یک نوع دارو روی کلسترول خون مد نظر باشد آنگاه X_i و Y_i به‌ترتیب میزان کلسترول خون عضو i ام نمونه قبل از مصرف دارو و بعد از مصرف دارو به مدت یک ماه است. اگر μ_X و μ_Y به‌ترتیب میانگین خصیصه مد نظر در جامعه در قبل و بعد از انجام آزمایش باشد، می‌خواهیم آزمون‌هایی روی تفاضل این میانگین‌ها یعنی $\mu_D = \mu_X - \mu_Y$ انجام دهیم. همان طور که در بخش ۵.۶.۳ بیان شد، قرار می‌دهیم $D_i = X_i - Y_i$، $i = ۱, ۲, \cdots, n$ و فرض می‌کنیم $D_۱, D_۲, \cdots, D_n$ نمونه‌ای تصادفی از جامعهٔ نرمال با میانگین μ_D و واریانس $\sigma_D^۲$ بوده و $\overline{D} = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} D_i$ و $S_D^۲ = \frac{۱}{n-۱}\sum_{i=۱}^{n}(D_i - \overline{D})$ میانگین و واریانس این نمونه باشند. توجه شود که D_iها از یکدیگر مستقل بوده ولی X_i و Y_i در زوج (X_i, Y_i) به یکدیگر

Scanned with CamScanner

وابسته هستند. با توجه به (۲۶.۳) داریم که

$$T = \frac{\overline{D} - \mu_D}{S_D/\sqrt{n}} \sim t_{(n-1)}$$

حال با استفاده از این کمیت آزمون فرض‌های آماری روی μ_D را به‌صورت زیر انجام می‌دهیم.

در آزمون فرض $\begin{cases} H_0 : \mu_D = d_0 \\ H_1 : \mu_D > d_0 \end{cases}$ ناحیهٔ بحرانی به‌صورت $\overline{D} > c$ است که در آن

$$\begin{aligned} \alpha &= P(\overline{D} > c | \mu_D = d_0) = P\left(\frac{\overline{D} - \mu_D}{S_D/\sqrt{n}} > \frac{c - d_0}{S_D/\sqrt{n}} \middle| \mu_D = d_0\right) \\ &= P\left(t_{(n-1)} > \frac{c - d_0}{S_D/\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

بنابراین $\frac{c - d_0}{S_D/\sqrt{n}} = t_{1-\alpha}(n-1)$ یا $c = d_0 + t_{1-\alpha}(n-1)\frac{S_D}{\sqrt{n}}$. در نتیجه ناحیهٔ بحرانی به‌صورت $\overline{D} > d_0 + t_{1-\alpha}(n-1)\frac{S_D}{\sqrt{n}}$ یا به‌صورت

$$T = \frac{\overline{D} - d_0}{S_D/\sqrt{n}} > t_{1-\alpha}(n-1) \tag{۱۹.۴}$$

است. توجه شود که اگر فرض H_0 به‌صورت $H_0 : \mu_D \leq d_0$ باشد آنگاه می‌توان نشان داد که ناحیهٔ بحرانی آزمون هنوز به‌صورت (۱۹.۴) است. به‌همین ترتیب در آزمون $\begin{cases} H_0 : \mu_D = d_0 \\ H_1 : \mu_D < d_0 \end{cases}$ یا $\begin{cases} H_0 : \mu_D \geq d_0 \\ H_1 : \mu_D < d_0 \end{cases}$ می‌توان نشان داد که ناحیهٔ بحرانی آزمون به‌صورت زیر است

$$T = \frac{\overline{D} - d_0}{S_D/\sqrt{n}} < -t_{1-\alpha}(n-1) \tag{۲۰.۴}$$

همچنین در آزمون فرض $\begin{cases} H_0 : \mu_D = d_0 \\ H_1 : \mu_D \neq d_0 \end{cases}$ با استفاده از روشی مشابه حالت (پ) بخش ۱.۵.۴ می‌توان نشان داد که ناحیهٔ بحرانی آزمون به‌صورت زیر است (اثبات به‌عنوان تمرین)

$$|T| = \left|\frac{\overline{D} - d_0}{S_D/\sqrt{n}}\right| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \tag{۲۱.۴}$$

ناحیه‌های بحرانی به‌دست آمده در (۱۹.۴)، (۲۰.۴) و (۲۱.۴) و آزمون‌های مربوط در جدول ۴.۴ خلاصه شده است.

Scanned with CamScanner

جدول ۴.۴: آزمون‌های آماری روی تفاضل میانگین مشاهده‌های زوجی

شماره آزمون	H_0	H_1	آماره آزمون	ناحیه بحرانی
۱۹	$\mu_D = d_0$ یا $\mu_D \leq d_0$	$\mu_D > d_0$	$T = \frac{\overline{D} - d_0}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}}$	$T > t_{1-\alpha}(n-1)$
۲۰	$\mu_D = d_0$ یا $\mu_D > d_0$	$\mu_D < d_0$	$T = \frac{\overline{D} - d_0}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}}$	$T < -t_{1-\alpha}(n-1)$
۲۱	$\mu_D = d_0$	$\mu_D \neq d_0$	$T = \frac{\overline{D} - d_0}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}}$	$\lvert T\rvert > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

مثال ۲۴.۴ برای تعیین اینکه عضویت در انجمن در معدل دانشجویان از نظر صرف وقت در انجمن مؤثر است یا نه، میانگین معدل دانشجویانی که عضو هستند و آن‌هایی که عضو نیستند در پنج سال یادداشت شد و در جدول زیر ارائه گردیده است.

سال	۱	۲	۳	۴	۵
عضو	۱۴/۰	۱۴/۰	۱۶/۱	۱۴/۷	۱۶/۸
غیرعضو	۱۵/۴	۱۳/۳	۱۷/۵	۱۶/۱	۱۶/۸

با فرض اینکه جامعه‌ها نرمال هستند در سطح معنی‌دار ۰/۰۲۵ فرض اثر سوء داشتن عضویت در انجمن بر معدل دانشجویان را آزمون کنید.

حل : چون دانشجویان هر سال به دو گروه مجزای عضو و غیرعضو تقسیم می‌شوند پس میانگین معدل این دو گروه در یک سال به هم وابسته است. در این مثال با آزمون

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 < \mu_2 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} H_0 : \mu_D = 0 \\ H_1 : \mu_D < 0 \end{cases}$$

مواجه هستیم پس از آزمون ۲۰ جدول ۴.۴ استفاده می‌کنیم. از داده‌ها به‌دست می‌آوریم که

i	۱	۲	۳	۴	۵
d_i	۱/۴−	۰/۷	۱/۴−	۱/۴−	۰

Scanned with CamScanner

پس $\bar{d} = -۰/۷$ و $s_d = ۰/۹۹$. همچنین

$$T = \frac{-۰/۷ - ۰}{۰/۹۹/\sqrt{۵}} = -۱/۵۸۱ \quad , \quad t_{۱-\alpha}(n-۱) = t_{۰/۹۷۵}(۴) = ۲/۷۸$$

چون $-۱/۵۸۱ = T \nless -t_{۱-\alpha}(n-۱) = -۲/۷۸$ پس $H_۰$ رد نمی‌شود، یعنی عضویت در انجمن بر روی معدل دانشجویان اثر سوء ندارد.

۸.۵.۴ آزمون روی نسبت واریانس‌های دو جامعه

فرض کنید از دو جامعهٔ نرمال با واریانس‌های $\sigma_۱^۲$ و $\sigma_۲^۲$ دو نمونهٔ تصادفی مستقل به اندازه‌های $n_۱$ و $n_۲$ با واریانس‌های نمونهٔ $S_۱^۲$ و $S_۲^۲$ انتخاب کرده باشیم و بخواهیم آزمون‌هایی روی نسبت واریانس‌های دو جامعه یعنی $\frac{\sigma_۱^۲}{\sigma_۲^۲}$ انجام دهیم. بهترین برآوردگر $\frac{\sigma_۱^۲}{\sigma_۲^۲}$ عبارت است از نسبت $\frac{S_۱^۲}{S_۲^۲}$ و با استفاده از (۱۴.۲) داریم که $F = \frac{S_۱^۲/\sigma_۱^۲}{S_۲^۲/\sigma_۲^۲} \sim F_{(n_۱-۱,n_۲-۱)}$. حال با استفاده از این کمیت سه حالت زیر را بررسی می‌کنیم.

(الف) در آزمون فرض $\begin{cases} H_۰ : \sigma_۱^۲ = \sigma_۲^۲ \\ H_۱ : \sigma_۱^۲ > \sigma_۲^۲ \end{cases}$ ناحیه بحرانی به‌صورت $\frac{S_۱^۲}{S_۲^۲} > c$ است که در آن

$$\alpha = P\left(\frac{S_۱^۲}{S_۲^۲} > c \middle| \sigma_۱^۲ = \sigma_۲^۲\right) = P(F_{(n_۱-۱,n_۲-۱)} > c)$$

پس $c = F_{۱-\alpha}(n_۱-۱,n_۲-۱)$. بنابراین ناحیهٔ بحرانی آزمون عبارت است از

$$\frac{S_۱^۲}{S_۲^۲} > F_{۱-\alpha}(n_۱-۱,n_۲-۱) \tag{۲۲.۴}$$

توجه شود که اگر فرض $H_۰$ به‌صورت $H_۰ : \sigma_۱^۲ \leq \sigma_۲^۲$ باشد آنگاه می‌توان نشان داد که ناحیهٔ بحرانی هنوز به‌صورت (۲۲.۴) است.

(ب) در آزمون فرض $\begin{cases} H_۰ : \sigma_۱^۲ = \sigma_۲^۲ \\ H_۱ : \sigma_۱^۲ < \sigma_۲^۲ \end{cases}$ ناحیهٔ بحرانی به‌صورت $\frac{S_۱^۲}{S_۲^۲} < c$ است و همانند حالت (الف) می‌توان نشان داد که ناحیهٔ بحرانی آزمون به‌صورت زیر به‌دست می‌آید (اثبات به‌عنوان تمرین)

$$\frac{S_۱^۲}{S_۲^۲} < F_{\alpha}(n_۱-۱,n_۲-۱) = \frac{۱}{F_{۱-\alpha}(n_۲-۱,n_۱-۱)} \tag{۲۳.۴}$$

Scanned with CamScanner

توجه شود که اگر فرض H_0 به‌صورت $H_0: \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$ باشد آنگاه می‌توان نشان داد که ناحیهٔ بحرانی هنوز به‌صورت (۲۳.۴) است.

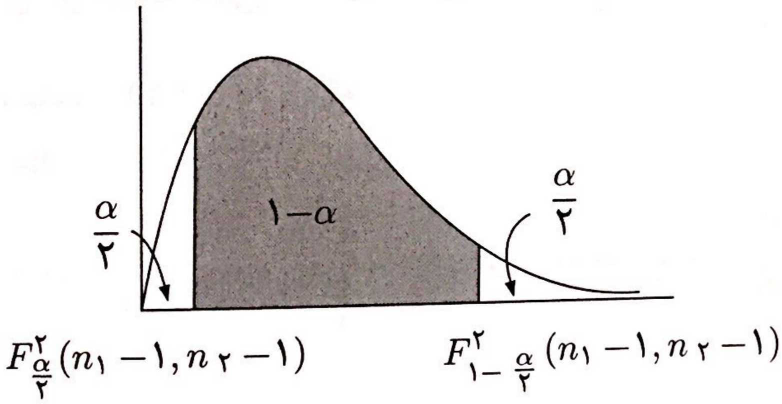
(پ) در آزمون فرض $\begin{cases} H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases}$ ناحیهٔ بحرانی به‌صورت $\frac{S_1^2}{S_2^2} < c_1$ یا $\frac{S_1^2}{S_2^2} > c_2$ است که در آن

$$\alpha = P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} < c_1 \text{ یا } \frac{S_1^2}{S_2^2} > c_2 \middle| \sigma_1^2 = \sigma_2^2\right)$$

در نتیجه

$$1 - \alpha = P(c_1 < F_{(n_1-1, n_2-1)} < c_2)$$

با توجه به شکل ۷.۴ نتیجه می‌شود که



شکل ۷.۴: نمودار توزیع F

$$c_1 = F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1) = \frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_2 - 1, n_1 - 1)}$$

$$c_2 = F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

بنابراین ناحیهٔ بحرانی آزمون به‌صورت زیر است

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} < \frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_2 - 1, n_1 - 1)} \text{ یا } \frac{S_1^2}{S_2^2} > F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1) \qquad (۲۴.۴)$$

در جدول ۵.۴ آزمون‌های آماری و ناحیه‌های بحرانی به‌دست آمده در مورد نسبت واریانس‌های دو جامعه خلاصه شده است.

Scanned with CamScanner

جدول ۵.۴: آزمون‌های آماری روی نسبت واریانس‌های دو جامعهٔ نرمال

شماره آزمون	H_0	H_1	آماره آزمون	ناحیه بحرانی
۲۲	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ یا $\sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$	$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$	$F > F_{1-\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1)$
۲۳	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ یا $\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$	$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$	$F < F_{\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1)$
۲۴	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$	$F < F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1)$ یا $F > F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1)$

مثال ۲۵.۴ گروه ریاضی یک دانشگاه دو نوع امتحان ریاضی برای تعیین میزان معلومات دانشجویان ورودی برگزار می‌کند. دو گروه از دانشجویان را که در این دو نوع امتحان شرکت کرده‌اند در نظر گرفته و اطلاعات زیر به‌دست آمده است.

$$n_1 = ۲۱\,, \quad s_1^2 = ۱۲۱\,, \quad n_2 = ۱۶\,, \quad s_2^2 = ۶۴$$

آیا در سطح معنی‌دار ۰٫۰۲ دو امتحان دارای واریانس یکسان هستند؟

حل : در این مثال با آزمون فرض $\begin{cases} H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases}$ مواجه هستیم پس از آزمون شمارهٔ ۲۴ جدول ۵.۴ استفاده می‌کنیم. با توجه به اطلاعات داده شده داریم که

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{۱۲۱}{۶۴} = ۱٫۸۹۱$$

$$F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1) = F_{0٫99}(۲۰, ۱۵) = ۳٫۳۷$$

$$F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1) = \frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_2 - 1, n_1 - 1)} = \frac{1}{F_{0٫99}(۱۵, ۲۰)}$$

Scanned with CamScanner

$$= \frac{۱}{۳/۰۹} = ۰/۳۲۴$$

چون

$$۱/۸۹۱ = F \not> F_{۱-\frac{\alpha}{۲}}(n_۱ - ۱, n_۲ - ۱) = ۳/۳۷$$

$$۱/۸۹۱ = F \not< F_{\frac{\alpha}{۲}}(n_۱ - ۱, n_۲ - ۱) = ۰/۳۲۴$$

پس فرض $H_۰$ رد نمی‌شود، یعنی واریانس دو امتحان یکسان است.

۹.۵.۴ آزمون روی نسبت در یک جامعه

همان‌گونه که در بخش ۳.۶.۳ بیان شد، در برخی از بررسی‌های آماری نسبتی از اعضای جامعه p که دارای خصوصیتی معین هستند مد نظر است. برای مثال نسبتی از افراد جامعه که بالای ۵۰ سال سن دارند. برای بررسی این نسبت p، نمونهٔ تصادفی $X_۱, X_۲, \cdots, X_n$ از جامعه جمع‌آوری کرده که در آن

$$X_i = \begin{cases} ۱ & \text{اگر عضو } i \text{ ام نمونه دارای خصوصیت معین باشد} \\ ۰ & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

اگر $X = X_۱ + X_۲ + \cdots + X_n$ آنگاه X برابر تعدادی از اعضای نمونه است که دارای خصوصیت معین هستند و $X \sim B(n, p)$. بهترین برآوردگر p عبارت است از $\widehat{p} = \frac{X}{n}$. برای آزمون فرض روی p دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

حالت اول: اگر اندازهٔ نمونه n کوچک باشد، یعنی $n \leq ۲۰$ آنگاه آزمون‌های فرض روی p را با استفاده از جدول توزیع دو جمله‌ای (جدول I پیوست پ) به‌صورت زیر انجام می‌دهیم.

(الف) در آزمون $\begin{cases} H_۰ : p = p_۰ \\ H_۱ : p > p_۰ \end{cases}$ که $p_۰$ مقداری ثابت است ناحیه بحرانی به‌صورت $\frac{X}{n} > c$ یا معادلاً $X > x$ که x مقدار مشاهده شدهٔ X در نمونه است. برای انجام آزمون از p- مقدار استفاده می‌کنیم. در این آزمون p- مقدار برابر است با

$$p\text{- مقدار} = P(X \geq x | p = p_۰) \tag{۲۵.۴}$$

اگر $p\text{- مقدار} \leq \alpha$، آنگاه فرض $H_۰$ را رد و در غیر این‌صورت آن را می‌پذیریم.

Scanned with CamScanner

(ب) در آزمون $\begin{cases} H_\circ : p = p_\circ \\ H_1 : p < p_\circ \end{cases}$ ناحیهٔ بحرانی به‌صورت $\frac{X}{n} < c$ یا $X < x$ است که x مقدار مشاهده شدهٔ X در نمونه است. در این حالت p- مقدار عبارت است از

$$\text{مقدار } p\text{-} = P(X \leq x | p = p_\circ) \tag{۲۶.۴}$$

اگر $p \leq \alpha$- مقدار، آنگاه فرض $H_\circ$ را رد و در غیر این‌صورت آن را می‌پذیریم.

(پ) در آزمون $\begin{cases} H_\circ : p = p_\circ \\ H_1 : p \neq p_\circ \end{cases}$ ناحیهٔ بحرانی به‌صورت $\frac{X}{n} < c_1$ یا $\frac{X}{n} > c_2$ و یا معادلاً $X < x_1$ یا $X > x_2$ است. در این آزمون p- مقدار را به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم

$$\text{مقدار } p\text{-} = \begin{cases} 2P(X \leq x | p = p_\circ) & x < np_\circ \\ 2P(X \geq x | p = p_\circ) & x > np_\circ \end{cases} \tag{۲۷.۴}$$

که x مقدار مشاهده شدهٔ X در نمونه است. اگر $p \leq \alpha$- مقدار آنگاه فرض $H_\circ$ را رد و در غیر این‌صورت آن را می‌پذیریم.

مثال ۲۶.۴ در روش فعلی پرتاب موشک از روی سکوی پرتاب، احتمال موفقیت پرتاب ۰/۸ است. یک نوع سامانهٔ پرتاب موشک جدید ارائه شده است که ادعا می‌شود از روش قبلی مؤثرتر است. اگر در روش جدید از ۲۰ پرتاب ۱۷ موشک با موفقیت پرتاب شوند، در سطح معنی‌دار ۰/۰۵ این ادعا را آزمون کنید.

حل : در این مثال با آزمون $\begin{cases} H_\circ : p = 0/8 \\ H_1 : p > 0/8 \end{cases}$ مواجه هستیم که $n = 20$ و $x = 17$ است. بنابراین p- مقدار برابر است با

$$\begin{aligned} \text{مقدار } p\text{-} &= P(X \geq 17 | p = 0/8) = 1 - P(X \leq 16 | p = 0/8) \\ &= 1 - 0/5886 = 0/4114 \end{aligned}$$

چون $0/05 < 0/4114 = p$- مقدار، پس فرض $H_\circ$ رد نمی‌شود و روش جدید بهتر نیست.

مثال ۲۷.۴ یک شکارچی قرقاول ادعا دارد که ۸۰٪ از تیرهای او به هدف می‌خورد. اگر او در یک روز ۹ تا از ۱۵ قرقاول را که به سوی آن‌ها تیراندازی کرده است صید نماید، آیا ادعای او را در سطح معنی‌دار ۰/۰۵ می‌پذیرید؟

Scanned with CamScanner

حل : در این مثال با آزمون $\begin{cases} H_\circ : p = ۰/۸ \\ H_۱ : p \neq ۰/۸ \end{cases}$ مواجه هستیم که $n = ۱۵$ و $x = ۹$ است.

چون $np_\circ = ۱۲ > x = ۹$، پس p- مقدار برابر است با

$$p\text{- مقدار} = ۲P(X \leq ۹|p = ۰/۸) = ۲(۰/۰۶۱۱) = ۰/۱۲۲۲$$

چون $p\text{- مقدار} = ۰/۱۲۲۲ > ۰/۰۵$، پس $H_\circ$ رد نمی‌شود و ادعای شکارچی درست است.

حالت دوم: اگر اندازهٔ نمونه n بزرگ باشد، یعنی $n > ۲۰$ آنگاه از قضیهٔ حد مرکزی توزیع $Z = \frac{\widehat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} = \frac{X - np}{\sqrt{npq}}$ موقعی که $n \to \infty$ به توزیع نرمال استاندارد میل می‌کند. بنابراین در این حالت با استفاده از تقریب نرمال آزمون فرض‌های زیر را انجام می‌دهیم.

در آزمون فرض $\begin{cases} H_\circ : p = p_\circ \\ H_۱ : p > p_\circ \end{cases}$ ناحیهٔ بحرانی آزمون به‌صورت $\widehat{p} > c$ است که در آن

$$\alpha = P(\widehat{p} > c|p = p_\circ) = P\left(\frac{\widehat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} > \frac{c - p_\circ}{\sqrt{\frac{p_\circ q_\circ}{n}}}\middle| p = p_\circ\right) \approx P\left(Z > \frac{c - p_\circ}{\sqrt{\frac{p_\circ q_\circ}{n}}}\right)$$

بنابراین $\frac{c - p_\circ}{\sqrt{\frac{p_\circ q_\circ}{n}}} = z_{۱-\alpha}$ یا $c = p_\circ + z_{۱-\alpha}\sqrt{\frac{p_\circ q_\circ}{n}}$. پس ناحیهٔ بحرانی به‌صورت $\widehat{p} > p_\circ + z_{۱-\alpha}\sqrt{\frac{p_\circ q_\circ}{n}}$ یا به‌صورت $X > np_\circ + z_{۱-\alpha}\sqrt{np_\circ q_\circ}$ است. بنابراین ناحیهٔ بحرانی به‌صورت زیر به‌دست می‌اید

$$Z = \frac{X - np_\circ}{\sqrt{np_\circ q_\circ}} > z_{۱-\alpha} \tag{۲۸.۴}$$

توجه شود که اگر فرض $H_\circ$ به‌صورت $H_\circ : p \leq p_\circ$ باشد آنگاه می‌توان نشان داد که ناحیهٔ بحرانی آزمون هنوز به‌صورت (۲۸.۴) است. به همین ترتیب در آزمون فرض $\begin{cases} H_\circ : p = p_\circ \\ H_۱ : p < p_\circ \end{cases}$ یا $\begin{cases} H_\circ : p \geq p_\circ \\ H_۱ : p < p_\circ \end{cases}$ ناحیهٔ بحرانی آزمون به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$Z = \frac{X - np_\circ}{\sqrt{np_\circ q_\circ}} < -z_{۱-\alpha} \tag{۲۹.۴}$$

Scanned with CamScanner

همچنین در آزمون فرض $\begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p \neq p_0 \end{cases}$ با استفاده از روشی مشابه حالت (پ) بخش ۱.۵.۴ می‌توان نشان داد که ناحیهٔ بحرانی آزمون به‌صورت زیر است (اثبات به‌عنوان تمرین)

$$|Z| = \left| \frac{X - np_0}{\sqrt{np_0 q_0}} \right| > z_{1-\frac{\alpha}{2}} \tag{۳۰.۴}$$

ناحیه‌های بحرانی به‌دست آمده در (۲۸.۴)، (۲۹.۴) و (۳۰.۴) و آزمون‌های مربوط در جدول (۶.۴) خلاصه شده است.

جدول ۶.۴: آزمون‌های آماری روی نسبت در یک جامعه و تفاضل نسبت در دو جامعه

ناحیه بحرانی	آماره آزمون	H_1	H_0	شماره آزمون
$Z > z_{1-\alpha}$	$Z = \frac{X - np_0}{\sqrt{np_0 q_0}}$	$p > p_0$	$p = p_0$ یا $p \leq p_0$	۲۵
$Z < -z_{1-\alpha}$	$Z = \frac{X - np_0}{\sqrt{np_0 q_0}}$	$p < p_0$	$p = p_0$ یا $p \geq p_0$	۲۶
$\|Z\| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$Z = \frac{X - np_0}{\sqrt{np_0 q_0}}$	$p \neq p_0$	$p = p_0$	۲۷
$Z > z_{1-\alpha}$	$Z = \frac{\widehat{p_1} - \widehat{p_2}}{\sqrt{\widehat{pq}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$	$p_1 > p_2$	$p_1 = p_2$ یا $p_1 \leq p_2$	۲۸
$Z < -z_{1-\alpha}$	$Z = \frac{\widehat{p_1} - \widehat{p_2}}{\sqrt{\widehat{pq}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$	$p_1 < p_2$	$p_1 = p_2$ یا $p_1 \geq p_2$	۲۹
$\|Z\| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$Z = \frac{\widehat{p_1} - \widehat{p_2}}{\sqrt{\widehat{pq}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$	$p_1 \neq p_2$	$p_1 = p_2$	۳۰

مثال ۲۸.۴ در یک دانشکده تخمین زده می‌شود که کمتر از ۲۵% از دانشجویان دارای ماشین شخصی هستند. اگر از یک نمونهٔ تصادفی ۹۰ تایی از دانشجویان ۲۸ نفر صاحب ماشین شخصی باشند، آیا تخمین زده شده در سطح معنی‌دار ۰/۰۵ صحیح است؟

Scanned with CamScanner

حل : در این مثال با آزمون
$$\begin{cases} H_0 : p \geq ۰/۲۵ \\ H_1 : p < ۰/۲۵ \end{cases}$$
مواجه هستیم که $n = ۹۰$ و $x = ۲۸$ است. بنابراین از آزمون شمارهٔ ۲۶ جدول ۶.۴ استفاده می کنیم.

$$Z = \frac{۲۸ - ۹۰(۰/۲۵)}{\sqrt{۹۰(۰/۲۵)(۰/۷۵)}} = ۱/۳۳۹ \quad , \quad z_{1-\alpha} = z_{۰/۹۵} = ۱/۶۴۵$$

چون $-۱/۶۴۵ = -z_{1-\alpha} \nless Z = ۱/۳۳۹$ پس فرض H_0 رد نمی‌شود و تخمین زده شده صحیح نبوده است.

۱۰.۵.۴ آزمون روی تفاضل دو نسبت در دو جامعه

فرض کنید در دو جامعه بخواهیم بر روی تفاضل یک خصوصیت معین یعنی $p_1 - p_2$ آزمون‌هایی انجام دهیم. برای این منظور دو نمونهٔ تصادفی n_1 و n_2 تایی به‌ترتیب از دو جامعه انتخاب کرده و قرار می‌دهیم

$$X_i = \text{تعداد اعضایی که در نمونهٔ } n_i \text{ تایی از جامعهٔ } i \text{ ام دارای خصوصیت معین هستند.} \quad , \quad i = ۱, ۲$$

در این‌صورت بهترین برآوردگر $p_1 - p_2$ عبارت است از $\widehat{p_1} - \widehat{p_2} = \frac{X_1}{n_1} - \frac{X_2}{n_2}$ و با توجه به (۲۸.۳) برای اندازهٔ نمونهٔ n_1 و n_2 بزرگ داریم

$$Z = \frac{(\widehat{p_1} - \widehat{p_2}) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}} \sim N(۰, ۱)$$

حال اگر شرط $p_1 = p_2 = p$ را داشته باشیم آنگاه

$$Z = \frac{\widehat{p_1} - \widehat{p_2}}{\sqrt{pq\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \sim N(۰, ۱)$$

برای محاسبه Z نیاز به تخمین pq در زیر رادیکال داریم. با ادغام اطلاعات حاصل از دو نمونه می‌توان p و q را به‌صورت زیر برآورد کرد

Scanned with CamScanner

بنابراین برای اندازهٔ نمونهٔ $n_۱$ و $n_۲$ بزرگ به‌طور تقریب داریم

$$Z = \frac{\widehat{p_۱} - \widehat{p_۲}}{\sqrt{\widehat{p}\widehat{q}\left(\frac{۱}{n_۱} + \frac{۱}{n_۲}\right)}} \sim N(۰, ۱) \tag{۳۱.۴}$$

حال از (۳۱.۴) می‌توان استفاده کرد و با انجام عملیات مشابه روش ارائه شده در بخش ۱.۵.۴، آزمون‌های مختلف روی تفاضل نسبت در دو جامعه یعنی $p_۱ - p_۲$ را مطابق آزمون‌های ۲۸، ۲۹ و ۳۰ جدول ۶.۴ به‌دست آورد.

مثال ۲۹.۴ یک سازمان بازاریابی سلیقهٔ مصرف‌کنندگان را در مورد مزهٔ یک فراورده جدید در دو ناحیه مطالعه می کند. اگر در یک نمونهٔ ۴۰۰ تایی از ناحیهٔ اول ۵۵% و از یک نمونهٔ ۳۰۰ تایی از ناحیهٔ دوم ۶۵% افراد مزهٔ فرآوردهٔ جدید را بپسندند، در سطح معنی‌دار ۰/۱ آیا دو ناحیه نظر یکسان دربارهٔ مزهٔ فرآوردهٔ جدید دارند؟

حل : در این مثال با آزمون فرض $\begin{cases} H_۰ : p_۱ = p_۲ \\ H_۱ : p_۱ \neq p_۲ \end{cases}$ مواجه هستیم، پس از آزمون شمارهٔ ۳۰ جدول ۶.۴ استفاده می‌کنیم. از اطلاعات داده شده داریم

$$n_۱ = ۴۰۰\,, \quad \widehat{p_۱} = ۰/۵۵\,, \quad x_۱ = n_۱\widehat{p_۱} = ۲۲۰$$
$$n_۲ = ۳۰۰\,, \quad \widehat{p_۲} = ۰/۶۵\,, \quad x_۲ = n_۲\widehat{p_۲} = ۱۹۵$$

پس

$$\widehat{p} = \frac{۲۲۰ + ۱۹۵}{۴۰۰ + ۳۰۰} = ۰/۵۹ \quad , \quad Z = \frac{۰/۵۵ - ۰/۶۵}{\sqrt{۰/۵۹(۰/۴۱)\left(\frac{۱}{۴۰۰} + \frac{۱}{۳۰۰}\right)}} = -۲/۶۶$$

$$\alpha = ۰/۱ \Longrightarrow Z_{۱-\frac{\alpha}{۲}} = Z_{۰/۹۵} = ۱/۶۴۵$$

چون $۱/۶۴۵ < |Z| = ۲/۶۶$ پس فرض $H_۰$ رد می‌شود و چون

$$-۲/۶۶ = Z < -z_{۱-\frac{\alpha}{۲}} = -۱/۶۴۵$$

پس $p_۱ < p_۲$ است، یعنی در ناحیهٔ اول مزهٔ فراوردهٔ جدید را کمتر از ناحیهٔ دوم ترجیح می‌دهند.

در زیر تعدادی مثال در رابطه با آزمون‌های مطرح شده در این بخش می‌آوریم.

Scanned with CamScanner

مثال ۳۰.۴ دو گروه ۴۰ نفری برای انجام یک آزمایش انتخاب شده‌اند، گروه اول را با رژیم غذایی A و گروه دوم را با رژیم غذایی B مورد آزمایش قرار داده‌ایم. میانگین و انحراف استاندارد کاهش وزن در رژیم غذایی A به‌ترتیب ۱۱ و ۴/۳ کیلوگرم و در رژیم غذایی B به‌ترتیب ۸ و ۵/۷ کیلوگرم بوده است. در سطح معنی‌دار ۰/۰۵ آیا می‌توان ادعا کرد که میانگین کاهش وزن به‌وسیلهٔ رژیم غذایی A از میانگین کاهش وزن به‌وسیلهٔ رژیم غذایی B به اندازهٔ حداقل یک کیلوگرم بیشتر است؟ فرض کنید کاهش وزن دو نوع رژیم دارای توزیع نرمال با واریانس‌های مساوی باشند.

حل : در این مثال با آزمون فرض $\left\{\begin{array}{l} H_0 : \mu_A \geq \mu_B + 1 \\ H_1 : \mu_A < \mu_B + 1 \end{array}\right.$ مواجه هستیم. بنابراین از آزمون شماره ۱۴ با $d_0 = 1$ استفاده می‌کنیم. از اطلاعات مسئله داریم که

$$n_1 = 40 , \quad \overline{x}_1 = 11 , \quad s_1 = 4/3$$
$$n_2 = 40 , \quad \overline{x}_2 = 8 , \quad s_2 = 5/7$$

بنابراین

$$s_p^2 = \frac{39(4/3)^2 + 39(5/7)^2}{78} = 25/49$$
$$T = \frac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - d_0}{s_P\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{11 - 8 - 1}{\sqrt{25/49}\sqrt{\frac{1}{40} + \frac{1}{40}}} = 1/772$$
$$\alpha = 0/05 \Longrightarrow t_{1-\alpha}(n_1 + n_2 - 2) = t_{0/95}(78) = z_{0/95} = 1/645$$

چون $-1/645 = -t_{1-\alpha}(n_1 + n_2 - 2) \not< T = 1/772$ بنابراین فرض H_0 رد نمی‌شود و ادعای گفته شده درست است.

مثال ۳۱.۴ یک درس را به دو روش تدریس نموده‌ایم. سپس در روش اول از ۱۶ نفر امتحان به عمل آورده و انحراف استاندارد نمره‌ها ۹ به‌دست آمد، درحالی‌که در روش دوم از ۲۵ نفر امتحان به عمل آورده و انحراف استاندارد نمره‌ها ۱۲ به‌دست آمده است. آیا در سطح معنی‌دار ۰/۰۱ می‌توان متقاعد شد که پراکندگی نمره‌ها در روش اول کمتر از روش دوم است؟ فرض کنید نمره‌های دو روش از توزیع نرمال پیروی می‌کنند.

Scanned with CamScanner

حل : در این مثال با آزمون $\begin{cases} H_0 : \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \\ H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2 \end{cases}$ مواجه هستیم. بنابراین از آزمون شمارهٔ ۲۳ استفاده می‌کنیم. از اطلاعات مسئله داریم که

$$n_1 = ۱۶, \quad s_1 = ۹, \quad n_2 = ۲۵, \quad s_2 = ۱۲$$
$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \left(\frac{۹}{۱۲}\right)^2 = ۰/۵۶۲۵$$

$$\alpha = ۰/۱ \implies F_\alpha(n_1 - ۱, n_2 - ۱) = \frac{۱}{F_{1-\alpha}(n_2 - ۱, n_1 - ۱)}$$
$$= \frac{۱}{F_{۰/۹۹}(۲۴, ۱۵)} = ۰/۳۰۴$$

چون $۰/۳۰۴ = (۱ - n_2 ,۱ - n_1)F_\alpha \not< F = ۰/۵۶۲۵$ پس فرض H_0 رد نمی‌شود، یعنی پراکندگی نمره‌ها در روش اول کمتر نیست.

مثال ۳۲.۴ حد متوسط زمانی که برای یک دانشجو جهت ثبت نام در یک دانشکدهٔ بخصوص طول می‌کشد ۵۰ دقیقه با انحراف معیار ۱۰ دقیقه است. روش جدید ثبت نام با استفاده از کامپیوتر آزمایش می‌شود. اگر یک نمونهٔ تصادفی از ۱۲ دانشجو دارای حد متوسط زمان ثبت نام ۴۲ دقیقه با انحراف استاندارد ۱۱/۹ دقیقه تحت روش جدید باشند، با فرض نرمال بودن زمان ثبت نام، فرض کمتر بودن حد متوسط زمان ثبت نام روش جدید را در سطح معنی‌دار، (الف) ۰/۰۵، (ب) ۰/۰۱ آزمون کنید.

حل : در این مثال با آزمون فرض $\begin{cases} H_0 : \mu = ۵۰ \\ H_1 : \mu < ۵۰ \end{cases}$ مواجه هستیم که در آن σ^2 نامعلوم است. بنابراین از آزمون شمارهٔ ۵ استفاده می‌کنیم. از داده‌ها داریم که $\overline{x} = ۴۲$، $s = ۱۱/۹$، $n = ۱۲$ و $\mu_0 = ۵۰$. بنابراین

$$T = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{۴۲ - ۵۰}{\frac{۱۱/۹}{\sqrt{۱۲}}} = -۲/۳۳$$

(الف) اگر $\alpha = ۰/۰۵$ آنگاه $t_{1-\alpha}(n - ۱) = t_{۰/۹۵}(۱۱) = ۱/۸$. چون

$$-۲/۳۳ = T < -۱/۸ = t_{1-\alpha}(n - ۱)$$

پس فرض H_0 رد می‌شود. یعنی در سطح معنی‌دار ۰/۰۵ روش جدید بهتر است.

Scanned with CamScanner

(ب) اگر $\alpha = ۰/۰۱$ آنگاه $t_{1-\alpha}(n-۱) = t_{۰/۹۹}(۱۱) = ۲/۷۲$. چون

$$-۲/۳۳ = T \not< -۲/۷۲ = t_{1-\alpha}(n-۱)$$

پس فرض H_0 رد نمی‌شود. یعنی در سطح معنی‌دار ۰/۰۱ روش جدید بهتر نیست.
با توجه به مطالب بالا می‌توان گفت که حد متوسط زمان ثبت نام روش جدید کمتر از ۵۰ است ولی اختلاف آن‌چنان نیست که برای آن لازم باشد که مخارج زیاد کامپیوتر را متحمل شویم. در ضمن p- مقدار نیز این مطلب را تأیید می‌کند.

$$\begin{aligned} p\text{-مقدار} &= P_{\mu=\mu_0}(\overline{X} < \overline{x}) = P_{\mu=۵۰}(\overline{X} < ۴۲) \\ &= P_{\mu=۵۰}\left(\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} < \frac{۴۲-۵۰}{\frac{۱۱/۹}{\sqrt{۲}}}\right) = P(t_{(n-۱)} < -۲/۳۳) \approx ۰/۰۲۱ \end{aligned}$$

مثال ۳۳.۴ ادعا شده است که وزن قوطی‌های روغنی بخصوص ۱۰ انس است. اگر وزن‌های یک نمونهٔ تصادفی ۱۰ تایی از این قوطی‌ها به‌صورت زیر باشد و وزن قوطی‌ها دارای توزیع نرمال باشد، آیا این ادعا را می‌پذیرید؟

۹/۸ ۱۰/۳ ۱۰/۴ ۹/۹ ۹/۸ ۱۰/۱ ۱۰/۳ ۱۰/۱ ۹/۷ ۱۰/۲

حل : در این مثال با آزمون $\begin{cases} H_0 : \mu = ۱۰ \\ H_1 : \mu \neq ۱۰ \end{cases}$ مواجه هستیم که در آن σ^2 نامعلوم است. بنابراین از آزمون شمارهٔ ۶ با $\mu_0 = ۱۰$ و $\alpha = ۰/۰۵$ استفاده می‌کنیم. از اطلاعات مسئله داریم که

$$n = ۱۰\ , \quad \sum x_i = ۱۰۰/۶\ , \quad \sum x_i^2 = ۱۰۱۲/۵۸$$

در نتیجه $\overline{x} = ۱۰/۰۶$ و $s = ۰/۲۴۶$ و همچنین

$$\alpha = ۰/۰۵ \Longrightarrow t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-۱) = t_{۰/۹۷۵}(۹) = ۲/۲۶$$

$$T = \frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{۱۰/۰۶-۱۰}{\frac{۰/۲۴۶}{\sqrt{۱۰}}} = ۰/۷۷۱$$

چون $۰/۷۷۱ = |T| \not> t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-۱) = ۲/۲۶$ پس H_0 رد نمی‌شود یعنی ادعا درست است.

Scanned with CamScanner

مثال ۳۴.۴ در یک آزمون حساب سال پنجم ابتدایی نمرهٔ ۸ دانش‌آموز پسر و ۶ دانش‌آموز دختر به‌صورت زیر به‌دست آمده است

پسرها	۱۰	۱۷	۱۴	۱۲	۱۱	۱۶	۱۸	۱۹
دخترها	۱۶	۱۸	۱۷	۱۳	۱۴	۱۱		

با فرض نرمال بودن نمره‌ها، آیا به‌طور متوسط نمره‌های دانش‌آموزان پسر و دختر یکسان است؟

حل: در این مثال با آزمون $\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$ مواجه هستیم که واریانس‌ها نامعلوم است. بنابراین از آزمون شمارهٔ ۱۸ با $d_0 = ۰$ و $\alpha = ۰/۰۵$ استفاده می‌کنیم. از اطلاعات مسئله به‌دست می‌آوریم که

$$n_1 = ۸\,, \quad \overline{x}_1 = ۱۴/۶۲۵\,, \quad s_1^2 = ۱۱/۴۱$$
$$n_2 = ۶\,, \quad \overline{x}_2 = ۱۴/۸۳\,, \quad s_2^2 = ۶/۹۷$$

بنابراین

$$T = \frac{۱۴/۶۲۵ - ۱۴/۸۳ - ۰}{\sqrt{\frac{۱۱/۴۱}{۸} + \frac{۶/۹۷}{۶}}} = -۰/۱۲۷$$

$$\nu = \frac{\left(\frac{۱۱/۴۱}{۸} + \frac{۶/۹۷}{۶}\right)^۲}{\frac{\left(\frac{۱۱/۴۱}{۸}\right)^۲}{۷} + \frac{\left(\frac{۶/۹۷}{۶}\right)^۲}{۵}} = ۱۱/۹۵ \Longrightarrow \nu = ۱۲$$

$$\alpha = ۰/۰۵ \Longrightarrow t_{۱-\frac{\alpha}{۲}}(\nu) = t_{۰/۹۷۵}(۱۲) = ۲/۱۸$$

چون $۲/۱۸ = t_{۱-\frac{\alpha}{۲}}(\nu) \not< |T| = ۰/۱۲۷$ پس فرض H_0 رد نمی‌شود. یعنی به‌طور متوسط نمره‌های دانش‌آموزان پسر و دختر یکسان است.

Scanned with CamScanner

۶.۴ بررسی نرمال بودن داده‌ها

در بخش ۵.۴ در بیشتر آزمون‌ها فرض کردیم که نمونهٔ تصادفی $X_1, X_2, \cdots, X_n$ از یک جامعهٔ نرمال استخراج شده است. حال اگر یک سری مشاهده‌ها داشته باشیم، چگونه می‌توانیم بررسی کنیم که از یک جامعهٔ نرمال به‌دست آمده‌اند. به‌عبارت دیگر این سوال مطرح است که آیا مشاهده‌های $x_1, x_2, \cdots, x_n$ از یک جامعهٔ نرمال انتخاب شده‌اند؟

یک راه ساده برای بررسی نرمال بودن داده‌ها، رسم بافت‌نگار آن‌ها و مقایسه آن با منحنی نرمال که متقارن است، می‌باشد. همچنین چون در توزیع نرمال احتمال قرار گرفتن در فاصلهٔ $\mu \pm \sigma$ برابر ۰٫۶۸۳ و احتمال قرار گرفتن در فاصلهٔ $\mu \pm 2\sigma$ برابر ۰٫۹۵۴ است، بنابراین برای اندازهٔ نمونهٔ بزرگ انتظار داریم که ۶۸٫۳٪ مشاهده‌ها در فاصلهٔ $\bar{x} \pm s$ و ۹۵٫۴٪ مشاهده‌ها در فاصلهٔ $\bar{x} \pm 2s$ قرار داشته باشند. اما راه حل کلی برای بررسی نرمال بودن مشاهده‌ها، آزمون نرمال بودن داده‌ها است که در فصل پنجم دو نوع از این آزمون‌ها به‌نام‌های آزمون خی‌دو برای برازندگی و آزمون کولموگوروف - اسمیرنوف را بیان می‌کنیم. همچنین می‌توان از دو نمودار مشهور چندک در مقابل چندک ($Q-Q$ Plot) و احتمال در مقابل احتمال ($P-P$ Plot) نیز برای بررسی نرمال بودن داده‌ها استفاده کرد که در ادامه این نمودارها را نیز بررسی می‌کنیم.

۱.۶.۴ نمودار $Q-Q$

یک روش برای بررسی اینکه داده‌ها از یک توزیع خاص آمده‌اند استفاده از نمودار $Q-Q$ است که براساس چندک‌های داده‌ها و چندک‌های توزیع مد نظر رسم می‌شود. در زیر این نمودار را برای توزیع نرمال می‌آوریم.

فرض کنید $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(n)}$ مشاهده‌های مرتب شده باشند. چون دقیقاً j مشاهده کمتر یا مساوی $x_{(j)}$ است، پس $x_{(j)}$ چندک j ام نمونه است. بنابراین نسبت $\frac{j}{n}$ مشاهده‌ها کمتر یا مساوی $x_{(j)}$ هستند و اگر عمل تصحیح پیوستگی را به‌کار ببریم آنگاه نسبت $\frac{j-\frac{1}{2}}{n}$ مشاهده‌ها کمتر یا مساوی $x_{(j)}$ هستند. همچنین برای یک توزیع نرمال استاندارد، چندک مرتبه‌ی j ام، یعنی $q_{(j)}$ مقداری است که در رابطهٔ $P(Z \leq q_{(j)}) = \frac{j-\frac{1}{2}}{n}$ صدق کند. بنابراین چندک j ام توزیع $N(\mu, \sigma^2)$ عبارت است از $\sigma q_{(j)} + \mu$. حال اگر زوج چندک‌های

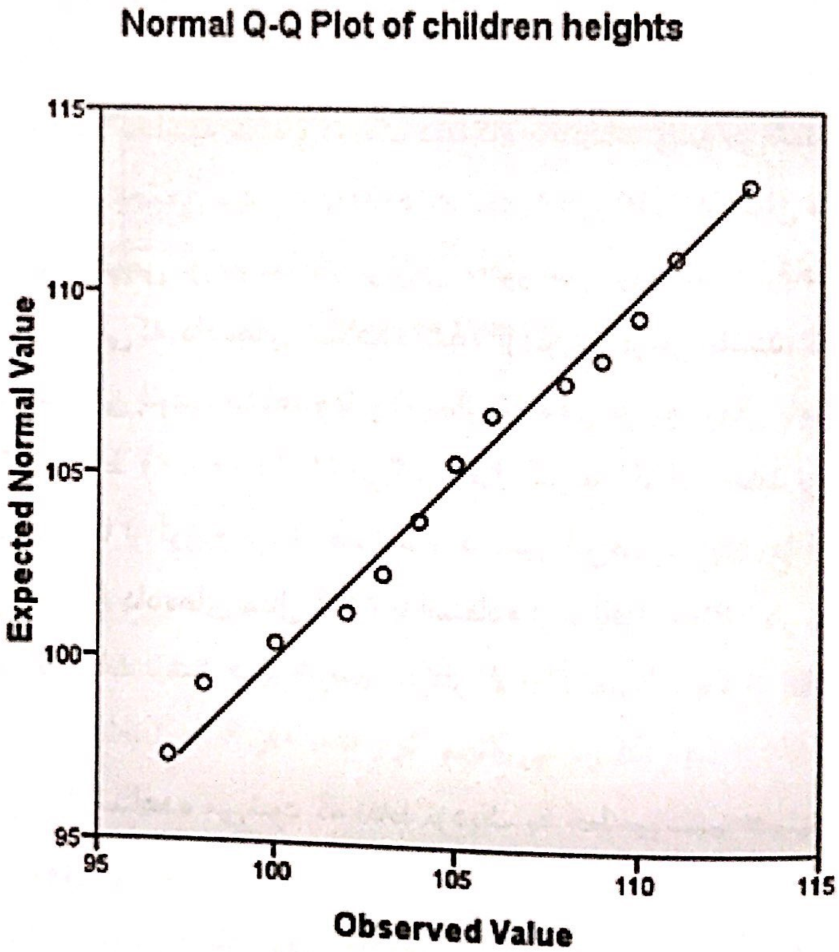
Scanned with CamScanner

نمونه و توزیع یعنی $(x_{(j)}, q_{(j)})$، $j = ۱, \cdots, n$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنیم و داده‌ها از توزیع نرمال باشند، انتظار داریم که این زوج‌ها روی یک خط مستقیم قرار گیرند. نمودار حاصل را نمودار $Q-Q$ گویند و محور افقی آن مقادیر مشاهده‌شدهٔ $x_{(j)}$ ها و محور عمودی آن مقادیر مورد انتظار $q_{(j)}$ ها است.

مثال ۳۵.۴ فرض کنید اندازهٔ قد کودکان ۱۰ ساله در یک نمونهٔ ۲۰ تایی به‌صورت زیر باشد. آیا داده‌ها از یک توزیع نرمال آمده‌اند.

۱۰۰	۱۰۵	۱۰۴	۱۱۳	۹۷	۱۰۴	۱۱۰	۱۰۳	۱۰۹	۱۰۵
۱۰۶	۱۰۴	۱۰۵	۱۱۱	۹۸	۱۰۶	۱۰۳	۱۱۰	۱۰۲	۱۰۸

حل : ابتدا داده‌ها را به‌ترتیب غیرنزولی یعنی $x_{(۱)} \leq x_{(۲)} \leq \cdots \leq x_{(n)}$ مرتب کرده و مقادیر $\frac{j-\frac{۱}{۲}}{n}$ و $q_{(j)}$، $j = ۱, ۲, \cdots, n$ را با استفاده از جدول توزیع نرمال (جدول III) محاسبه می‌کنیم. برای مثال



شکل ۸.۴: نمودار $Q-Q$ مربوط به قد کودکان ۱۰ ساله

Scanned with CamScanner

$$j=1 \Longrightarrow P(Z < q_{(1)}) = \frac{1-\frac{1}{2}}{20} = 0/025 \Longrightarrow q_{(1)} = z_{0/025} = -1/96$$

$$j=2 \Longrightarrow P(Z < q_{(2)}) = \frac{2-\frac{1}{2}}{20} = 0/075 \Longrightarrow q_{(2)} = z_{0/075} = -1/44$$

به همین ترتیب با محاسبهٔ مقادیر دیگر، زوج‌های $(x_{(j)}, q_{(j)})$، $j = 1, \cdots, n$ را به دست آورده و در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. این نمودار با استفاده از نرم‌افزار SPSS در شکل ۸.۴ رسم شده است. برای اطلاعات بیشتر در مورد رسم نمودار $Q-Q$ توسط نرم‌افزار SPSS به پیوست ب مراجعه کنید.

با توجه به شکل ۸.۴ مشاهده می‌شود که نقاط حاصل از زوج‌های $(x_{(j)}, q_{(j)})$ تقریباً روی یک خط مستقیم قرار گرفته‌اند. بنابراین داده‌ها از توزیع نرمال هستند.

۲.۶.۴ نمودار $P-P$

نمودار $P-P$ نیز همانند نمودار $Q-Q$ برای بررسی این است که داده‌ها از یک توزیع خاص آمده باشند. در این نمودار فراوانی تجمعی نسبی مشاهده‌ها و احتمال‌های تجمعی توزیع مد نظر به‌صورت زوج‌هایی محاسبه شده و در یک دستگاه مختصات رسم می‌شوند.

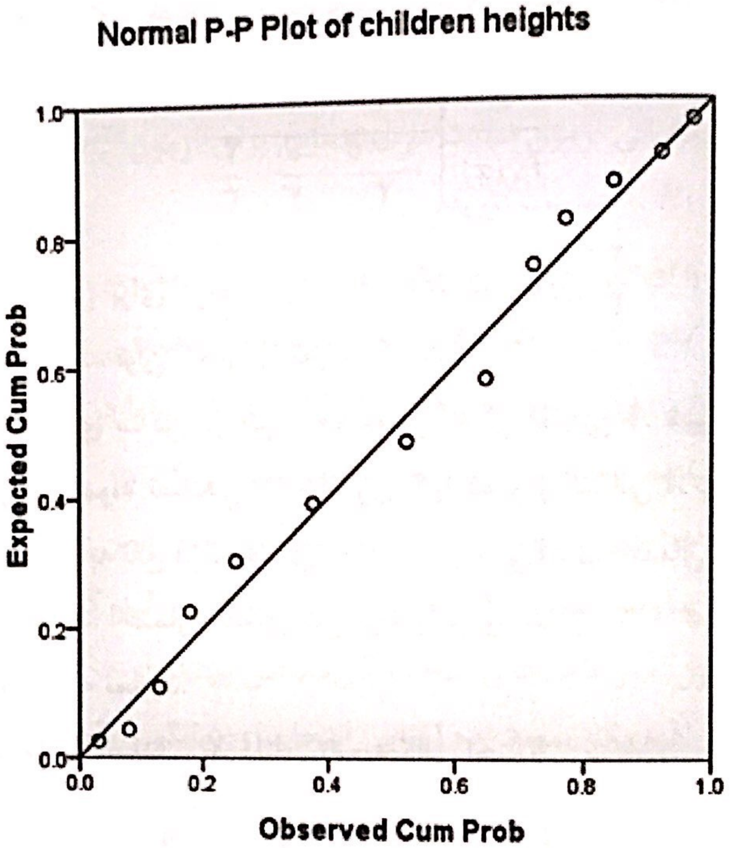
در این دستگاه فراوانی تجمعی نسبی مشاهده‌ها در روی محور افقی به عنوان مقادیر مشاهده شده و احتمال‌های تجمعی توزیع مد نظر بر روی محور عمودی به‌عنوان مقادیر مورد انتظار درج می‌گردد. درصورتی‌که داده‌های مشاهده شده از توزیع نرمال باشند، نقاط حاصل از زوج‌های فراوانی تجمعی نسبی مشاهده‌ها و احتمال تجمعی توزیع نرمال بایستی روی یک خط مستقیم که از نقاط $(0, 0)$ و $(1, 1)$ می‌گذرد قرار گیرند. اگر این نقاط نزدیک این خط مستقیم باشند، داده‌ها از توزیع نرمال هستند و در غیر این‌صورت داده‌ها از توزیع نرمال نیستند. نمودار $P-P$ داده‌های مثال ۳۵.۴ با استفاده از نرم‌افزار SPSS در شکل ۹.۴ رسم شده است. برای اطلاعات بیشتر دربارهٔ رسم نمودار $P-P$ توسط نرم‌افزار SPSS به پیوست ب مراجعه کنید.

با توجه به شکل ۹.۴ مشاهده می‌شود که نقاط نزدیک به خط مستقیم هستند، پس داده‌ها از توزیع نرمال پیروی می‌کنند.

در این بخش برای بررسی نرمال بودن داده‌ها از نمودارهای $Q-Q$ و $P-P$ استفاده کردیم. نتیجه‌گیری از روی این نمودارها تنها براساس مشاهدهٔ نمودار و بیان اینکه نقاط به

Scanned with CamScanner

خط مستقیم نزدیک هستند یا نه صورت می‌گیرد. اما این نمودارها معیاری را برای نزدیک یا دور بودن نقاط از خط ارائه نمی‌دهند. برای بررسی دقیق‌تر نرمال بودن داده‌ها می‌توان از آزمون‌های برازندگی توزیع که بدین منظور تهیه شده‌اند استفاده کرد. دو نوع از این آزمون‌ها، آزمون خی‌دو برای برازندگی توزیع و آزمون کولموگوروف - اسمیرنوف است که آن را در فصل پنجم بررسی خواهیم کرد.



شکل ۹.۴: نمودار $P-P$ مربوط به قد کودکان ۱۰ ساله

۷.۴ تمرین‌ها

۱) فرض کنید که Y دارای توزیع $B(۱۰۰, p)$ است. فرض $H_۰ : p = ۰/۰۸$ را در مقابل فرض $H_۱ : p_۱ < ۰/۰۸$ رد می کنیم اگر و فقط اگر $Y \leq ۶$ باشد.

(الف) α را به‌دست آورید.

(ب) احتمال خطای نوع دوم را در نقطهٔ $p = ۰/۰۴$ پیدا کنید.

۲) فرض کنید $X_۱, \cdots, X_۹$ یک نمونهٔ ۹ تایی از جامعه‌ای با توزیع $N(\mu, ۴)$ باشد اگر برای انجام آزمون $H_۰ : \mu = ۱۰$ در مقابل $H_۱ : \mu = ۱۲$ ناحیهٔ بحرانی به شکل

Scanned with CamScanner

$C = \{(x_۱, \cdots, x_۹) | \overline{x} \geq ۱۱/۵\}$ باشد، مقادیر α و β را به‌دست آورید.

۳) از یک جامعهٔ نرمال با واریانس ۰/۰۳۶ یک نمونهٔ n تایی گرفته شده است. کمترین تعداد نمونه لازم برای برابر شدن هر یک از احتمال خطای نوع اول و احتمال خطای نوع دوم با ۰/۰۱ را برای آزمون $H_۰ : \mu = ۳/۰$ در مقابل $H_۱ : \mu = ۳/۰۵$ محاسبه کنید.

۴) فرض کنید یک متغیر تصادفی گسسته دارای تابع احتمال زیر باشد

x	۱	۲	۳
$f_X(x)$	$\frac{۱-\theta}{۳}$	$\frac{\theta}{۳}$	$\frac{۲}{۳}$

اگر ناحیهٔ بحرانی برای آزمون $H_۰ : \theta = \frac{۱}{۳}$ در مقابل $H_۱ : \theta = \frac{۲}{۳}$ به شکل $C = \{۲, ۳\}$ باشد، توان آزمون را تعیین کنید.

۵) نسبت خانواده‌های ساکن در شهر بخصوصی که از کمپانی A شیر می‌خرند ۰/۶ است. اگر از یک نمونهٔ تصادفی ۱۰ خانواری ۳ یا کمتر از کمپانی A شیر بخرند فرض صفر $p = ۰/۶$ را به نفع فرض مقابل $p < ۰/۶$ رد می‌کنیم. احتمال خطای نوع اول را محاسبه نمایید. احتمال خطای نوع دوم را برای مقادیر $p = ۰/۳$، $p = ۰/۴$ و $p = ۰/۵$ محاسبه نمایید.

۶) فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{۱}{\theta} e^{-\frac{۱}{\theta}x} & x > ۰ \, , \, \theta > ۰ \\ ۰ & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

می خواهیم آزمون $\begin{cases} H_۰ : \theta = ۲۰۰ \\ H_۱ : \theta = ۵۰۰ \end{cases}$ را انجام دهیم. اگر $X > ۳۰۰$ مشاهده شود، فرض $H_۰$ را رد می کنیم. احتمال خطای نوع اول و دوم و توان آزمون را محاسبه کنید.

۷) فرض کنید $X_۱, \cdots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی از یک جامعهٔ نمایی با تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f_\theta(x) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)} & x \geq \theta \\ ۰ & x < \theta \end{cases}$$

Scanned with CamScanner

ناحیهٔ بحرانی آزمون نسبت درست‌نمایی برای آزمون $H_0 : \theta = \theta_0$ در مقابل $H_1 : \theta = \theta_1$ را به‌دست آورید.

۸) برای یک نمونه ۱۰ تایی از توزیع پواسن $P(\theta)$، ناحیهٔ بحرانی آزمون نسبت درست‌نمایی در سطح $\alpha = ۰/۰۵$ را برای آزمون $H_0 : \theta = ۳$ در مقابل $H_1 : \theta = ۴$ به‌دست آورید.

۹) فرض کنید $X_1, X_2, \cdots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع $N(\mu, \sigma^2)$ باشد.

(الف) برآوردگر حداکثر درست‌نمایی μ و σ^2 را به‌دست آورید.

(ب) ناحیهٔ بحرانی آزمون نسبت درست‌نمایی برای آزمون $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ در مقابل $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ را به‌دست آورید.

۱۰) متوسط قد دانشجویان مرد سال اول یک دانشکده بخصوص ۶۸/۵ اینچ با انحراف معیار ۲/۷ اینچ گزارش شده است. اگر یک نمونهٔ تصادفی ۵۰ تایی از دانشجویان سال اول فعلی دارای حد متوسط قد ۶۹/۷ اینچ باشد، آیا در سطح معنی‌دار ۰/۰۲ دلیلی برای تصور تغییر در حد متوسط قد وجود دارد؟

۱۱) لامپ‌های تلویزیون موجود در بازار دارای میانگین طول عمر ۱۲۰۰ ساعت با انحراف معیار ۳۰۰ ساعت هستند. کارخانه‌ای لامپ جدیدی تولید کرده و مدعی است که میانگین طول عمر لامپ‌های ساخت کارخانه‌اش بیشتر از ۱۲۰۰ ساعت است. برای بررسی این ادعا یک نمونهٔ ۱۰۰ تایی انتخاب و میانگین طول عمر ۱۲۶۵ ساعت به‌دست آمده است. آیا با ادعای صاحب کارخانه موافق هستید؟

۱۲) یک فرایند تولید رنگ موجود است که توزیع تولید روزانه آن نرمال با میانگین ۸۰۰ و انحراف معیار ۳۰ تن است. به منظور ازدیاد تولید اصلاحاتی در این فرایند پیشنهاد شده است و یک نمونهٔ تصادفی ۱۰۰ روزه از تولید فرایند اصلاح شده دارای میانگین ۸۱۲ تن است. در سطح معنی‌دار ۰/۰۱ آیا فرایند اصلاح شده میانگین تولید روزانه را افزایش می‌دهد؟

۱۳) برای هریک از آزمون‌های زیر اطلاعات داده شده، آمارهٔ آزمون را مشخص نمایید و نتیجه‌ی آزمون را بیان کنید. p- مقدار را حساب کرده و نتیجه را مجدداً بررسی نمایید. چه فرض (هایی) را برای حل مسئله در نظر گرفتید؟ (فرض کنید جامعه دارای توزیع نرمال است.)

Scanned with CamScanner

$i)\quad H_۰ : \mu = ۱۳۰ \ , \ H_۱ : \mu < ۱۳۰ \ ; \ \overline{x} = ۱۲۴/۲ \ , \ n = ۲۵ \ , \ \sigma = ۲۰ \ , \ \alpha = ۰/۱$

$ii)\quad H_۰ : \mu = ۵۹/۲ \ , \ H_۱ : \mu < ۵۹/۲ \ ; \ \overline{x} = ۶۱/۴ \ , \ n = ۳۶ \ , \ \sigma = ۳/۲ \ , \ \alpha = ۰/۰۱$

$iii)\quad H_۰ : \mu = ۱۲/۴ \ , \ H_۱ : \mu < ۱۲/۴ \ ; \ \overline{x} = ۱۳/۴ \ , \ n = ۱۶ \ , \ \sigma = ۴/۱ \ , \ \alpha = ۰/۲$

۱۴) در آزمون فرض $H_۰ : \mu = ۸۵$ در مقابل $H_۱ : \mu \neq ۸۵$ از جامعه‌ای نرمال با $\sigma = ۱۵$ گزارش شده است که چون $\overline{x} = ۷۵$ است، لذا فرض $H_۰$ در سطح یک درصد رد می‌شود. اندازهٔ نمونهٔ n چقدر بوده است؟ p- مقدار را به‌دست آورید.

۱۵) طول عمر یک نوع لاستیک دارای توزیع نرمال است. از یک نمونهٔ ۶ تایی طول عمرهای زیر را به‌دست آورده‌ایم. داده‌ها برحسب ۱۰۰۰۰ کیلومتر هستند.

۳/۵   ۴/۰   ۳/۸   ۳/۹   ۳/۶   ۳/۵

p- مقدار را برای آزمون $H_۰ : \mu = ۳/۵$ در مقابل $H_۱ : \mu \neq ۳/۵$ به‌دست آورید.

۱۶) فرض کنید که وزن غلات صبحانه در جعبه‌های ۱۰ اونسی دارای توزیع نرمال $N(\mu, \sigma^۲)$ است. شرکت تولید کنندهٔ غلات مدعی شده است که وزن جعبه‌ها از ۱۰/۱ اونس هم بیشتر است. برای یک نمونهٔ ۱۶ تایی از جعبه‌های غلات صبحانه میانگین وزن برابر ۱۰/۴ و انحراف استاندارد برابر ۰/۴ است.

(الف) آیا شما ادعای این شرکت را قبول می کنید؟

(ب) p- مقدار را برای این آزمون تقریب بزنید.

۱۷) فرض کنید X ضخامت آدامس‌های نعنایی است که یک ماشین خودکار تولید می‌کند و همچنین فرض کنید که X دارای توزیع نرمال $N(\mu, \sigma^۲)$ است. هدف شرکت تولید آدامس‌هایی با ضخامت ۷/۵ صدم اینچ است. می‌خواهیم فرض $H_۰ : \mu = ۷/۵$ را در مقابل یک فرض دو طرفه با استفاده از ۱۰ مشاهده آزمون کنیم.

(الف) آمارهٔ آزمون و یک ناحیهٔ بحرانی در سطح $\alpha = ۰/۰۵$ تعیین کنید.

(ب) مقدار آمارهٔ آزمون را براساس ۱۰ مشاهدهٔ زیر که به‌طور تصادفی از خط تولید انتخاب شده است به‌دست آورید و نتیجه تصمیم خود را اعلام کنید. واحد اندازه‌گیری‌ها براساس صدم اینچ است.

۷/۵۵   ۷/۷۵   ۷/۶۵   ۷/۶۰   ۷/۶۵

۷/۵۰   ۷/۵۰   ۷/۴۰   ۷/۴۰   ۷/۵۵

Scanned with CamScanner

(پ) آیا فاصلهٔ اطمینان ۹۵٪ برای μ شامل مقدار $\mu = ۷/۵$ است؟

۱۸) نمره‌های امتحان هوش یک دبیرستان دارای توزیع نرمال با انحراف معیار ۶ است. از یک گروه ۹ نفری امتحان هوش به عمل آورده‌ایم و نتایج زیر به‌دست آمده است

۶۳ ۷۲ ۶۴ ۶۹ ۵۹ ۶۵ ۶۶ ۶۴ ۶۵

مدیر دبیرستان ادعا می‌کند که میانگین نمره‌های هوش کل دبیرستان از ۶۵ بیشتر است. در سطح معنی‌دار ۰/۰۵ آیا ادعای مدیر دبیرستان را قبول می‌کنید؟

۱۹) مطالعهٔ آماری در گذشته نشان داده است که میزان غیبت کارمندان بر اثر بیماری در عرض سال دارای توزیع نرمال با میانگین ۱۵ روز است. پژوهش‌گری برای ۲۵ کارمند در سال گذشته شمارهٔ روزهای غیبت را به شرح زیر ثبت کرده است

۸ ۵ ۳۲ ۱۲ ۴۰ ۱۴ ۱۲ ۵۰ ۳ ۰ ۱۰ ۳۵ ۵

۹ ۲۳ ۵۸ ۲۲ ۱ ۱۰ ۱۶ ۱۸ ۱۴ ۲۰ ۴۷ ۴

در سطح معنی‌دار ۰/۰۵ آزمون کنید که در سال گذشته متوسط روزهای غیبت بیش از ۱۵ روز است.

۲۰) یک کارخانهٔ مواد شیمیایی به‌گونه‌ای طراحی شده است که روزانه به‌طور متوسط ۸۰۰ تن محصول داشته باشد. در ۵ روز متوالی، این کارخانه به‌ترتیب ۷۸۵، ۸۰۵، ۷۹۰، ۷۹۳ و ۸۰۲ تن محصول داشته است. با فرض نرمال بودن میزان محصول، آیا این داده‌ها نشان دهندهٔ کاهش در حد متوسط میزان محصول کارخانه است؟

۲۱) به منظور بررسی رشد جسمی کودکان ۱۰ ساله اندازهٔ قامت یک نمونه ۲۰ تایی از این کودکان اندازه‌گیری شد و نتایج زیر به‌دست آمد

۱۰۰ ۱۰۵ ۱۰۴ ۱۱۳ ۹۷ ۱۰۴ ۱۱۰ ۱۰۳ ۱۰۹ ۱۰۵

۱۰۶ ۱۰۴ ۱۰۵ ۱۱۱ ۹۸ ۱۰۶ ۱۰۳ ۱۱۰ ۱۰۲ ۱۰۸

با فرض نرمال بودن طول قد کودکان ۱۰ ساله مطلوب است

(الف) در سطح معنی‌دار ۰/۰۵ آیا می‌توان ادعا کرد که میانگین واقعی قد کودکان ۱۰ ساله غیر از ۱۰۴ است؟

(ب) در سطح معنی‌دار ۰/۱ آیا می‌توان ادعا کرد که واریانس واقعی قد کودکان ۱۰ ساله بیشتر از ۵ است؟

Scanned with CamScanner

۲۲) فرض کنید وزن بچه‌های نوزاد در بدو تولد در کشوری خاص دارای توزیع نرمال $N(۳۳۱۵, ۵۲۵^۲)$ است (واحد اندازه‌گیری برحسب گرم است). اگر X وزن نوزادان دختر در یک روستای بخصوص در آن کشور که در منزل متولد می‌شوند، باشد. آنگاه $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^۲)$.

(الف) با استفاده از ۱۱ مشاهده از X، آمارهٔ آزمون و ناحیهٔ بحرانی برای آزمون $H_۰ : \mu_X = ۳۳۱۵$ در مقابل $H_۱ : \mu_X > ۳۳۱۵$ (نوزادانی که در منزل متولد می‌شوند سنگین‌تر هستند) در سطح $\alpha = ۰/۰۱$ به‌دست آورید.

(ب) مقدار آمارهٔ آزمون را محاسبه و نتیجه‌گیری خود را بیان کنید.

مشاهدات : ۳۱۱۹ ۲۶۵۷ ۳۵۱۵ ۳۸۵۶ ۳۴۵۹ ۳۶۲۹

۳۶۲۹ ۳۳۴۵ ۳۰۶۲ ۳۶۲۹ ۳۳۴۵

(پ) p- مقدار را به‌دست آورید.

(ت) آمارهٔ آزمون و ناحیهٔ بحرانی را برای آزمون $H_۰ : \sigma_X^۲ = ۵۲۵^۲$ در مقابل $H_۱ : \sigma_X^۲ < ۵۲۵^۲$ (پراکندگی وزنی در نوزادانی که در منزل متولد می‌شوند کمتر است) در سطح $\alpha = ۰/۰۵$ به‌دست آورید.

(ث) با استفاده از مشاهده‌های بالا آمارهٔ آزمون را محاسبه و آزمون را نتیجه‌گیری کنید.

(ج) p- مقدار برای آزمون دوم چقدر است؟

۲۳) قطعهٔ زمینی به‌وسیلهٔ ۵ دانشجوی نقشه‌بردار، مساحی شده و مساحت‌های زیر برحسب جریب به‌دست آمده‌اند

۷/۲۳ ۷/۲۸ ۷/۲۱ ۷/۲۴ ۷/۲۷

با فرض نرمال بودن اندازه‌گیری، در سطح معنی‌دار ۰/۰۵ آیا می‌توان ادعا کرد که واریانس اندازه‌گیری ۰/۹ است؟

۲۴) از یک جامعهٔ نرمال یک نمونهٔ تصادفی ۱۶ تایی انتخاب شده و $\sum x_i = ۲۴$ و $\sum x_i^۲ = ۴۰$ به‌دست آمده است. در سطح معنی‌دار ۰/۰۵ آیا می‌توان ادعا کرد که واریانس این جامعه بیش از یک است؟

۲۵) اگر Y وزن نوزادان پسر در بدو تولد در همان ناحیهٔ تمرین ۲۳ باشند آنگاه $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^۲)$. با استفاده از نمونهٔ ۱۱ تایی زیر سوال‌های تمرین ۲۳ را پاسخ

Scanned with CamScanner

دهید.

$$۴۰۸۲ \quad ۳۶۸۶ \quad ۴۱۱۱ \quad ۳۱۷۵ \quad ۴۱۳۹$$

$$۳۶۸۶ \quad ۳۴۳۰ \quad ۳۲۸۹ \quad ۴۰۸۲$$

چه آزمون دیگری می‌توانید پیشنهاد دهید؟

۲۶) با استفاده از اطلاعات دو تمرین ۲۳ و ۲۵، آزمون $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ در مقابل $H_1 : \mu_X < \mu_Y$ و آزمون $H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ در مقابل $H_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$ را در سطح معنی‌دار $\alpha = ۰/۰۵$ انجام دهید.

۲۷) در یک بیمارستان بزرگ روانی، نمونه‌ای ۱۲ نفری از بیماران مبتلا به مونگلیسم را انتخاب کرده و میانگین مقدار اسیداوریک سرم $\overline{x}_1 = ۴/۵$ میلی‌گرم درصد میلی‌لیتر شده است. در بیمارستان عمومی دیگری نمونه‌ای ۱۵ نفری از افراد طبیعی هم‌سن و سال و هم‌جنس آن‌ها مقدار میانگین مزبور $\overline{x}_2 = ۳/۴$ میلی‌گرم درصد میلی‌لیتر شده است. اگر فرض کنیم که جامعه‌ها از توزیع نرمال پیروی کنند و دارای واریانس‌های مساوی و برابر ۱ باشند، آیا در سطح معنی‌دار ۰/۰۵ می‌توان گفت که حد متوسط اسیداوریک سرم برای دو گروه بیمار یکسان است؟

۲۸) فعالیت سرم مکمل (C_{HSO}) در ۲۰ انسان ظاهراً سالم و ۱۰ انسان بیمار آزمایش شده و در اثر آزمایش نتایج زیر به‌دست آمده است

انسان	n	$\overline{x}$	s
مبتلا به بیماری	۱۰	۶۲/۶	۳۳/۸
سالم	۲۰	۴۷/۲	۱۰/۱

با استفاده از تجربیات گذشته می‌دانیم که جامعه‌های مورد نمونه برداری تقریباً دارای توزیع نرمال و دارای واریانس‌های یکسان هستند. آیا می‌توان ادعا کرد که حد متوسط دو جامعه با هم برابرند؟

۲۹) X و Y را مقدار جرم (برحسب میلی‌گرم) سیگارهای فیلتردار و بی‌فیلتر در نظر بگیرید. فرض کنید که X و Y به‌ترتیب دارای توزیع‌های $N(\mu_X, \sigma_X^2)$ و $N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ هستند. می‌خواهیم آزمون $H_0 : \mu_X - \mu_Y = ۰$ را در مقابل $H_1 : \mu_X - \mu_Y < ۰$ برای نمونهٔ $n = ۹$ و $m = ۱۱$ برای مشاهده‌های X و Y انجام دهیم.

(الف) آمارهٔ آزمون و ناحیهٔ بحرانی را برای سطح معنی‌دار $\alpha = ۰/۰۱$ تعیین کنید.

Scanned with CamScanner

(ب) نمونهٔ ۹ = n تایی از مشاهده‌های X به قرار

۰/۴	۱/۰	۰/۸	۰/۹	۰/۴	۰/۷	۰/۱	۱/۱	۰/۹

و نمونهٔ ۱۱ = m تایی از مشاهده‌های Y به قرار

۲/۱	۱/۶	۱/۳	۱/۲	۱/۰	۱/۹	۱/۴	۰/۵	۱/۶	۰/۹	۱/۵

است. مقدار آمارهٔ آزمون را محاسبه و نتیجهٔ آزمون را به‌دست آورید.

۳۰) به‌طور متوسط ضخامت آدامس میوه‌ای و آدامس میوه‌ای بادکنکی برابر ۶/۷ درصد اینچ است. فرض کنید X ضخامت آدامس میوه‌ای و Y ضخامت آدامس میوه‌ای بادکنکی است و X و Y از هم مستقل هستند. با توجه به اینکه آدامس بادکنکی کشسانی بیشتری از آدامس معمولی دارد به نظر می‌رسد که باید ضخامت بیشتری داشته باشد. می‌خواهیم آزمون $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ در مقابل $H_1 : \mu_X < \mu_Y$ را برای یک نمونهٔ ۵۰ = n تایی از X و یک نمونهٔ ۴۰ = m تایی از Y انجام دهیم. مشاهده‌های X عبارت است از

۶/۸۵	۶/۷۰	۶/۹۰	۶/۸۵	۶/۹۰	۶/۷۵	۶/۷۵	۶/۷۰	۶/۶۰	۶/۸۵
۶/۹۵	۶/۹۵	۶/۶۰	۶/۵۵	۶/۷۰	۶/۷۰	۶/۷۰	۶/۷۵	۶/۷۰	۶/۶۰
۶/۶۰	۶/۵۵	۶/۵۵	۶/۶۵	۶/۷۰	۶/۶۰	۶/۷۵	۶/۷۰	۶/۸۰	۶/۸۰
۶/۶۵	۶/۷۰	۶/۷۵	۶/۵۰	۶/۷۵	۶/۶۰	۶/۷۵	۶/۸۰	۶/۷۰	۶/۶۰
۶/۶۰	۶/۸۰	۶/۶۵	۶/۶۰	۶/۶۵	۶/۶۰	۶/۶۵	۶/۵۵	۶/۷۰	۶/۷۰

و مشاهده‌های Y عبارت است از

۶/۵۵	۶/۵۵	۶/۶۰	۶/۶۵	۶/۹۰	۶/۹۰	۶/۷۵	۶/۷۰	۷/۰۵	۷/۱۰
۷/۰۵	۷/۱۵	۶/۹۰	۶/۹۵	۷/۱۰	۶/۹۵	۶/۸۵	۶/۶۰	۶/۹۰	۶/۸۵
۶/۷۵	۶/۷۰	۶/۸۰	۶/۹۰	۶/۷۵	۷/۰۵	۶/۹۵	۶/۸۵	۶/۹۰	۶/۷۰
۶/۹۵	۶/۹۰	۶/۷۰	۶/۷۰	۶/۹۰	۶/۹۰	۶/۷۰	۶/۷۰	۶/۹۰	۶/۹۰

نشان دهید که فرض H_0 در سطح معنی‌دار ۰/۰۱ رد می‌شود.

۳۱) مطالعه‌ای در زمینهٔ موثر بودن آزمایشگاه همراه با درس فیزیک انجام شده است. به دانشجویان اجازه داده شده است که درس فیزیک سه ساعتی را بدون آزمایشگاه

یا فیزیک چهار ساعتی را با آزمایشگاه در یک ترم بگیرند. در گروهی که آزمایشگاه داشتند ۱۱ دانشجو شرکت داشته که معدل نمرهٔ آن‌ها در امتحان ۸۵ با انحراف معیار ۴/۷ شده است و در گروه بدون آزمایشگاه ۱۷ دانشجو شرکت داشته که معدل نمرهٔ آن‌ها ۷۹ با انحراف معیار ۶/۱ شده است. فرض کنید که جامعه‌ها دارای توزیع نرمال با واریانس‌های مساوی هستند. آیا در سطح معنی‌دار ۰/۰۱ می توان گفت که آزمایشگاه نمرهٔ دانشجویان را به‌طور متوسط ۸ نمره بالا خواهد برد؟

۳۲) دو نوع محافظ سپر اتومبیل مقایسه می‌شوند، ۶ تا از هر نوع را به ماشین محکمی سوار می‌کنند، سپس هرکدام از ماشین‌ها را با سرعت ۲۰ کیلومتر در ساعت با دیوار سختی برخورد می‌دهند. هزینه‌های تعمیرات به‌صورت زیر به‌دست آمده‌اند

نوع ۱	۱۱۹	۱۰۲	۱۶۵	۱۲۳	۱۴۸	۱۰۷
نوع ۲	۱۲۹	۱۳۳	۱۵۱	۱۱۲	۱۱۵	۱۳۴

با فرض نرمال بودن جامعه‌ها و تساوی واریانس‌ها، آیا در سطح معنی‌دار ۰/۰۱ می‌توان گفت که تفاوت میان میانگین‌های دو جامعه وجود دارد؟

۳۳) داده‌های زیر در دورهٔ یک‌ساله‌ای از اتلاف متوسط وقت نیروی انسانی ناشی از خستگی کاری را در ۱۰ بیمارستان (قبل و بعد) از به مرحلهٔ اجرا گذاشتن یک برنامه استراحت برای کارکنان گرداوری شده است.

(۳۶, ۴۵) (۶۰, ۷۳) (۴۴, ۴۶) (۱۱۹, ۱۲۴) (۳۵, ۳۳)

(۵۱, ۵۷) (۷۷, ۸۳) (۲۹, ۳۴) (۲۴, ۲۶) (۱۱, ۱۷)

در سطح معنی‌دار ۰/۰۵ آزمون کنید که آیا برنامه استراحت در کاهش اتلاف وقت مؤثر بوده یا خیر؟

۳۴) قد ده نوجوان پسر شانزده ساله را صبح پس از برخاستن از خواب و شب قبل از خوابیدن اندازه‌گیری کرده و نتایج زیر را به‌دست آورده‌اند.

صبح	۱۶۳/۳	۱۶۹/۷	۱۶۸/۵	۱۶۵/۹	۱۷۷/۷
شب	۱۶۱/۵	۱۶۸/۲	۱۶۵/۵	۱۶۴/۴	۱۷۵/۷
صبح	۱۷۹/۶	۱۶۸/۸	۱۶۹/۲	۱۶۷/۹	۱۸۱/۸
شب	۱۷۶/۶	۱۶۶/۵	۱۶۷/۴	۱۶۶/۳	۱۷۹/۷

Scanned with CamScanner

آیا داده‌ها دلیل کافی به‌دست می‌دهند که تصور کنیم پسران شانزده ساله شب‌ها کوتاهتر از صبح‌ها هستند؟ (در سطح معنی‌دار ۱۰ درصد آزمون کنید.)

۳۵) در طول آزمایشی که در آن از حیوانات آزمایشگاهی استفاده می‌شود، داده‌های زیر روی خون‌ریزی قشر کلیوی در طول شرایط کنترل و در حین انجام بی‌حسی معین ثبت شده است

شمارهٔ حیوان	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
کنترل	۲/۲۳	۲/۵۵	۱/۹۵	۲/۷۹	۳/۲۱	۲/۷۹	۳/۴۴	۲/۵۸
در حین انجام بی‌حسی	۲/۰۰	۱/۷۱	۲/۲۲	۲/۷۱	۱/۸۳	۲/۱۴	۳/۷۲	۲/۱۰
شمارهٔ حیوان	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	
کنترل	۲/۶۶	۲/۳۱	۳/۴۳	۲/۳۷	۱/۸۲	۲/۹۸	۲/۵۳	
در حین انجام بی‌حسی	۲/۵۸	۱/۳۲	۳/۷۰	۱/۵۹	۲/۰۷	۲/۱۵	۲/۰۵	

آیا بر مبنای این داده‌ها می‌توان نتیجه گرفت که خون‌ریزی در طول شرایط کنترل و در حین انجام بی‌حسی با هم برابرند (مقدار α را ۵ درصد فرض کنید).

۳۶) داده‌های زیر مربوط به ۲۲ شناگر مرد در شنای آزاد ۵۰ یاردی در یکی از مسابقه‌های قهرمانی در یک فصل است. برای این داده‌ها x (مولفه اول) مربوط به بهترین زمان به‌دست آمده شناگر در فصل و y (مولفه دوم) مربوط به زمان به‌دست آمده شناگر در این مسابقه است.

(۲۲/۸۴, ۲۳/۵۸) (۲۳/۸۰, ۲۳/۶۱) (۲۴/۷۶, ۲۳/۶۳) (۲۴/۹۷, ۲۳/۹۸)

(۲۲/۱۰, ۲۲/۷۴) (۲۳/۴۱, ۲۲/۷۵) (۲۲/۹۳, ۲۲/۸۳) (۲۴/۰۷, ۲۳/۵۷)

(۲۲/۹۱, ۲۲/۳۴) (۲۲/۳۸, ۲۲/۳۹) (۲۳/۵۹, ۲۲/۶۲) (۲۳/۰۸, ۲۲/۷۰)

(۲۲/۷۶, ۲۱/۶۶) (۲۱/۳۴, ۲۱/۶۸) (۲۲/۴۶, ۲۱/۷۳) (۲۲/۰۸, ۲۱/۹۵)

(۲۱/۳۶, ۲۱/۳۵) (۲۲/۲۶, ۲۱/۵۷) (۲۱/۸۰, ۲۱/۵۸) (۲۱/۸۲, ۲۱/۶۸)

(۲۳/۸۰, ۲۲/۵۳) (۲۲/۹۸, ۲۳/۱۷)

قرار دهید $d = x - y$ و فرض کنید که D دارای توزیع نرمال $N(\mu_D, \sigma_D^2)$ است. فرض $H_0 : \mu_D = 0$ را در مقابل $H_1 : \mu_D > 0$ آزمون کنید. سطح معنی‌دار α را چقدر انتخاب می‌کنید. دلیل خود را توضیح دهید.

۳۷) با انجام آزمایش برای تعیین میزان چسبندگی دو نوع روغن خودرو A و B نتایج زیر به‌دست آمده است

نوع A	۱۰/۲۸	۱۰/۲۷	۱۰/۳۰	۱۰/۳۲	۱۰/۲۷	۱۰/۲۷	۱۰/۲۸	۱۰/۲۹
نوع B	۱۰/۳۱	۱۰/۳۱	۱۰/۲۶	۱۰/۳۰	۱۰/۲۷	۱۰/۳۱	۱۰/۲۹	۱۰/۲۶

Scanned with CamScanner

با فرض نرمال بودن دو جامعه مطلوب است.

(الف) در سطح معنی‌دار ۰/۰۲ مساوی بودن واریانس دو جامعه را آزمون کنید.

(ب) با استفاده از نتیجهٔ (الف) در سطح معنی‌دار ۰/۰۵ مساوی بودن میانگین‌های دو جامعه را آزمون کنید.

۳۸) طول عمر ۹ باطری اتومبیل ساخت کارخانهٔ A به‌طور متوسط ۱۳۰۵ ساعت با انحراف استاندارد ۴۲۰ ساعت و طول عمر ۱۶ باطری اتومبیل ساخت کارخانهٔ B به‌طور متوسط ۱۲۱۰ ساعت با انحراف استاندارد ۳۸۰ ساعت بوده است. تحت فرض نرمال بودن جامعه‌ها، مطلوب است:

(الف) در سطح معنی‌دار ۰/۱۰ تساوی واریانس‌ها را بیازمایید.

(ب) در سطح معنی‌دار ۰/۱۰، آیا میانگین طول عمر برای باطری‌های دو کارخانه یکسان است.

۳۹) برای اطلاعات تمرین ۳۵ فصل سوم، آزمون $H_۰ : \sigma_X^۲ = \sigma_Y^۲$ در مقابل $H_۱ : \sigma_X^۲ < \sigma_Y^۲$ را در سطح معنی‌دار ۰/۰۱ انجام دهید.

۴۰) یک نمونهٔ ۷ تایی از شرکت X دارای متوسط طول عمر ۸۹۱ ساعت و انحراف استاندارد ۹۲/۰۱ ساعت است و یک نمونهٔ ۱۰ تایی از شرکت Y دارای متوسط طول عمر ۵۹۲ ساعت و انحراف استاندارد ۴۸/۵۶ ساعت است. با استفاده از این داده‌ها فرض $H_۰ : \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} = ۱$ را در مقابل $H_۱ : \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} > ۱$ آزمون کنید. فرض کنید $\alpha = ۰/۰۵$.

۴۱) اگر نسبت خصوصیتی در یک نمونهٔ تصادفی به اندازهٔ $n = ۹۰۰$ برابر ۰/۳ باشد، مطلوب است:

(الف) فرض مساوی بودن نسبت خصوصیت مورد مطالعه را در جامعه با عدد ثابت $\frac{۱}{۳}$ آزمون کنید.

(ب) کوچک‌تر بودن از $\frac{۱}{۳}$ را آزمون کنید.

۴۲) اگر غلظت معینی از یک حشره‌کش موجب مرگ ۵۰ درصد از پشه‌های مورد آزمایش شود و ما ۲۰۰ حشره را با حشره‌کش دیگری با همان غلظت آزمایش نموده و ملاحظه کنیم که ۱۲۰ حشره کشته می‌شود، آیا می‌توان در این غلظت، حشره‌کش دوم را از حشره‌کش اول مؤثرتر دانست؟

۴۳) تجربیات گذشته گویای این مطلب است که حدود ۴۰ درصد بیمارانی که از نوعی

Scanned with CamScanner

سرطان رنج می‌برند، با تکنیک جراحی A بهبود نسبی می‌یابند. محققی تکنیک جدیدی را پیشنهاد کرده و مدعی است که کاربرد تکنیک جدید احتمال بهبود را افزایش می‌دهد. اینک ۱۱۰ بیمار مبتلا به همان نوع سرطان، تحت عمل جراحی با تکنیک B قرار گرفته و ملاحظه شد که ۵۰ نفر از آن‌ها بهبود حاصل کرده‌اند. دربارهٔ ادعای محقق نظر دهید.

۴۴) به منظور بررسی تأثیر واکسن معینی در پیشگیری از بیماری مربوط به آن، ۸۲۸ کودک به‌طور تصادفی به دو گروه تقسیم گردید. گروه اول که شامل ۵۴۰ کودک بود واکسینه شدند و گروه دوم که شامل ۲۸۸ کودک بود به‌عنوان گروه شاهد در نظر گرفته شدند. از گروه واکسینه شدگان ۱۴۱ کودک و از گروه شاهد ۱۲۹ کودک به بیماری مورد مطالعه مبتلا شدند. درباره تأثیر واکسیناسیون بحث کنید.

۴۵) اگر اطلاعات تمرین ۴۵ مربوط به مطالعه‌ای از نوع مقطعی باشد، یعنی در جمع‌آوری اطلاعات از کودکان یک منطقه‌ای مشاهده شود که از ۲۷۰ کودک بیمار ۱۴۱ کودک و از ۵۵۸ کودک سالم ۳۹۹ کودک واکسینه شده‌اند به سؤال مسئله فوق پاسخ دهید.

۴۶) محققی برای اینکه تأثیر دارویی را روی بیماری معینی آزمایش کند صد بیمار را به‌صورت تصادفی به دو گروه ۵۰ تایی تقسیم کرد. به یک گروه داروی مد نظر، و به گروه دیگر ماده‌ای که از نظر رنگ، بو و مزه شبیه داروی مد نظر بود ولی در واقع ماده خنثی محسوب می‌گردد تجویز نمود و ملاحظه کرد که از گروه اول ۳۰ نفر و از گروه دوم ۲۴ نفر بهبود حاصل نمودند. دربارهٔ تأثیر این دارو روی بیماری مد نظر بحث کنید.

Scanned with CamScanner