بنام خدا

ماتریس ها، بردارها

قطر اصلی

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

تعداد ستون ← n ، تعداد سطر ← m

به صورت

$$A = [a_{ij}] \quad \begin{matrix} i = 1 \cdots m \\ j = 1 \cdots n \end{matrix}$$

- اگر $m = n$ ماتریس مربعی نامیده می شود.

- اگر سطرها و ستون های یک ماتریس را عوض کنیم ماتریس transpose یا ترانهاده می گویند. با A^T یا A' نشان می دهیم.

ماتریس قطری : (diagonal matrix) اگر در یک ماتریس مربعی A تمام عناصر غیر قطری آن صفر باشد و فقط روی قطر اصلی عدد داریم

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ 0 & & \ddots \; a_{nn} \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(a_{11} \cdots a_{nn})$$

ماتریس قطری که تمام عناصر روی قطر آن 1 باشد ماتریس واحد می گویند

$$\text{Identity matrix} = I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \; 1 \end{pmatrix}$$

ماتریس بالا مثلثی و پایین مثلثی : ماتریس مربعی که عناصر زیر قطر آن صفرند بالا مثلثی و ماتریس مربعی که عناصر بالای قطر صفرند پایین مثلثی می گویند.

ماتریس متقارن اگر A ماتریس مربعی باشد که ترانهاده اش با خودش برابر باشد

$$\forall i,j \quad a_{ij} = a_{ji}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

ماتریس متعامد هرگاه $A^T = A^{-1}$ آن گاه A متعامد است

A^{-1} وارون ماتریس A است یعنی $AA^{-1} = I$ پس $\underbrace{AA^T = I}_{\text{در ماتریس متعامد}}$

جمع ماتریس ها: دو ماتریس هم بعد قابل جمع اند و درایه های نظیر به نظیر جمع می شوند

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 3} \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 8 & -2 & -3 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

ضرب اسکالر در ماتریس: حاصلضرب یک اسکالر مثل K در A به این صورت است که اسکالر در تمام درایه ها ضرب می شود

$$K = -1 \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$KA = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

ضرب ماتریسها : دوماتریس درصورتی درهم ضرب می شوند که تعداد ستون های ماتریس اول با تعداد سطرهای ماتریس دوم برابر باشند

$$A_{n\times k} \times B_{k\times m} = C_{n\times m}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+6 & 8 \\ 3-8+2 & 4+4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12 & 8 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$$

دترمینان ماتریس 2x2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 1 - 6 = -5$$

ضرب قطر اصلی − ضرب قطر فرعی

برای ماتریس های بزرگتر با عملیات سطری یا ستونی ماتریس را تبدیل به بالا مثلثی یا پایین مثلثی می کنید و حاصل دترمینان ضرب روی قطر اصلی است.

وارون ماتریس 2x2 .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \quad |A| \neq 0$$

شرط وارون پذیری

$AA^{-1} = I$ باید

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1/5 & 2/5 \\ 3/5 & -1/5 \end{pmatrix}$$

وارون ماتریس های بزرگتر:

ابتدا ماتریس را به ماتریس های کوچکتر افراز کنید

$$A=\left(\begin{array}{c|c} a_{11} \cdots & \cdots a_{1n} \\ \hline \vdots & \vdots \\ a_{n1} \cdots & \cdots a_{nn} \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right)$$

به طوری که A_{11} و A_{22} مربع و وارون پذیر باشند آنگاه

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A^{11} & A^{12} \\ A^{21} & A^{22} \end{pmatrix}$$

$$A^{11}=(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}$$

$$A^{12}=-A_{11}^{-1}A_{12}A^{22}$$

$$A^{21}=-A_{22}^{-1}A_{21}A^{11}$$

$$A^{22}=(-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}+A_{22})^{-1}$$

مثال.

$$A=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \qquad A_{11}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{22}=2 \qquad A_{12}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A_{21}=(2 \ \ 1)$$

$$A^{11}=(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}=\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}-\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\frac{1}{2}(2 \ \ 1)}_{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}\right)^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$A^{22}=(-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}+A_{22})^{-1}=\Big(-(2 \ \ 1)\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}}_{\frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}+2\Big)^{-1}=-1/4$$

$$A^{21}=-A_{22}^{-1}A_{21}A^{11}=-\frac{1}{2}(2 \ \ 1)\begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}=\left(\frac{3}{4} \ \ \frac{1}{4}\right)$$

$$A^{12}=-A_{11}^{-1}A_{12}A^{22}=-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}(-1/4)=\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Subject:
Date

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 3/4 & 1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$$

Idempotent

ماتریس خودتوان ماتریس متقارنی که هر تعداد بار در خودش ضرب شود حاصل خود ماتریس شود $A^2 = A \quad A^3 = A \ldots$

Singular

ماتریس منفرد (ویژه) ماتریس مربعی A را ویژه یا منفرد می گوییم هرگاه $|A| = 0$ در غیر این صورت ماتریس نامنفرد (ناویژه) نامیده می شود

فقط ماتریس های ناویژه وارون دارند.

اثر ماتریس : (trace) مجموع درایه های روی قطر اصلی یک ماتریس مربعی را اثر ماتریس می گویند.

- یکانی سطری و یکانی سطری کاهش کردن ماتریس :

① ابتدا اولین ستون غیرصفر از سمت چپ ماتریس را بیابید و اولین درایه غیرصفر ستون را مشخص کنید فرض کنید این درایه در سطر i ام است

② جای سطر i ام و سطر اول را عوض کنید

③ همه درایه های سطر مذکور که اکنون سطر اول است را بر اولین درایه غیرصفر تقسیم کنید

۴) با افزودن مضارب مناسبی از سطر اول به سطرهای بعدی درایه های زیر یک ایجاد شده را صفر کنید (با عملیات سطری)

۵) مجدداً سطر اول را نادیده و الگوریتم را تکرار کنید.

(ماتریس حاصل باید به صورت پله ای باشد به طوری که هر سطر با یک شروع شود و سطرهای صفر به انتهای ماتریس منتقل کنید)

مثال:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\cancel{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

نکته: اعمال سطری مجاز
۱) تعویض جای دو سطر
۲) ضرب یک سطر در عددی مخالف صفر
۳) افزودن مضربی از یک سطر به سطر دیگر

سطری کاهش یافته: اگر درایه های بالای ۱ را هم صفر کنید ماتریس را پلکانی سطری کاهش یافته می گویند.

Subject:
Date

مثال.

اولین درایه غیرصفر

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & -6 & 2 \\ \boxed{3} & -3 & 6 & 3 & -9 \\ -1 & 2 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

اولین ستون غیرصفر

پس چون اولین درایه غیرصفر ۳ است این سطر را به سطر اول منتقل کنید

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 & 3 & -9 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

اکنون سطر اول را بر ۳ تقسیم می‌کنیم

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

حالا زیر یک را صفر کنید سطر اول + سطر سوم و سطر اول × ۲- با سطر چهارم جمع

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ \hline 0 & 2 & 4 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

سطر اول را نادیده بگیرید اولین ستون غیرصفر

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

پس سطر دوم را تقسیم بر 2 کنید

زیر 1 ایجاد شده را صفر کنید

(سطر دوم × 1- با سطر سوم جمع)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

دو سطر اول را کنار بگذارید اولین ستون غیرصفر

Subject :
Date

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

درایه زیر یک را صفر کنید سطر سوم $\times 2 +$ با سطر سوم

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$ پلکانی سطری

اکنون برای اینکه تبدیل کنید به پلکانی سطری کاهش یافته

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ سطر اول + سطر دوم

سطر سوم $\times (-2) +$ با سطر دوم

سطر سوم $\times (-4) +$ سطر اول

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -8 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

نکته کاربرد پلکانی سطری یا سطری کاهش یافته در حل دستگاه معادلات خطی است

مثال

$$\begin{cases} 2x_2 + 4x_3 - 6x_4 = 2 \\ 3x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 = -9 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$$

Subject :
Date

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & -6 \\ 3 & -3 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$ ماتریس ضرایب

$$\underset{\sim}{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$ بردار معلوم

$$G = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 4 & -6 & 2 \\ 3 & -3 & 6 & 3 & -9 \\ -1 & 2 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

روش گاوس :

پلکانی سطری

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -3 \\ x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_3 + \frac{3}{2}x_4 = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

دستگاه ساده می شود

روش گاوس جردن :

پلکانی سطری کاهش یافته

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -8 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x_1 - 8x_4 = 8 \\ x_2 - 6x_4 = 6 \\ x_3 + \frac{3}{2}x_4 = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

اگر ۲ ۰ می شد جواب یکتا داشت

که بی‌نهایت جواب دارد کافیست یکی را t بگیرید

$$x_4 = t \Rightarrow x_3 = -\frac{5}{2} - \frac{3}{2}t \rightarrow x_2 = 6 + 6t$$

$$x_1 = 8 + 8t$$

مثلا $t=1$ ،

$$\begin{cases} x_1 = ۱۶ \\ x_۲ = ۱۲ \\ x_۳ = -۴ \\ x_۴ = ۱ \end{cases}$$

Date

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

Eigen values and Eigen vectors

فرض کنید A ماتریس مربعی باشد اگر به ازای عددی مانند λ برداری مانند $\underset{\sim}{x} \neq 0$ وجود داشته باشد که

$$A\underset{\sim}{x} = \lambda \underset{\sim}{x}$$

در این صورت به λ مقدار ویژه A و به $\underset{\sim}{x}$ بردار ویژه ی متناظر λ می گویند و به زوج $(\lambda, \underset{\sim}{x})$ زوج ویژه ماتریس A می گویند

تعداد مقادیر ویژه و بردار ویژه برابر بعد ماتریس است مثلاً ماتریس 2×2 دو مقدار ویژه و دو بردار ویژه دارد و به همین ترتیب ماتریس 3×3، 3 مقدار ویژه و 3 بردار ویژه دارد ...

نکته: برای بدست آوردن مقادیر ویژه باید $|A - \lambda I| = 0$ را حل کنید و برای بردار ویژه $(A - \lambda I)\underset{\sim}{x} = 0$ که معادلات ایجاد شده را از روش گاوس یا گاوس جردن حل می کنید.

Subject:
Date

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$$

حل

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \left| \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 9 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)^2 - 36 = 0 \quad \begin{array}{l} \nearrow \lambda_1 = -5 \\ \searrow \lambda_2 = 7 \end{array}$$

$$(A - \lambda_1 I) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 = 0 \\ 9x_1 + 6x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 9 & 6 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 0 \\ 9 & 6 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1 + 2/3\, x_2 = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = -3 \end{array}$$ یک جواب $$\underset{\sim}{x_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

بردار ویژه دوم

$$(A - \lambda_2 I) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -6x_1 + 4x_2 = 0 \\ 9x_1 - 6x_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} -6 & 4 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2/3 & 0 \\ 9 & -6 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1 - 2/3\, x_2 = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \underset{\sim}{x_2}$$

Subject:
Date

اندازه بردار :

$$\underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \|\underset{\sim}{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

$$\underbrace{\sqrt{\underset{\sim}{x} \cdot \underset{\sim}{x}}}_{\text{ضرب داخلی}} = \|x\|$$

ضرب داخلی

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1^2 + \dots + x_n^2$$

زاویه‌ی بین دو بردار :

$\underset{\sim}{x}$, $\underset{\sim}{y}$ دو بردار $\Rightarrow \cos\theta = \dfrac{\underset{\sim}{x} \cdot \underset{\sim}{y}}{\|\underset{\sim}{x}\| \, \|\underset{\sim}{y}\|}$

اگر $\underset{\sim}{x} \cdot \underset{\sim}{y} = 0$ دو بردار عمودند.

Subject :
Date

((تجزیه SVD))

وقتی ماتریس را به عوامل سازنده‌ی آن تجزیه کنیم ، تجزیه ماتریس می گویند

روش های مختلفی برای تجزیه ماتریس ها وجود دارد یکی از این روش ها ،

روش Singular value Decomposition (SVD)

است . فرض کنید A یک ماتریس m x n به شرط فرمول کلی

SVD به صورت زیر است

$$\underset{m\times n}{A} = \underset{m\times n}{U}\ \underset{n\times n}{S}\ \underset{n\times n}{V}^{T}$$

U ← متعامد   V ← متعامد   S ← قطری

پس ماتریس A به سه ماتریس شکسته شد

مثال . SVD ماتریس $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 2\\ 2 & 3 & -2\end{bmatrix}$ را بیابید

① ابتدا AA^T را محاسبه کنید

$$AA^T = \begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ 2 & 3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}17 & 8\\ 8 & 17\end{pmatrix}$$

② مقادیر ویژه‌ی AA^T را بیابید

$$|AA^T - \lambda I| = \left|\begin{pmatrix}17 & 8\\ 8 & 17\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\right|$$

$\Delta x = \lambda x$

Subject:
Date

$$= \left| \begin{pmatrix} 17-\lambda & +8 \\ +8 & 17-\lambda \end{pmatrix} \right| = (17-\lambda)^2 - 64$$

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (ad)-(bc)$

$$= \lambda^2 + 34\lambda + 225 = 0$$

$$= (\lambda - 25)(\lambda - 9) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 25 \\ \lambda_2 = 9 \end{cases}$$

۳) اکنون بردارهای ویژه‌ی متناظر با λها را بیابیم (برای A^TA)

$(A^TA - \lambda I)\underset{\sim}{x} = 0$

$$A^TA - 25I = \begin{pmatrix} -12 & 12 & 2 \\ 12 & -12 & -2 \\ 2 & -2 & -17 \end{pmatrix}$$

$$A^TA = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}_{3\times 2} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 13 & 12 & 2 \\ 12 & 13 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A^TA - 25I = \begin{pmatrix} 13 & 12 & 2 \\ 12 & 13 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 12 & 2 \\ 12 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -17 \end{pmatrix}$$

گام دوم: پلکانی سطری کاهش یافته $\longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ \cancel{*} \end{cases} \longrightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \end{matrix}\right\} \underset{\sim}{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{تقسیم بر اندازه}]{\text{استاندارد می‌کنید}} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \underset{\sim}{v}_1$$

به همین ترتیب بردار ویژه $\lambda_2 = 9$.

$$A^TA - 9I = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 2 \\ 12 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{پلکانی سطری کاهش یافته}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
>
> A=as.matrix(data.frame(c(2,1), c(-3,4), c(0,2)))
> A
     c.2..1. c..3..4. c.0..2.
[1,]       2       -3       0
[2,]       1        4       2
> B=as.matrix(data.frame(c(6,-1), c(1,0), c(-3,4)))
> B
     c.6...1. c.1..0. c..3..4.
[1,]        6       1       -3
[2,]       -1       0        4
> c=A+B
> c
     c.2..1. c..3..4. c.0..2.
[1,]       8       -2      -3
[2,]       0        4       6
>
> k=-1
> k*A
     c.2..1. c..3..4. c.0..2.
[1,]      -2        3       0
[2,]      -1       -4      -2
>
> B1=as.matrix(data.frame(c(3,-2,1), c(4,0,2)))
> A%*%B1
     c.3...2..1. c.4..0..2.
[1,]          12          8
[2,]          -3          8
>
> A1=as.matrix(data.frame(c(1,3), c(2,1)))
> det(A1)
[1] -5
> solve(A1)
        [,1] [,2]
c.1..3. -0.2  0.4
c.2..1.  0.6 -0.2
> trA1 <- sum(diag(A1))
>  trA1
[1] 2
>
```

```
> A2=as.matrix(data.frame(c(1,-1,2), c(0,1,1),c(2,0,2)))
> solve(A2)
              [,1]  [,2]  [,3]
c.1...1..2. -0.50 -0.50  0.50
c.0..1..1.  -0.50  0.50  0.50
c.2..0..2.   0.75  0.25 -0.25
>
>
> A3=as.matrix(data.frame(c(1,9), c(4,1)))
> eigen(A3)
eigen() decomposition
$values
[1]  7 -5

$vectors
          [,1]       [,2]
[1,] 0.5547002 -0.5547002
[2,] 0.8320503  0.8320503

>
```

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - \frac{1}{4}x_3 = 0 \\ x_2 + \frac{1}{4}x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 4 \end{matrix} \Rightarrow 1^2 + (-1)^2 + 4^2 = 18$$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{v_2} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{18} \\ -1/\sqrt{18} \\ 4/\sqrt{18} \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{١٨} + \frac{1}{١٨} + \frac{١٦}{١٨} = 1$$

④ اکنون v_3 را پیدا کنید . $\underset{\sim}{v_3}$ باید بر $\underset{\sim}{v_2}$ و $\underset{\sim}{v_1}$ عمود باشد چون

$$\underset{\sim}{v_1}^T \underset{\sim}{v_2} \quad \left(\tfrac{1}{\sqrt2}\ \tfrac{1}{\sqrt2}\ 0\right)\begin{pmatrix} a \\ -a \\ c \end{pmatrix} = 0 \qquad v_3 = \begin{pmatrix} a \\ -a \\ c \end{pmatrix} \quad \text{پس باید} \quad \underset{\sim}{v_1} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

از طرفی $\underset{\sim}{v_2}^T \underset{\sim}{v_3} = 0$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{18}} \quad -\frac{1}{\sqrt{18}} \quad \frac{4}{\sqrt{18}}\right)\begin{pmatrix} a \\ -a \\ c \end{pmatrix} = \frac{2a}{\sqrt{18}} + \frac{4c}{\sqrt{18}} = 0$$

$$\Rightarrow -a = 2c$$

پس $\underset{\sim}{v_3} = \begin{pmatrix} a \\ -a \\ -a/2 \end{pmatrix}$ و برای اینکه بردار یکه شود

$$\underset{\sim}{v_3} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} \qquad \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = 1$$

جذر λ ها

$$\underset{2\times3}{A} = USV^T = \underset{2\times2}{U}\underset{2\times3}{\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}}\underset{3\times3}{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{18}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{4}{\sqrt{18}} \\ \frac{2}{3} & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix}}$$

⑤ برای پیدا کردن u از فرمول $u_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} A v_i$

$$u_1 = \frac{1}{5}\underset{2\times3}{\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}}\underset{3\times1}{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2} \\ \frac{1}{\sqrt2} \\ 0 \end{pmatrix}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5/\sqrt2 \\ 5/\sqrt2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt2 \\ 1/\sqrt2 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{18} \\ -1/\sqrt{18} \\ 4/\sqrt{18} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 9/\sqrt{18} \\ -9/\sqrt{18} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt2 \\ -1/\sqrt2 \end{pmatrix}$$

Subject:
Date

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \\ \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & 1/\sqrt2 & 0 \\ 1/\sqrt{18} & -1/\sqrt{18} & 4/\sqrt{18} \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

```
A <- as.matrix(data.frame(c(3,2), c(2,3), c(2,-2)))
A
A.svd <- svd(A)
A.svd
```

← R درنرم افزار

« تجزیه طیفی » OR « تجزیه جردن »

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad A = P \Lambda P^T$$

① در گام اول مقادیر ویژه ماتریس را پیدا می کنند

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \left| \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right|$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

سطر دوم و سوم با سطر اول جمع :

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 5-\lambda & 5-\lambda \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

سطر اول $\times -2$ با سطر دوم و سوم جمع

$$= (5-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (5-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(1+\lambda)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 5 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = -1 \end{cases}$$

۳) در گام دوم ~~مقادیر~~ بردار ویژه ی متناظر با هر مقدار ویژه بدست می آید

$$(A - 5I) = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{پلکانی سطری}} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2/2 - x_3/3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \underset{\sim}{v}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2/6} \\ \sqrt{2/6} \\ \sqrt{2/6} \end{pmatrix}$$

به همین ترتیب

$$v_2 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} , \quad \underset{\sim}{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2/6} \\ \sqrt{2/6} \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{2/6} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ \sqrt{2/6} & 1/\sqrt{6} & -\sqrt{2/6} \\ \sqrt{2/6} & 1/\sqrt{6} & \sqrt{2/6} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -2 & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

in R

```
$A<as.matrix(data.frame
(c(1,2,2),c(2,1,2)
,c(2,2,1)))
>eigen(A)
```

نکته: در ماتریس های متقارن با استاندارد سازی یعنی تقسیم هر درایه بردار به اندازه بردار، بردار یکه و متعامد می شود اما گاهی اوقات نیاز است که با استفاده از فرآیند گرام اشمیت بردارها را متعامد سازی کنید (عمود برهم)

Subject :
Date

فرآیند گرام اشمیت

فرض کنید مجموعه بردار $\{ \underset{\sim}{x}_1 \; \ldots\ldots \; \underset{\sim}{x}_n \}$ را می‌خواهید

متعامد سازی کنید (بردارها برهم عمود باشند و یکه). ابتدا یکه سازی

کنید یعنی هر بردار هر درایه را بر اندازه اش تقسیم کنید و فرض کنید

$$\{ \underset{\sim}{\alpha}_1 \; \ldots\ldots \; \underset{\sim}{\alpha}_n \}$$

بردارای یکه حاصل باشند در گرام اشمیت :

$$\underset{\sim}{\beta}_1 = \underset{\sim}{\alpha}_1 \qquad (1)$$

$$\underset{\sim}{\beta}_2 = \underset{\sim}{\alpha}_2 - \frac{\underset{\sim}{\alpha}_2 \cdot \underset{\sim}{\beta}_1}{\underset{\sim}{\beta}_1 \cdot \underset{\sim}{\beta}_1} \cdot \underset{\sim}{\beta}_1 \qquad (2)$$

$$\underset{\sim}{\beta}_3 = \underset{\sim}{\alpha}_3 - \frac{\underset{\sim}{\alpha}_3 \cdot \underset{\sim}{\beta}_1}{\underset{\sim}{\beta}_1 \cdot \underset{\sim}{\beta}_1} \cdot \underset{\sim}{\beta}_1 - \frac{\underset{\sim}{\alpha}_3 \cdot \underset{\sim}{\beta}_2}{\underset{\sim}{\beta}_2 \cdot \underset{\sim}{\beta}_2} \cdot \underset{\sim}{\beta}_2 \qquad (3)$$

$$\vdots$$

$$\underset{\sim}{\beta}_k = \underset{\sim}{\alpha}_k - \frac{\underset{\sim}{\alpha}_k \cdot \underset{\sim}{\beta}_1}{\underset{\sim}{\beta}_1 \cdot \underset{\sim}{\beta}_1} \cdot \underset{\sim}{\beta}_1 - \ldots\ldots - \frac{\underset{\sim}{\alpha}_k \cdot \underset{\sim}{\beta}_{k-1}}{\underset{\sim}{\beta}_{k-1} \cdot \underset{\sim}{\beta}_{k-1}} \cdot \underset{\sim}{\beta}_{k-1}$$

مثال به روش گرام اشمیت $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ را تبدیل

به مجموعه متعامد یکه کنید.

نکته: در روش گرام اشمیت می توانید اول متعامد بعد یکه کنید

$$\underset{\sim}{\beta_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \qquad \underset{\sim}{\beta_2} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{\overbrace{\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}^{2}}{\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\beta_3} = \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \overset{2}{-} \frac{\overbrace{\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}}^{3}}{\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}}_{3}} \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$$

[illegible] $\Longrightarrow$ $\underset{\sim}{\gamma_1} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$ $\quad \underset{\sim}{\gamma_2} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$ $\quad \underset{\sim}{\gamma_3} = \begin{pmatrix}-1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\end{pmatrix}$

```
> A<-as.matrix(data.frame(c(3,2), c(2,3), c(2,-2)))
> A
     c.3..2. c.2..3. c.2...2.
[1,]       3       2        2
[2,]       2       3       -2
> A.svd <- svd(A)
> A.svd
$d
[1] 5 3

$u
           [,1]       [,2]
[1,] -0.7071068 -0.7071068
[2,] -0.7071068  0.7071068

$v
              [,1]       [,2]
[1,] -7.071068e-01 -0.2357023
[2,] -7.071068e-01  0.2357023
[3,] -5.551115e-17 -0.9428090

> u<-as.matrix(data.frame(c(1/sqrt(2),1/sqrt(2)), c(1/sqrt(2),-1/sqrt(2))))
> u
     c.1.sqrt.2...1.sqrt.2.. c.1.sqrt.2....1.sqrt.2..
[1,]               0.7071068                0.7071068
[2,]               0.7071068               -0.7071068
> l<-as.matrix(data.frame(c(5,0), c(0,3), c(0,0)))
> l
     c.5..0. c.0..3. c.0..0.
[1,]       5       0       0
[2,]       0       3       0
> v<-as.matrix(data.frame(c(1/sqrt(2),1/sqrt(18),2/3), c(1/sqrt(2),-1/sqrt(18),-2/3), c(0,4/sqrt(18),-1/3)))
> v
     c.1.sqrt.2...1.sqrt.18...2.3. c.1.sqrt.2....1.sqrt.18....2.3. c.0..4.sqrt.18....1.3.
[1,]                     0.7071068                       0.7071068              0.0000000
[2,]                     0.2357023                      -0.2357023              0.9428090
[3,]                     0.6666667                      -0.6666667             -0.3333333
> u%*%l%*%v
     c.1.sqrt.2...1.sqrt.18...2.3. c.1.sqrt.2....1.sqrt.18....2.3. c.0..4.sqrt.18....1.3.
[1,]                             3                               2                      2
[2,]                             2                               3                     -2
```

```
> A<-as.matrix(data.frame(c(1,2,2), c(2,1,2), c(2,2,1)))
> A
     c.1..2..2. c.2..1..2. c.2..2..1.
[1,]          1          2          2
[2,]          2          1          2
[3,]          2          2          1
> eigen(A)
eigen() decomposition
$values
[1]  5 -1 -1

$vectors
           [,1]       [,2]       [,3]
[1,] -0.5773503  0.8164966  0.0000000
[2,] -0.5773503 -0.4082483 -0.7071068
[3,] -0.5773503 -0.4082483  0.7071068

> |
```