

① فرض کنید A و B دو سیتم همپوشان باشند X و Y دو متغیر تصادفی باشند

$$Z(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \omega \in A \\ Y(\omega) & \omega \in B \\ 0 & \omega \notin A \cup B \end{cases}$$

نات تصادفی Z متغیر تصادفی است.

حل. $Z(\omega) = X(\omega) I_{\{\omega \in A\}} + Y(\omega) I_{\{\omega \in B\}}$

قبل از رسیدن X و Y و I_A و I_B متغیر تصادفی اند و جمع آن ها متغیر تصادفی

② A_1 و A_2 دو مجموعه اندازه نپذیرنده از Ω یعنی $A_1 \in \mathcal{F}$ و $A_2 \in \mathcal{F}$ و $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ است
 نسبت X اندازه نپذیر است

$$X(\omega) = \begin{cases} -1 & \omega \in A_1 \\ 1 & \omega \in A_1^c \cap A_2 \\ 0 & \omega \in A_2^c \cap A_2^c \end{cases}$$

$$X^{-1}(B) = \begin{cases} \emptyset & -1 \notin B, 0 \notin B, 1 \notin B \\ A_1 & -1 \in B, 0 \notin B, 1 \notin B \\ A_1^c \cap A_2 & 0 \in B, -1 \notin B, 1 \in B \\ A_1^c \cap A_2^c & 0 \in B, -1 \in B, 1 \notin B \\ A_2 \cup A_1^c \cap A_2 & -1 \in B, 0 \in B, 1 \notin B \\ A_1^c \cap A_2^c \cup A_1^c \cap A_2 & 0 \in B, -1 \in B, 1 \in B \\ A_2 \cup A_1^c \cap A_2^c & -1 \in B, 0 \in B, 1 \in B \\ \Omega & -1, 0, 1 \in B \end{cases}$$

$$X^{-1}(B) = \{\emptyset, A_2, \dots, \Omega\} \in \mathcal{F}$$

$$\sigma(X) = X^{-1}(B(\mathbb{R})) \subseteq \mathcal{F}$$

③ فرض کنید f, g دو تابع (توزیع) $(\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ باشند و $A \in \mathcal{F}$

$$h(\omega) = \begin{cases} f(\omega) & \omega \in A \\ g(\omega) & \omega \in A^c \end{cases} \quad f: (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

نشان دهیم که h تابع f است

$$\forall B \in \mathcal{B}(R) : h^{-1}(B) \in \mathcal{F}, \text{ (؟)}$$

$$\forall B \in \mathcal{B}(R) \quad f^{-1}(B), g^{-1}(B) \in \mathcal{F}$$

$$\{h(\omega)\}^{\leq t} = \{f(\omega)I_A(\omega) + g(\omega)I_{A^c}(\omega)\}^{\leq t}$$

فرض کنید $\mathcal{R} = (-\infty, \infty)$

$$\bigcap_{t \in \mathcal{T}} A_t, \bigcup_{t \in \mathcal{T}} A_t$$

را در دست آوریم.

$$\mathcal{T} = \{1, 2, \dots\} \quad A_t = (0, 1 + \frac{1}{t})$$

$$\mathcal{T} = (0, \infty) \quad A_t = [e^{-t}, e^t]$$

$$\begin{aligned} \bigcup_t A_t &= \bigcup_t (0, 1 + \frac{1}{t}) = (0, 2) \cup (0, 3/2) \cup \dots \\ &= (0, \sup(1 + \frac{1}{t})) = (0, 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bigcap_t A_t &= \bigcap_t (0, 1 + \frac{1}{t}) = (0, 2) \cap (0, 3/2) \dots \\ &= (0, 1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bigcup_{t \in \mathcal{T}} A_t &= \bigcup_0^\infty [e^{-t}, e^t] = [1, 1] \cup [e^{-1}, e] \dots \\ &= (\inf e^{-t}, \sup e^t) = (0, \infty) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bigcap_{t \in \mathcal{T}} A_t &= \bigcap_0^\infty [e^{-t}, e^t] = [1, 1] \cap [e^{-1}, e] \cap [e^{-2}, e^2] \dots \\ &= [\sup e^t, \inf e^{-t}] = [1, 1] = 1 \end{aligned}$$

① X, Y دو متغیرات در $(\Omega, \mathcal{F})$ باشد

$$Z(\omega) = \begin{cases} X & \omega \in A \\ Y & \omega \in A^c \end{cases} \quad A \in \mathcal{F}$$

② Z متغیرات X, Y است $G(X) \subseteq G(X, Y)$

$$Z(\omega) = \underbrace{X(\omega)}_{\text{در } A} \underbrace{I_A(\omega)}_{\text{در } A} + \underbrace{Y(\omega)}_{\text{در } A^c} \underbrace{I_{A^c}(\omega)}_{\text{در } A^c}$$

$$Z^{-1}(B) \in \mathcal{F} \subseteq Z^{-1}(B(R)) \subseteq \mathcal{F}$$

$$G(X) \subseteq G(X, Y) \quad G(X) = X^{-1}(B(R))$$

$$G(Y) = Y^{-1}(B(R))$$

$$G(X, Y) = G(X^{-1}(B(R)) \cup Y^{-1}(B(R)))$$

$$\text{چون } X^{-1}(B(R)) \subset X^{-1}(B(R)) \cup Y^{-1}(B(R))$$

$$\Rightarrow G(X) \subseteq G(X, Y)$$

④ $\{E_n\}, \{F_n\}$ دو مجموعه متناهی

$$P(E_n \cap F_n) \rightarrow P \quad \text{و} \quad P(F_n) \rightarrow P$$

$$P(E_n \cap F_n) = P(E_n) + P(F_n) - P(E_n \cup F_n)$$

$$P(E_n \cap F_n) \geq P(E_n) + P(F_n) - 1$$

$$P(F_n) \geq P(E_n \cap F_n) \geq P(E_n) + P(F_n) - 1$$

می بینیم

$$\liminf P(F_n) \geq \liminf P(E_n \cap F_n) \geq \liminf P(E_n) + \liminf P(F_n) - 1$$

$$P \geq \liminf P(E_n \cap F_n) \geq P + P - 1$$

⑦ فرض کنید A_n ها صبران‌های هستند. $A_n \subset A_{n+1}$ است. $\mathbb{R}$ و $\mathbb{Q}$

$\bigcup A_n$ ها صبران‌ها است

$$① \mathbb{R} \in \bigcup A_n \quad ② B \in \bigcup A_n \Rightarrow B^c \in \bigcup A_n$$

$$③ B_1, B_2 \in \bigcup A_n \quad B_1 \cup B_2 \in \bigcup A_n$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \bigcup A_n$$

$$\forall n \quad \mathbb{R} \in A_n \Rightarrow \mathbb{R} \in \bigcup A_n$$

$$B \in \bigcup A_n \Rightarrow \exists n \quad B \in A_n \Rightarrow B^c \in A_n \Rightarrow B^c \in \bigcup A_n$$

$$B_1, B_2 \in \bigcup A_n \Rightarrow \exists n, m; B_1 \in A_n, B_2 \in A_m \Rightarrow B_1 \cup B_2 \in A_{\max(n,m)} \\ \Rightarrow B_1 \cup B_2 \in \bigcup A_n$$

⑧ ناب‌کنندگی مجموعه نقطه‌ای از فضای نمونه X_n از صفی‌های تصادفی در آن‌ها محدود دارد

که بیش‌مرد است

$$\{\omega: \liminf X_n < \limsup X_n\}^c = \{\omega: \liminf X_n = \limsup X_n\} = \{\omega: \liminf X_n = \limsup X_n\}$$

$$= \{\omega: \liminf X_n < \limsup X_n\}$$

$$= \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{\liminf X_n \leq r \leq \limsup X_n\}$$

$$= \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \underbrace{\{\liminf X_n \leq r\}}_{\in \mathcal{F}} \cap \underbrace{\{\limsup X_n \geq r\}}_{\in \mathcal{F}}$$

چون X_n بیش‌مرد

نکته: اگر $f: (R, B(R)) \rightarrow (R, B(R))$ و $g: (R, B(R)) \rightarrow (R, B(R))$ کمیت‌های تصادفی است (ضعیف ترین شرط)

$$(R, B(R)) \xrightarrow{X} (R, B(R)) \xrightarrow{Y} (R, B(R))$$

$$\forall B \in B(R) \rightarrow X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$$

$$\forall B \in B(R) \rightarrow Y^{-1}(B) \in B(R)$$

$$(Y \circ X)^{-1}(B) = X^{-1}(Y^{-1}(B)) \in \mathcal{F}$$

اندازه پذیر Y ضعیف ترین است که Y بزرگ باشد

9- اگر $P(A_n) \geq \epsilon > 0$ و $P(A_n; i.o.) \geq \epsilon$

$$P(A_n; i.o.) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) = P(\lim_{n \rightarrow \infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k)$$

بزرگ B_k
 مجموعه B_k
 بزرگ B_k

$$P(A_n; i.o.) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \geq \epsilon$$

۱۵) فرض کنید $X_1, X_2, \dots$ متغیرات تصادفی مستقل و یکسان

$$(P(X \leq x) = 1 - e^{-x} \quad \text{توزیع نمایی})$$

$$P(X_n > \ln n; i.o.) = 1$$

$$P(X_n > n; i.o.) = 0$$

$$P(X_n > \ln n) = e^{-\ln n} = \frac{1}{n}$$

$$\sum \frac{1}{n} = \infty \rightarrow \sum P(A_n) = \infty \rightarrow P(A_n; i.o.) = 1$$

$$P(X_n > \ln n; i.o.) = 1$$

$$P(X_n > n) = e^{-n} \rightarrow \sum e^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-1})^n = \frac{e^{-1}}{1 - e^{-1}} = \frac{1}{e-1} < \infty$$

$$\sum P(X_n > n) < \infty \rightarrow P(X_n > n; i.o.) = 0$$

۸. فرض کنید $\gamma: (R, B(R)) \rightarrow (R, B(R))$, $X: (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (R, B(R))$ و $\gamma \circ X$ متغیر تصادفی است (ضدیف ترین شرط)

$$(\Omega, \mathcal{F}) \xrightarrow{X} (R, B(R)) \xrightarrow{\gamma} (R, B(R))$$

$$\forall B \in B(R) \rightarrow X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$$

$$\forall B \in B(R) \rightarrow \gamma^{-1}(B) \in B(R)$$

$$(\gamma \circ X)^{-1}(B) = X^{-1}(\gamma^{-1}(B)) \in \mathcal{F}$$

$\gamma \in B(R)$ متغیر تصادفی است γ اندازه پذیر
بهره ۲

۹. اگر $P(A_n) > \epsilon$ و $P(A_n; i.o.) > \epsilon$

$$P(A_n; i.o.) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) = P(\lim_{n \rightarrow \infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k)$$

توالی B_k به سمت بالا
توالی B_k به سمت پایین

$$P(A_n; i.o.) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) > \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) > \epsilon$$

۱۰. فرض کنید $X_1, X_2, \dots$ متغیر تصادفی مستقل و یکسان

$$(P(X \leq x) = 1 - e^{-x}) \quad \text{توزیع نمایی}$$

$$P(X_n > \ln n; i.o.) = 1$$

$$P(X_n > n; i.o.) = 0$$

$$P(X_n > \ln n) = e^{-\ln n} = \frac{1}{n}$$

$$\sum \frac{1}{n} = \infty \rightarrow \sum P(A_n) = \infty \rightarrow P(A_n; i.o.) = 1$$

$$P(X_n > \ln n; i.o.) = 1$$

$$P(X_n > n) = e^{-n} \rightarrow \sum e^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-1})^n = \frac{e^{-1}}{1 - e^{-1}} = \frac{1}{e-1} < \infty$$

$$\sum P(X_n > n) < \infty \rightarrow P(X_n > n; i.o.) = 0$$