زیر آورده شده است. آیا توزیع پواسون در سطح معنی‌دار ۰/۰۵ بر داده‌ها برازنده است.

تعداد غلطها i	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
تعداد صفحات o_i	۳۶	۴۰	۱۹	۲	۰	۲	۱

حل اگر X تعداد غلطهای چاپی در یک صفحه کتاب باشد آنگاه آزمون

$$\begin{cases} H_0 : X \sim P(\mu) \\ H_1 : X \nsim P(\mu) \end{cases}$$

مورد نظر است. در ابتدا به وسیلهٔ مشاهدات، μ میانگین توزیع پواسون را برآورد می‌کنیم.

$$\hat{\mu}=\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i x_i=\frac{1}{100}\left[(0\times 36)+(1\times 40)+\ldots+(6\times 1)\right]=1$$

بنابراین تحت فرض H_0 داریم که

$$f_X(x)=\frac{e^{-1}1^x}{x!}=\frac{1}{x!}e^{-1} \qquad x=0,1,2,\ldots$$

در نتیجه

$$p_0^{\circ}=P(X=0)=e^{-1}=0/3679 \Rightarrow e_0=np_0^{\circ}=100(0/3679)=36/79$$

$$p_1^{\circ}=P(X=1)=e^{-1}=0/3679 \Rightarrow e_1=36/79$$

با محاسبهٔ مقادیر دیگر e_i به طور مشابه، جدول زیر را به دست می‌آوریم.

i	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	جمع
o_i	۳۶	۴۰	۱۹	۲	۰	۲	۱	۱۰۰
e_i	۳۶/۷۹	۳۶/۷۹	۱۸/۳۹	۶/۱۳	۱/۵۳	۰/۳۱	۰/۰۵	۱۰۰

چون ۳ طبقهٔ آخر دارای مقادیر مورد انتظار کمتر از ۵ هستند پس ۴ طبقهٔ آخر را با هم ادغام می‌کنیم و جدول زیر به دست می‌آید

i	۰	۱	۲	بزرگتر از ۲	جمع
o_i	۳۶	۴۰	۱۹	۵	۱۰۰
e_i	۳۶/۷۹	۳۶/۷۹	۱۸/۳۹	۸/۰۲	۱۰۰

بنابراین

$$X^2=\sum_{i=0}^{3}\frac{(o_i-e_i)^2}{e_i}=\frac{(36-36/79)^2}{36/79}+\ldots+\frac{(5-8/02)^2}{8/02}=1/454$$

$$d.f.=k-1-t=4-1-1=2 \Rightarrow \chi^2_{1-\alpha}(k-1-t)=\chi^2_{/95}(2)=5/99$$

Scanned with CamScanner

چون $۱/۴۵۴=X^{۲} \ngtr \chi^{۲}_{۱-\alpha}(k-۱-t)=۵/۹۹$ پس $H_۰$ رد نمی‌شود، یعنی توزیع پواسون بر داده‌ها برازنده است.

مثال ۳.۳.۸ طول عمر ۱۰۰۰ لامپ یک کارخانه را اندازه‌گیری کرده‌ایم و اطلاعات جدول زیر به دست آمده است همچنین $\sum x_i=۲۰۰۰۰۰$.

سرپرست کارخانه ادعا دارد که طول عمر لامپها دارای توزیع نمایی است. آیا ادعای او را در سطح معنی‌دار ۰/۰۱ می‌پذیرید.

طول عمر t	تعداد
t≤۱۵۰	۵۴۳
۱۵۰<t≤۳۰۰	۲۵۸
۳۰۰<t≤۴۵۰	۱۲۰
۴۵۰<t≤۶۰۰	۴۸
۶۰۰<t≤۷۵۰	۲۰
۷۵۰<t	۱۱

حل اگر X طول عمر لامپ تولیدی کارخانه باشد آنگاه آزمون $\begin{cases} H_۰: X\sim E(\theta) \\ H_۱: X\nsim E(\theta)\end{cases}$ مورد نظر است. در ابتدا θ میانگین توزیع نمایی را بوسیله مشاهدات برآورد می‌کنیم.

$$\hat{\theta}=\bar{x}=\frac{۱}{n}\sum x_i=\frac{۲۰۰۰۰۰}{۱۰۰۰}=۲۰۰$$

بنابراین تحت فرض $H_۰$ داریم که

$$f_X(x)=\frac{۱}{۲۰۰}e^{-\frac{۱}{۲۰۰}x} \qquad x>۰$$

در نتیجه

$$p_۱^۰=P(X\leq ۱۵۰)=\int_۰^{۱۵۰}\frac{۱}{۲۰۰}e^{-\frac{۱}{۲۰۰}x}dx=۰/۵۲۷۷ \Rightarrow e_۱=۱۰۰۰p_۱^۰=۵۲۷/۷$$

$$p_۲^۰=P(۱۵۰<X\leq ۳۰۰)=\int_{۱۵۰}^{۳۰۰}\frac{۱}{۲۰۰}e^{-\frac{۱}{۲۰۰}x}dx=۰/۲۴۹۲ \Rightarrow e_۲=۲۴۹/۲$$

با محاسبهٔ مقادیر دیگر e_i به طور مشابه، جدول زیر را به دست می‌آوریم.

i	۱	۲	۳	۴	۵	۶	جمع
o_i	۵۴۳	۲۵۸	۱۲۰	۴۸	۲۰	۱۱	۱۰۰۰
e_i	۵۲۷/۷	۲۴۹/۲	۱۱۷/۷	۵۵/۶	۲۶/۳	۲۳/۵	۱۰۰۰

بنابراین

$$X^{۲}=\sum_{i=۱}^{۶}\frac{(o_i-e_i)^{۲}}{e_i}=\frac{(۵۴۳-۵۲۷/۷)^{۲}}{۵۲۷/۷}+\ldots=۹/۹۹۶$$

$$d.f.=k-۱-t=۶-۱-۱=۴ \Rightarrow \chi^{۲}_{۱-\alpha}(k-۱-t)=\chi^{۲}_{۰/۹۹}(۴)=۱۳/۳$$

چون $۱۳/۳=(k-۱-t)\chi^{۲}_{۱-\alpha}\not> X^{۲}=۹/۹۹۶$ پس $H_۰$ رد نمی‌شود، یعنی توزیع نمایی برازنده بر داده‌ها است.