

فصل ۵. مدل‌های لگ خطی برای جدول‌های پیش‌پنداری

جدول ۲.۵: نتایج آزمون نیکویی برازش برای چند مدل لگ خطی

مدل	G ²	d.f.	P-مقدار
(G,I,LS)	۲۷۹۲/۸	۱۱	< ۰/۰۰۰۱
(GI,GL,GS,IL,IS,LS)	۲۳/۴	۵	< ۰/۰۰۰۱
(GIL,GIS,GLS,ILS)	۱/۳	۱	< ۰/۰۰۰۱
(GIL,GS,IS,LS)	۱۸/۶	۳	۰/۲۵
(GIS,GL,IL,LS)	۲۲/۸	۴	۰/۰۰۰۱
(GLS,GI,IL,IS)	۷/۵	۴	< ۰/۰۰۰۱
(ILS,GI,GL,GS)	۲۰/۶	۴	۰/۱۱
			< ۰/۰۰۰۱

اگرستی (۲۰۰۲، ص. ۳۲۹) از شاخص براورد عدم تشابه که به صورت زیر تعریف می‌شود، استفاده کرده است تا نشان دهد که اگرچه از دیدگاه نظری بین دو مدل ذکر شده اختلاف وجود دارد، از دیدگاه کاربردی، اختلاف فاحشی در عملکرد این دو مدل وجود ندارد.

$$\hat{\Delta} = \frac{\sum_i |n_i - \hat{\mu}_i|}{2n} = \frac{\sum_i |p_i - \hat{\pi}_i|}{2}$$

که در آن $n_i = np_i$ و $\hat{\mu}_i = n\hat{\pi}_i$ مقدار $\Delta = 0$ وقتی اتفاق می‌افتد که مدل خیلی خوب (در حد اعلا) عمل کرده باشد. وقتی $\hat{\Delta} < 0/02$ یا $\hat{\Delta} < 0/03$ باشد، نمونه از مدل، خیلی خوب پیروی کرده است، هرچند که مدل کامل نیست. برای مدل (GI, GL, GS, IL, IS, LS) ، $\hat{\Delta} = 0/008$ است و برای مدل (GLS, GI, IL, IS) ، $\hat{\Delta} = 0/002$ است که نشان می‌دهد هر دو مدل می‌توانند برازش‌های خوبی تلقی شوند.

۸.۵ دستورهای R برای برازش مدل‌های لگ خطی

در این بخش به تحلیل یک جدول 2×2 می‌پردازیم که رنگ مو و چشم تعدادی مرد را رده‌بندی کرده است (جدول ۳.۵ را ببینید).

جدول ۳.۵: داده‌های مربوط به رنگ مو و چشم تعدادی مرد

رنگ مو	رنگ چشم		
	قهوه‌ای	آبی	سبز
مشکی	۲۲	۱۱	۱۰
قهوه‌ای	۲۸	۵۰	۱۵
قرمز	۱۰	۷	۲
بزرگ	۳	۵	۸

۸.۵. دستورهای R برای برازش مدل‌های لگ خطی

۱۴۹

از دستورهای زیر برای ورود داده‌ها و چاپ داده‌ها استفاده می‌کنیم:

```
hair = factor(rep(c("Black", "Brown", "Red", "Blond"), c(4,4,4,4)))
eye = factor(rep(c("Brown", "Blue", "Hazel", "Green"), 4))
freq = c(32,11,10,3, 38,50,25,15, 10,10,7,7, 3,30,5,8)
haireye.data <- data.frame(hair, eye, freq)
```

با استفاده از دستورهای زیر، داده‌ها داخل یک جدول قرار می‌گیرند و به صورت data frame در می‌آیند.

```
haireye.table = table(hair, eye)
haireye.table[cbind(hair,eye)] = freq
```

و با دستور زیر می‌توان جدول را مشاهده کرد.

```
haireye.table
```

توجه کنید که در این جدول، سطوح عامل به ترتیب حروف الفبا دوباره مرتب شده‌اند. اکنون اجازه دهید برای شروع، مدلی با محدودیت‌های مجموع صفر را برازش دهیم. دستور زیر، این محدودیت را اعمال می‌کند.

```
options(contrasts=c("contr.sum", "contr.poly"))
```

دستور زیر، مدل استقلال را با استفاده از دستور glm برازش می‌دهد.

```
glm.out1 = glm(freq~hair+eye, family=poisson, data=haireye.data)
summary(glm.out1)
```

فصل ۵. مدل‌های لگ خطی برای جدول‌های پشته‌بندی

```
Call:
glm(formula = freq ~ hair + eye, family = poisson, data = haireye.data)

Deviance Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-3.6724   -0.9527   -0.1018    0.5635    3.0744

Coefficients:
(Intercept)  2.57730  0.07489  34.413 < 2e-16 ***
hair1       -0.03274  0.11717  -0.279  0.77990
hair2       -0.22945  0.12518  -1.833  0.06681
hair3       -0.79393  0.09331  -8.508  < 2e-16 ***
eye1        0.09770  0.09770  5.322  1.03e-07 ***
eye2        0.51997  0.10305  3.141  0.00168 **
eye3       -0.32369  0.10305  -3.141  0.00168 **
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

(Dispersion parameter for poisson family taken to be 1)

Null deviance: 163.492 on 15 degrees of freedom
Residual deviance: 44.315 on 9 degrees of freedom
AIC: 127.46

Number of Fisher Scoring iterations: 5
```

شکل ۲.۵: نتایج استفاده از مدل استقلال با استفاده از دستور glm

خروجی این اجرا در شکل (۲.۵) داده شده است.

مقدار کیبش ۴۴/۳۱۵ با ۹ درجه‌ی آزادی نشان می‌دهد که باید این مدل رد شود. برای محاسبه‌ی P —مقدار از دستور زیر استفاده می‌کنیم:

```
1-pchisq(44.315,9)
[1] 1.234755e-06
```

بنا بر این نیاز داریم تا مدل اشباع‌شده را برازش دهیم. دستور زیر، این کار را انجام می‌دهد، که نتایج آن در شکل (۳.۵) داده شده است.

```
glm.out2 <- glm(freq~hair*eye, family=poisson, data=haireye.data)
summary(glm.out2)
```

می‌توانیم مدل‌های بالا را با دستور loglin() نیز برازش دهیم. در این صورت برای مدل استقلال از دستورهای زیر استفاده می‌کنیم و نتایج آن در شکل (۴.۵) آمده است.

۸.۵. دستوره‌ای R برای برازش مدل‌های لگ خطی

```
Call:
glm(formula = freq ~ hair + eye, family = poisson, data = haireye.data)

Deviance Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-3.6724   -0.9527   -0.1018    0.5635    3.0744

Coefficients:
(Intercept)  2.444190  0.085829  28.710 < 2e-16 ***
hair1       -0.147983  0.157244  -0.943  0.346652
hair2       -0.417018  0.170239  -2.450  0.014301 *
hair3       -0.904944  0.110215  -8.211  < 2e-16 ***
eye1        0.539235  0.122471  4.403  1.07e-05 ***
eye2       -0.161940  0.150689  -1.075  0.282527
eye3       -0.506187  0.168039  -3.012  0.002593 **
hair1:eye1  -0.457547  0.234703  -1.949  0.051239 .
hair2:eye1  0.614790  0.212007  2.893  0.00121 ***
hair3:eye1  0.002654  0.157416  0.023  0.981480
hair2:eye2  0.987589  0.218812  4.513  6.38e-06 ***
hair3:eye2 -1.110500  0.357289  -3.108  0.001883 **
hair2:eye3  0.106513  0.184572  0.577  0.563886
hair3:eye3 -0.723408  0.359068  -1.981  0.047562 *
hair2:eye3  0.538456  0.284784  1.891  0.058657 .
hair3:eye3 -0.154897  0.222900  -0.695  0.487108
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

(Dispersion parameter for poisson family taken to be 1)

Null deviance: 1.6349e+02 on 15 degrees of freedom
Residual deviance: -1.9984e+14 on 0 degrees of freedom
AIC: 101.15

Number of Fisher Scoring iterations: 3
```

شکل ۳.۵: نتایج استفاده از مدل اشباع‌شده با استفاده از دستور glm

```
loglin.out1 <- loglin(haireye.table, margin=list(1,2), param=TRUE)
```

و برای مدل اشباع‌شده در شکل (۵.۵) داریم:

```
loglin.out2 <- loglin(haireye.table, margin=list(c(1,2)), param=TRUE)
```

توجه کنید که برآوردها با استفاده از هر دو دستور glm و loglin یکسان هستند. حال فرض کنید متغیر جنس نیز به داده‌ها وارد شده باشد و جدول ۴.۵ را داشته باشیم.

جدول ۴.۵: داده‌های مربوط به رنگ مو و چشم تعدادی مرد

رنگ مو	جنس (مرد)		
	قهوه‌ای	آبی	سبز
مشکی	۳۲	۱۱	۳
قهوه‌ای	۳۸	۵۰	۱۵
قرمز	۱۰	۷	۷
بدر	۳	۳۰	۸

رنگ مو	جنس (زن)		
	قهوه‌ای	آبی	سبز
مشکی	۳۶	۹	۲
قهوه‌ای	۸۱	۳۳	۱۴
قرمز	۱۶	۷	۷
بدر	۴	۶۳	۸

فصل ۵. مدل‌های لگ خطی برای جدول‌های پیشابندی

```

Sirt
[1] 44.31537
Spearson
[1] 42.16325
Sdf
[1] 9
Smargin
Smargin[[1]]
[1] "hair"
Smargin[[2]]
[1] "eye"

Sparam
Sparam$` (Intercept)`
[1] 2.577301

Sparam$hair
      Blond      Brown      Red
Black -0.22945457  0.79393429 -0.53173544
Blue  -0.03274428  0.3236865  -0.5986465

Sparam$eye
      Brown      Green      Hazel
Blue  0.3236865 -0.5986465 -0.2450065
Brown 0.5199664  0.3236865 -0.2450065

```

شکل ۴.۵: نتایج استفاده از مدل استقلال با استفاده از دستور loglin

```

Sirt
[1] 0
Spearson
[1] 0
Sdf
[1] 0
Smargin
Smargin[[1]]
[1] "hair" "eye"

Sparam
Sparam$` (Intercept)`
[1] 2.46419

Sparam$hair
      Blond      Brown      Red
Black -0.1479831 -0.4170179  0.9049436 -0.3399426
Blue  -0.5392350  0.1619397 -0.5061867 -0.1949880

Sparam$hair.eye
      hair      eye
Black -0.457546845  0.98758911 -0.7114082  0.18136592
Blond  0.814790122  -1.11049964  0.5394559 -0.24274640
Brown  0.003654229  0.10651271 -0.1548969  0.04472999
Red    -0.360897506  0.01639782  0.3278492  0.01665049

```

شکل ۵.۵: نتایج استفاده از مدل اشباع شده با استفاده از دستور loglin

۸.۵. دستوره‌های R برای برازش مدل‌های لگ خطی

دستورهای زیر، داده‌های جدول ۴.۵ را وارد می‌کند و داده‌ها در قالب data frame چاپ می‌شوند.

```

hair <- factor(rep(rep(c("Black", "Brown", "Red", "Blond"),
c(4,4,4,4)),2))
eye <- factor(rep(c("Brown", "Blue", "Hazel", "Green"), 8))
sex <- factor(rep(c("Male", "Female"), c(16,16)))
freq <- c(32,11,10,3, 38,50,25,15, 10,10,7,7, 3,30,5,8,
36,9,5,2, 81,34,29,14, 16,7,7,7, 4,64,5,8)
haireye2.data <- data.frame(hair, eye, sex, freq)
haireye2.data

```

همانند قبل، دستور زیر، داده‌ها را به صورت جدول نمایش می‌دهد.

```

haireye2.table <- table(hair, eye, sex)
haireye2.table[cbind(hair,eye,sex)] <- freq
haireye2.table

```

دستور زیر، مدل استقلال را بر اساس دستور glm برازش می‌دهد که خروجی آن در شکل (۶.۵) آمده است:

```

glm.out3 <- glm(freq~hair+eye+sex, family=poisson,
data=haireye2.data)
summary(glm.out3)

```

چون مدل استقلال، برازش خوبی ندارد، مدل اشباع شده را به کار می‌بریم و تحلیل کبش را انجام می‌دهیم، که این کار در نرم‌افزار R با استفاده از دستورهای زیر صورت می‌گیرد. خروجی نتایج دستورهای زیر در شکل (۷.۵) نمایش داده شده است.

فصل ۵. مدل‌های لگ خطی برای جدول‌های پیش‌بینی

```
Call:
glm(formula = freq ~ hair + eye + sex, family = poisson, data = haireye2.data)

Deviance Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-5.4109   -1.5996    0.2315    0.9084    6.3735

Coefficients:
(Intercept)      2.64265      0.05219  50.635 < 2e-16 ***
hair1          -0.17912      0.08246  -2.172  0.02984 *
hair2           0.07814      0.07814  -0.218  0.82718
hair3           0.01706      0.06259  12.697 < 2e-16 ***
eye1            0.79474      0.06745   7.513  5.79e-14 ***
eye2            0.50670      0.06705   7.900  2.80e-15 ***
eye3            0.52969      0.06705   7.900  2.80e-15 ***
sex1           -0.70505      0.10018  -7.038  1.95e-12 ***
sex2            0.10018      0.10018  -7.038  1.95e-12 ***
sex3            0.10853      0.04134   2.625  0.00866 **

---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

(Dispersion parameter for poisson family taken to be 1)

Null deviance: 489.59 on 31 degrees of freedom
Residual deviance: 175.79 on 24 degrees of freedom
AIC: 330.54

Number of Fisher Scoring iterations: 5
```

شکل ۶.۵: نتایج استفاده از مدل استقلال در داده‌ها، با در نظر گرفتن متغیر جنس و با استفاده از دستور glm

```
glm.out4 <- glm(freq~hair*eye*sex, family=poisson,
data=haireye2.data)
anova(glm.out4, test="Chisq")
```

اگر سطح معناداری را ۰/۱ در نظر بگیریم، مدلی که همه‌ی اثرهای متقابل دوتایی را در بر دارد، بهترین مدل است. بنا بر این هیچ یک از دو متغیر، استقلال شرطی ندارد؛ ولی پیوند شرطی هر دو متغیر در سطوح متغیر دیگر، یکسان است (همگنی). دستور زیر، یک مدل غیر سلسله‌مراتبی را برازش می‌دهد که نتایج آن نیز در شکل (۸.۵) ارائه شده است.

```
glm.out5 <- glm(freq~sex+hair*eye, family=poisson,
data=haireye2.data)
anova(glm.out5, test="Chisq")
```

مقدار کبیش ۲۹/۳۵ با ۱۵ درجه‌ی آزادی نشان می‌دهد که این مدل باید رد شود. برای محاسبه‌ی P -مقدار از دستور زیر استفاده می‌کنیم:

۸.۵. دستوره‌ای R برای برازش مدل‌های لگ خطی

```
Analysis of Deviance Table

Model: poisson, link: log
Response: freq
Terms added sequentially (first to last)
```

	Df	Deviance	Resid.	Df	Resid.	Dev	P(> Chi)
NULL				31		489.59	
hair	3	165.59		28	324.00	1.138e-35	
eye	3	141.27		25	182.73	2.010e-30	
sex	1	6.93		24	175.79	0.01	
hair:eye	9	146.44		15	29.35	4.806e-27	
hair:sex	3	6.27		12	23.08	0.10	
eye:sex	3	14.90		9	8.19	1.908e-03	
hair:eye:sex	9	8.19		0	1.665e-14	0.52	

شکل ۷.۵: نتایج استفاده از مدل اشباع شده در داده‌ها، با در نظر گرفتن متغیر جنس و با استفاده از دستور glm

```
Analysis of Deviance Table

Model: poisson, link: log
Response: freq
Terms added sequentially (first to last)
```

	Df	Deviance	Resid.	Df	Resid.	Dev	P(> Chi)
NULL				31		489.59	
sex	1	6.93		30	482.66	0.01	
hair	3	165.59		27	317.07	1.138e-35	
eye	3	141.27		24	175.79	2.010e-30	
hair:eye	9	146.44		15	29.35	4.806e-27	

شکل ۸.۵: نتایج استفاده از مدل غیر سلسله‌مراتبی در داده‌ها، با در نظر گرفتن متغیر جنس و با استفاده از دستور glm

Analysis of Deviance Table					
Model: poisson, link: log					
Response: freq					
Terms added sequentially (first to last)					
	Df	Deviance	Resid. Df	Resid. Dev	P(> Chi)
NULL			31	489.59	
	1	6.93	30	482.66	0.01
sex	3	165.59	27	317.07	1.138e-35
hair	3	141.27	24	175.79	2.010e-30
eye	3	7.32	21	168.48	0.06
sex:eye	9	146.44	12	22.03	4.806e-27
eye:hair					

شکل ۹.۵: نتایج استفاده از مدل غیر سلسله‌مراتبی دیگر در داده‌ها، با در نظر گرفتن متغیر جنس و با استفاده از دستور glm

1 - pchisq(29.35, 15)

[1] 0.01449365

دستورهای مورد نیاز برای تحلیل یک مدل غیر سلسله‌مراتبی دیگر به صورت زیر است، که نتایج آن نیز در شکل (۹.۵) ارائه شده است.

```
glm.out6 <- glm(freq~sex+eye:sex+hair*eye, family=poisson,
data=haireye2.data)
anova(glm.out6, test="Chisq")
```

اکنون با استفاده از نتایج دستور زیر در می‌یابیم که اثرهای متقابل جنس و رنگ چشم با P -مقداری برابر با ۰/۰۰۶ معنادار است. کیبش این مدل، ۲۲/۰۳ با ۱۲ درجه‌ی آزادی است. بنا بر این، این مدل در مقابل مدل اشباع شده رد می‌شود.

1 - pchisq(22.03, 12)

[1] 0.03718496

۹.۵. تمرین‌ها

۱- جدول سه‌طرفه‌ای با $I \times J \times K$ خانه را در نظر بگیرید. مدل لگ خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\log \mu_{ijk} = \lambda + \lambda_i^X + \lambda_j^Y + \lambda_k^Z + \lambda_{ij}^{XY}.$$

(ا) محدودیت‌های لازم بر روی پارامترها را ذکر کنید.

(ب) بر حسب μ_{ijk} عبارتی برای λ_{ij}^{XY} بیابید.

۲- در یک جدول $2 \times 2 \times 2$ ، نشان دهید که اثرهای متقابل سه‌طرفه‌ی یک مدل لگ خطی اشباع شده، لگاریتم اندازه‌ی بارتلت (۱۹۳۵) زیر است:

$$\frac{\mu_{111}\mu_{122}\mu_{212}\mu_{221}}{\mu_{112}\mu_{121}\mu_{211}\mu_{222}}$$

نشان دهید که این اندازه‌ی نسبت، نسبت‌های بخت در دو جدول 2×2 است.

۳- مدل لگ خطی زیر برای یک جدول $I \times J$ با محدودیت‌های سطر آخر صفر را در نظر بگیرید.

$$\log \mu_{ij} = \lambda + \lambda_i^X + \lambda_j^Y + \lambda_{ij}^{XY}.$$

نشان دهید که λ_{ij}^{XY} لگاریتم نسبت بخت‌های یک جدول 2×2 است. این جدول را به عنوان قسمتی از جدول بزرگ‌تر $I \times J$ مشخص کنید. در یک جدول سه‌بعدی، برای مدل لگ خطی (XZ, YZ) ، آماره‌های بسنده‌ی کمینه، معادلات درست‌نمایی، مقادیر برازنده شده و درجه‌ی آزادی مانده‌ها را بیابید و الگوریتم برازش متناسب تکراری (IPF) را به کار ببرید.

۴- جدول چهارطرفه‌ای را که متغیرهای عاملی آن W و X و Y و Z هستند در نظر بگیرید.

(آ) برای مدل (WXZ, WYZ) نشان دهید که X و Y به شرط W و Z مستقل‌اند. آیا نوع دیگری از استقلال شرطی در این مدل وجود دارد؟

(ب) برای چه مدل‌هایی که اثر متقابل سه‌تایی را در بر ندارند، X و Y به شرط W و Z مستقل‌اند؟

۵- اشفورد و سون (۱۹۷۰) داده‌های جدول (۵.۵) را گردآوری کرده‌اند. شمارش‌های این جدول، افراد حفار معدن را نشان می‌دهد که سن آن‌ها از ۲۰ تا ۶۴ سال است و سیگاری هستند ولی علائم بیماری قلبی ندارند. در این جدول، افراد برحسب گروه سنی (X)، آیا نفس نفس می‌زنند یا نه (Y)، و آیا سینه‌ی آن‌ها خس خس می‌کند یا نه (Z) رده‌بندی شده‌اند.

جدول ۵.۵: داده‌های مربوط به ویژگی‌های افراد حفار معدن

گروه سنی	نفس نمی‌زنند		نفس می‌زنند		کل
	خس خس ندارند	خس خس دارند	خس خس ندارند	خس خس دارند	
۲۴-۲۵	۱	۹۵	۷	۱۸۴۱	۱۹۵۲
۲۶-۲۷	۲۳	۱۰۵	۹	۱۶۵۴	۱۷۸۱
۲۸-۳۰	۵۴	۱۷۷	۱۹	۱۸۶۳	۲۱۱۳
۳۱-۳۵	۱۲۱	۲۵۷	۴۸	۲۳۵۷	۲۷۸۳
۳۶-۴۰	۱۶۹	۲۷۳	۵۴	۱۷۷۸	۲۲۲۴
۴۱-۴۵	۲۶۹	۳۲۴	۸۸	۱۷۱۲	۲۲۲۴
۴۶-۵۰	۴۰۴	۲۴۵	۱۱۷	۱۳۲۴	۲۰۹۰
۵۱-۵۵	۴۰۶	۲۲۵	۱۵۲	۹۶۷	۱۷۵۰
۵۶-۶۰	۳۷۲	۱۳۲	۱۰۶	۵۲۶	۱۱۳۶
کل	۱۸۲۷	۱۸۳۳	۶۰۰	۱۴۰۲۲	۱۸۲۸۲

(آ) مدل لگ خطی که سن را به عنوان عامل در نظر می‌گیرد و اثرهای متقابل دودویی را در بر دارد، برازش دهید.

(ب) برای هر گروه سنی، لگاریتم نسبت بخت‌ها برای پیوند بین Z و Y را بیابید. سپس نموداری از این مقادیر در مقادیر x رسم کنید که در آن نقطه‌ی وسط گروه سنی نام است.

(پ) مدل لگ خطی زیر را در نظر بگیرید و آن را برازش دهید. آیا می‌توانید مدل بهتری

$$\log \mu_{ijk} = \lambda + \lambda_{ij}^{XY} + \lambda_{jk}^{YZ}$$

۱- یک مدل چهارطرفه با متغیرهای R و X و Y و Z را در نظر بگیرید. فرض کنید که می‌توانید R را به عنوان یک متغیر پاسخ در نظر بگیرید. در هر حالت زیر، مدل لگ خطی با پنج پارامتر مربوط را بنویسید.

(آ) از X به طور شرطی مستقل است.

(ب) فقط X و Z روی R تأثیر دارند، اما تأثیرشان اثر متقابل ندارد.

(پ) اثر متقابل سه‌تایی وجود ندارد.

۲- نشان دهید که کلی‌ترین مدل لگ خطی K -بعدی (با K متغیر)، 2^K جمله دارد.

۳- در مدل لگ خطی سلسله‌مراتبی (XY, XZ, XW) با چهار متغیر X و Y و Z و W ،

(آ) آماره‌های بسنده را بیابید.

(ب) آیا صورت بسته‌ای برای مقادیر برازنده شده‌ی μ_{ijkl} وجود دارد؟ اگر جواب شما بلی است، آن را بیابید.

(پ) نیکویی برازش این مدل را در مقابل یک مدل اشباع شده، با یافتن آماره‌ی آزمون مناسب و توزیع این آماره تحت این مدل، تشریح کنید.

۴- جدول زیر را در نظر بگیرید.

	Y		X
	۱	۲	
۱	۱۲۶	۱۰۰	۱
۲	۳۵	۶۱	۲
۳	۹۰۸	۶۸۸	۳

برای مدل $\log \mu_{ij} = \lambda + \lambda_i^X$ براورد μ_{ij} را بیابید و نیکویی برازش مدل را آزمون کنید.

۱۰- جدول زیر را در نظر بگیرید:

ز

$n = 2222$

		Y		i	h
		۲	۱	X	Z
۲۲۲	۲۲۶	۱۰۰	۱۲۶	۱	۱
	۹۶	۶۱	۳۵	۲	
۲۹۰۰	۱۵۹۶	۹۰۸	۶۸۸	۱	۲
	۱۳۰۴	۴۹۷	۸۰۷	۲	
		۱۵۶۶	۱۶۵۶		

برای مدل $\log \mu_{ijk} = \lambda + \lambda_i^X + \lambda_j^Y + \lambda_k^Z + \lambda_{ij}^{XY}$ برآورد μ_{ijk} را تحت این مدل بیابید. نیکویی برازش مدل را آزمون کنید. اگر Y متغیر پاسخ باشد، مدل لجیت متناظر مدل را بیابید.

۱۱- در شکل‌های ۸.۵ و ۹.۵ به ترتیب، چه مدل‌های غیر سلسله‌مراتبی در نظر گرفته شده‌اند؟ آیا این مدل‌ها مناسب‌اند؟