Subject:

Year. Month. Date. ( )

منابع

1) Linear models, shayle R. searl, 1971.

2) Linear models in statistics, Alvin C. Rencher and G. Bruce schaalje, 2nd Ed, 2008 (pdf)

Linear models in statistics, Alvin C. Rencher, 2000

ترجمه دکتر طباطبایی

3) plane answers to complex questions, (The theory of Linear models), Ronald christensen, 4nd Ed, 2011 (pdf)

4) Linear regression analysis, George A.F. Seber and Alan J. Lee, 2nd Ed, 2003

(Seber, 1nd Ed, 1977)

5) Theory and application of the linear model, Franklin A. Graybill, ~~2000~~ 1976.

تکالیف و سمینار %20

میان ترم %35

پایان ترم %45

[redacted]

PAPCO

Subject
Date

ماتریسها و بردارها :

یک ماتریس با m سطر و k ستون و عناصر a_{ij} ، $i = 1 \dots m$ و $j = 1 \dots k$
row column

به صورت زیر نمایش داده می شود :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} \end{bmatrix}_{m \times k}$$

اگر سطرها و ستونهای یک ماتریس را تعویض کنیم ماتریس حاصل را ترانهاده A گویند و با A' یا A^T نشان می دهند
transposed

ماتریسهای خاص :

ماتریس متقارن : اگر A ماتریس مربعی باشد که ترانهاده آن با خودش برابر شود آنگاه ماتریس A را متقارن گویند .

ماتریس قطری : اگر یک ماتریس مربعی A تمام عناصر غیرقطری آن صفر باشند گویند A یک ماتریس قطری است .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & a_{pp} \end{bmatrix} \rightarrow A = diag(a_{11}, \dots, a_{pp})$$
diagonal

و ماتریس قطری که تمام عناصر روی قطر آن 1 باشد ماتریس واحد نامیده می شود و با I نشان می دهند.
Identity matrix

ماتریس بالا مثلثی : ماتریس مربعی که عناصر زیر قطر آن صفرند
upper triangular

ماتریس پایین مثلثی : ماتریس مربعی که عناصر بالای قطر آن صفرند .
Lower triangular

معمولاً ماتریسی که همه عناصر آن 1 باشد را با J و ماتریسی که همه عناصر آن صفر باشد با O نشان می دهند .

ماتریس متعامد : اگر برای هر ماتریس مربع A داشته باشیم $A' = A^{-1}$ یا $AA' = A'A = I$ آنگاه
orthogonal

A یک ماتریس متعامد است . A^{-1} را وارون ماتریس A است که در صورت وجود منحصر به فرد است و

$AA^{-1} = A^{-1}A = I$ معکوس در صورتی وجود دارد که $|A| \neq 0$

Subject
Date

Idempotent matrix

ماتریس خودتوان: ماتریس قتعان A را خودتوان گوییم هرگاه $A^2 = A$ (AA)

nonsingular matrix

ماتریس نا ویژه: اگر $|A| \neq 0$ باشد به ماتریس $A_{n \times n}$ نا ویژه گویند.

معمولاً دترمینان یک ماتریس به صورت $\det(A)$ یا $|A|$ نمایش داده می شود و دترمینان یک ماتریس $n \times n$ مثل A یک تابع اسکالر از A است. اگر A ویژه باشد آنگاه $|A| = 0$ و اگر A ناویژه باشد $|A| \neq 0$

rank

رتبه ماتریس: رتبه یک ماتریس عبارت است از ماکسیمم تعداد سطر یا ستون آن ماتریس که استقلال خطی دارند یعنی سطرها یا ستونها را به صورت بردار در نظر بگیرید و تعداد سطرها یا ستونها که ضرایب $C_1 \ldots C_p$ وجود نداشته باشند که رابطه $C_1 a_1 + \cdots + C_p a_p = 0$ برقرار باشد

به عبارت دیگر ستونهای A مستقل خطی اند اگر $AC = 0$ باشد نتیجه شود $C = 0$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix}_{n \times p}$$

$\underbrace{}_{a_1}$ ... $\underbrace{}_{a_p}$

$\text{rank}(A) =$ تعداد ستونهای مستقل A

$=$ تعداد سطرهای مستقل A

ماتریس $A_{n \times p}$ اگر دارای رتبه p باشد که در آن $p < n$ در اینصورت به A ماتریس رتبه کامل گویند.

Full rank (Column)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \qquad \text{rank}(A) = 2$$

$$C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow$$ C_1 و C_2 وجود ندارد

$$C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} C_1 - 2C_2 + 3C_3 = 0 \\ 5C_1 + 2C_2 + 4C_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow C = (14, -11, -12)'$$

PAPCO

پس دو سطر مستقل خطی اند اما ستونها وابسته خطی اند.

چند نکته: ۱. به طور کلی رتبه ماکسیمم یک ماتریس $n \times p$ برابر با $\min(n,p)$ است یعنی

$$rank(A) \le \min(n,p)$$

۲. فرض کنید $A_{n\times p}$ و $B_{p\times n}$ (A و B ماتریس باشند) آن گاه

$r(AB) \le \min(r(A), r(B))$ → تمام ستونهای AB ترکیب خطی از ستونهای A و تمام سطرهای ترکیب خطی از سطرهای B اند

یا $r(AB) \le r(A)$, $r(AB) \le r(B)$

۳. $r(A+B) \le r(A) + r(B)$

$r(\underset{\text{zero matrix}}{0}) = 0$

$$r(A) = r(A') = r(AA')$$

اگر $A_{n\times p}$:

if $r(A) = n$, $n < p$ → سطری رتبه کامل

if $r(A) = p$, $p \le n$ → ستونی رتبه کامل

if $|A| \ne 0 \Rightarrow r(AB) = r(B)$ ضرب یک ماتریس ناویژه تاثیری روی رتبه ندارد

$|A| \ne 0 \rightarrow A^{-1}$ وجود دارد $rank(B) = r(A^{-1}AB) \le r(AB) \le r(B)$

نکته: یک ماتریس مربع با رتبه کامل را ناویژه گویند و دارای معکوس منحصر به فرد است پس
$\begin{cases} |A| \ne 0 \\ A \text{ nonsingular} \end{cases}$ A^{-1} وجود دارد

اگر ماتریس مربعی مثل A رتبه کامل نباشد آن گاه دارای معکوس نیست و به آن ویژه گویند. (دقت کنید معکوس فقط برای ماتریسهای مربع قابل تعریف است). ماتریس مستطیلی رتبه کامل دارد معکوس نیست

قضیه: اگر A ناویژه باشد آن گاه A' نیز ناویژه است پس $(A')^{-1}$ وجود دارد

و داریم $(A')^{-1} = (A^{-1})'$

$(A^{-1})^{-1} = A$ $|A^{-1}| = 1/|A|$ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Subject: $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ $\quad |A_{11}| \neq 0, \; |A_{22}| \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} A^{11} & A^{12} \\ A^{21} & A^{22} \end{bmatrix} \rightarrow$ $A^{11} = (A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21})^{-1}$, $A^{22} = (-A_{21} A_{11}^{-1} A_{12} + A_{22})^{-1}$

Year. Month. Date. ( )

$A^{12} = -A_{11}^{-1} A_{12} A^{22}$ $\quad$ ~~A_{21}~~ $A^{21} = -A_{22}^{-1} A_{21} A^{11}$

یک دستور کلی برای محاسبه معکوس ماتریس افراز شده A :

$AA^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \rightarrow$ تمرین

ابتدا ماتریس را به صورت زیر افراز می‌کنیم

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

آن گاه با شرط وجود A_{11}^{-1} و B^{-1} که $B = A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}$ معکوس A به صورت

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1} A_{12} B^{-1} A_{21} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1} A_{12} B^{-1} \\ -B^{-1} A_{21} A_{11}^{-1} & B^{-1} \end{bmatrix}$$

positive definite نامیده می‌شود.

ماتریس معین مثبت : اگر ماتریس متقارن A دارای این خاصیت باشد که به ازای $\forall y$ به غیر از $y = 0$ ، $y'Ay > 0$ باشد آن گاه به $y'Ay$ صورت درجه دوم معین مثبت و A را ماتریس معین مثبت گویند.

همیشه مثبت

positive semidefinite

ماتریس نیمه معین مثبت: اگر به ازای $\forall y$ به غیر از $y = 0$

فرم درجه دوم نامنفی یا نیمه معین

$y'Ay \geq 0 \Rightarrow$ A نیمه معین مثبت

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad [y_1 \;\; y_2] \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 2y_1^2 - 2y_1 y_2 + 3y_2^2$$

$$= 2\left(y_1 - \tfrac{1}{2} y_2\right)^2 + \tfrac{5}{2} y_2^2 > 0 \quad \forall y_1, y_2 \neq 0$$

$\downarrow$

دقت کنید اگر A معین مثبت باشد $a_{ii} > 0$ مثبتی و اگر نیمه معین مثبت باشد $a_{ii} \geq 0$ هستند.

Subject: Year. Month. Date. ( )

A p.d $\rightarrow y'Ay > 0 \quad \forall y \neq 0 \Rightarrow P^{-1}Py$

$|P| \neq 0 \rightarrow P^{-1}$ وجود دارد

$y'(P'AP)y > 0 \Rightarrow (Py)'A(Py) > 0$

تناقض

$Py = 0 \Rightarrow \underbrace{P^{-1}P}_{I}y = 0$

چند نکته:

n1. if $\begin{cases} A & \text{positive definite} \\ |P| \neq 0 \end{cases} \Rightarrow P'AP$: positive definite

non singular matrix

پس $y \neq 0$ $y'Ay > 0$ می‌دانیم $\qquad P^{-1}PY = P^{-1}0 = 0$

$y'(P'AP)y = (Py)'A(Py) > 0 \qquad Py \neq 0 \Rightarrow y = 0$

$\forall y \neq 0$ معین مثبت

فقط وقتی صفر است، y صفر باشد

$y \neq 0$ چون P وارون‌پذیر است

n2. if $\begin{cases} A & \text{positive semidefinite} \\ |P| \neq 0 \end{cases} \Rightarrow P'AP$: positive semidefinite

قضیه ۲: A : p.d $\Leftrightarrow A = PP'$, $|P| \neq 0$

n3. if $\begin{cases} B_{k\times p} & : \text{full row rank}, \ \text{rank}(B) = k, \ k \leq p \\ A_{p\times p} & : \text{positive definite} \end{cases} \Rightarrow BAB'$ positive def

$$y'BAB'y = \underbrace{(B'y)'}_{X'}A\underbrace{(B'y)}_{X} = X'AX > 0$$

$B'_{p\times k}$, $r(B') = k \Rightarrow$ full column rank

① وقتی B' ستونی رتبه کامل است $B'y = 0$ اگر $y = 0$ و چون $\forall y \neq 0 \; y'Ay > 0$

$\Rightarrow \forall B'y \neq 0 \quad (B'y)'A(B'y) > 0$

یا

$r(B') = k \Rightarrow$ تعداد ستون‌های مستقل B' $\Rightarrow$

② یعنی ستون‌های B' مستقل خطی هستند پس

$$\boxed{B'y = 0 \Rightarrow y = 0}$$

$B'y$ فقط وقتی صفر است که $y = 0$ پس

$\forall y \neq 0 \quad y'Ay > 0 \rightarrow \forall B'y \neq 0 \rightarrow (B'y)'A(B'y) > 0$

طبق تعریف استدلال

n4. if $\text{rank}(B_{n\times p}) = p \Rightarrow B'B$ p.d

n5. if $\text{rank}(B_{n\times p}) < p \Rightarrow B'B$ p.s.d

(اثبات با خودتان)

n6. if A : p.d $\Rightarrow A^{-1}$: p.d (از قضیه ۲ اثبات بگیرید)

قضیه: if A : p.d , و $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$

که در آن A_{11} , A_{22} ماتریس‌های مربعی‌اند که A_{11} و A_{22} معین مثبت‌اند

~~دستگاه معادلات فرض می‌کنیم معادلات یکتا را به صورت ترکیب خطی از ستون‌های A نوشت~~

Subject:

Year. Month. Date.

$$Ax = c$$ یک دستگاه معادلات است

$$\text{if } Ax = c \Rightarrow$$ دستگاه معادلات ناسازگار جواب ندارد

$$Ax = c$$ سازگار یک یا بیشتر

دستگاه معادله: (یادآوری) سه حالت خیز حالت: بحث در مورد جواب

① full rank

$$A_{p\times p}, \; r(A) = p \Rightarrow A^{-1}$$ وجود دارد

$$\underbrace{A^{-1}A}_{I} x = A^{-1}c$$ جواب یکتا دارد $Ax = c$ در دستگاه

② $$A_{n\times p}, \; r(A) = p \Rightarrow p < n \Rightarrow$$

$\min(n,p) = p$ دستگاه $Ax = c$ جواب ندارد

ستونی A^{-1} وجود ندارد

③ نا کامل

$$A_{n\times p}, \quad \text{if } n > p \to Ax = c \to$$ جواب ندارد (تعداد معادلات بیشتر از مجهول)

$$\text{if } n < p \to Ax = c \to$$ بی‌نهایت جواب

④ $$A_{p\times p}, \; r(A) = r < p \Rightarrow$$

$Ax = c \to$ جواب نداشته باشد $\Rightarrow$ دستگاه معادلات ناسازگار

$Ax = c \to$ یک جواب یا بیشتر $\Rightarrow$ سازگار

④ $$A_{p\times p}, \; r(A) = r < p \Rightarrow$$ ستون‌های A وابسته خطی‌اند

ستونها مستقل اند $Ac = 0 \Rightarrow c = 0$

هر بردار b ای وجود دارد که

$$\exists \, b' \neq 0 \text{ st } \underset{1\times p}{b'} \underset{p\times p}{A} = 0' \quad b' \neq 0$$

$$Ax = c \Rightarrow b'Ax = b'c \Rightarrow 0x = b'c \neq 0$$

پس باید $b'c = 0$ و اگر $b'c \neq 0$ ~~باشد~~ آن گاه x وجود ندارد پس در این حالت

برای اینکه $Ax = c$ سازگار باشد باید بین اعضای c رابطه خطی وجود داشته باشد

$$b'c = 0, \; b' \neq 0 \Rightarrow$$ ارتباط خطی بین اعضای c برقرار است.

قضیه : دستگاه معادلات $A\underset{\sim}{x}=\underset{\sim}{c}$ حداقل دارای یک بردار جواب است اگر و فقط اگر

$$r(A)=r(\underbrace{A,c}_{A^+})$$ (اثبات رنج)

$$\begin{cases} x_1+2x_2=4 \\ x_1-x_2=1 \\ x_1+x_2=3 \end{cases}$$

$$\underset{3\times 2}{\overset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}} \overset{\underset{\sim}{x}}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}} = \overset{\underset{\sim}{c}}{\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}} \qquad r(A)=2$$

$n=3>p=2$

ماتریس A^+
$$\underset{3\times 3}{\begin{pmatrix} 1\times 2 & 2 & 4 \\ 1\times 2 & -1 & 1 \\ 1\times 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}} \qquad \begin{matrix} 1\times 2+2 \\ 1\times 2-1 \\ 1\times 2+1 \end{matrix} \qquad \underbrace{r(A^+)=2}$$

$$r(A)=r(A,C)=2$$

$r(A^+)=3$ ناسازگار — عدد ۳ را به ۲ تبدیل کنید

Searl شروع کرده است

جلسه سوم

Generalized Inverse : وارون تعمیم یافته

برای هر ماتریس A ماتریسی مانند B پیدا می‌شود که $ABA=A$

به ماتریس B وارون تعمیم یافته A گویند که منحصر به فرد نیست و به صورت G یا $\bar{A}$ نیز نشان می‌دهند لازم است که اگر A ماتریس $n\times p$ باشد معکوس تعمیم یافته آن یک $p\times n$،

فرض کنید A مربع و متقارن

$$AGA=A \Rightarrow (AGA)'=A' \Rightarrow A'G'A'=A'$$
$$\Rightarrow AG'A=A \Rightarrow$$ پس G منحصر به فرد نیست

نکته : اگر A نا ویژه باشد آن گاه $G=A^{-1}$ و معکوس تعمیم یافته را معکوس شرطی گویند

$$AA^{-1}A=A$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

چند نکته: فرض کنید A یک ماتریس $n \times p$ و $r(A)=r$ و A^- معکوس تعمیم یافته A باشد و $(A'A)^-$ معکوس تعمیم یافته $A'A$ باشد:

آنگاه:

① $ran(A^-A) = rank(AA^-) = rank(A) = r$

$r(A) = r(AA^-A) \le r(A^-A) \le r(A)$

② $A' = A'A\underbrace{(A'A)^-}_{G}A'$, $A = A\underbrace{(A'A)^-}_{G}A'A$

طرفین ترانهاده

می دانیم صورت قبلی $A'A(A'A)^-A'A = A'A$

طرفین در A' ضرب شود

③ $(A')^- = (A^-)'$

④ $A\cancel{(A'A)^-A'A}$ ~~(نتیجه ای از ②)~~ . $(A'A)^-A'$ یک معکوس تعمیم یافته A است.

یک الگوریتم برای محاسبه معکوس تعمیم یافته:

فرض کنید A یک ماتریس $n \times p$ با رتبه r باشد که به صورت زیر افراز شده است

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

که A_{11} ماتریس $r \times r$ با رتبه r است در این صورت معکوس تعمیم یافته A:

$$A^- = G = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

خواهد بود دقت کنید می توان A را به گونه ای دیگر افراز کرد که A_{22}، $r \times r$ و $r(A_{22}) = r$ باشد

$$A^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

(دانش رنجبر)

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad c_1\begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \underline{c} = (1\ -6\ 1)$$

$$\Rightarrow r(A) = 2$$

$$G_1 = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} & \vdots \\ \cdots & 0 \end{pmatrix} \qquad G_2 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots \\ \vdots & \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \end{pmatrix}$$