(۱) اگر از هر ۱۰۰۰ مورد از یک بیماری خاص ۸۲۳ مورد به مرگ منجر شود فاصله اطمینان ۹۵٪ را برای نسبت مرگ و میر در افراد دارای بیماری مذکور بدست آورید.

$$\alpha = 0.05 \qquad \alpha/2 = 0.025 \qquad Z_{0.025} = 1.96$$

$$\hat{p} = \frac{823}{1000} = 0.823$$

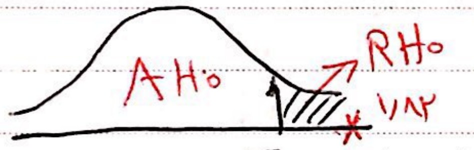
$$P:\ \hat{p} \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 0.823 \pm 1.96\sqrt{\frac{0.823 \times 0.177}{1000}}$$

$$= (0.799\ ,\ 0.847)$$

با اطمینان ۹۵٪ نسبت مرگ و میر این بیماری بین ۸۰ الی ۸۵ درصد است.

فرضیه $\begin{cases} H_0: p = 0.8 \\ H_1: p > 0.8 \end{cases}$ را آزمون کنید $(\alpha = 0.05)$

$$Z_0 = \boxed{\frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}}} \Rightarrow Z_0 = \frac{0.823 - 0.8}{\sqrt{\frac{0.8(1-0.8)}{1000}}} \simeq 1.82$$



$$Z_{0.05} = 1.64$$

$$1.82 > 1.64 \Rightarrow RH_0$$

(۲) بر مبنای نمونه‌ای تصادفی به حجم ۲۵ از توزیع نرمال ۹۵ درصد فاصله اطمینان برای میانگین جامعه $(106.8\ ,\ 115.2)$ بدست آمد. الف) مقدار انحراف معیار نمونه را بدست آورید. ب) فاصله اطمینان ۹۰ درصدی برای انحراف معیار بدست آورید. ج) فرضیه $\begin{cases} H_0: \sigma = 10 \\ H_1: \sigma \neq 10 \end{cases}$ را آزمون کنید.

Subject
Date

ج) فرض کنید میانگین واقعی جامعه ۱۰۸ باشد یک فاصله اطمینان ۹۰٪ برای انحراف معیار بدست آورید و فرضیه

$$\begin{cases} H_0: \sigma = 10 \\ H_1: \sigma \neq 10 \end{cases}$$

را آزمون نمایید.

$\alpha = 0/1$

$n < 30$ ، واریانس نامعلوم و نرمال $\quad \mu : \left(\bar{X} \pm t_{n-1,\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}\right)$

$$\begin{cases} \bar{X} + \overset{2/06}{t_{n-1,\alpha/2}} \frac{S}{\sqrt{n}} = 115/2 \\ \bar{X} - \overset{2/06}{t_{n-1,\alpha/2}} \frac{S}{\sqrt{n}} = 106/8 \end{cases} \qquad t_{24,\,0/025} = 2/06$$

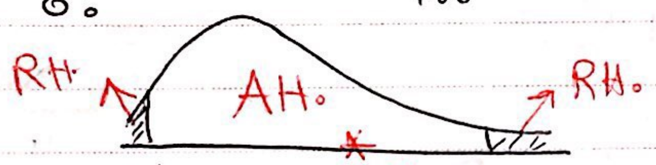
الف)

$$2\left(2/06 \frac{S}{\sqrt{25}}\right) = \underbrace{115/2 - 106/8}_{8/4} \Rightarrow S = 10/19$$

$$2\bar{X} = 222 \Rightarrow \bar{X} = 111$$

ب)

$$\chi_0^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{(25-1)(10/19)^2}{100} = 24/94$$



$$\chi^2_{\underbrace{n-1}_{24},\underbrace{1-\alpha/2}_{0/95}} \qquad \chi^2_{\underbrace{n-1}_{24},\underbrace{\alpha/2}_{0/05}}$$

$13/8 \qquad 36/4$

$24/92 \not> 36/4$

$\not< 13/8$

$\Rightarrow AH_0$

$$\sigma^2 : \left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}\right) = \left(\frac{24 \times 10/19^2}{36/4}, \frac{24 \times 10/19^2}{13/8}\right)$$

$$= (68/46, 180/58)$$

$$\sigma : (8/27, 13/44)$$

۳

Subject
Date

$\mu = ۱۰۸$ $\qquad \sigma^{۲}: \left(\frac{n S_n^{۲}}{\chi^2_{n, \alpha/2}} , \frac{n S_n^{۲}}{\chi^2_{n, 1-\alpha/2}} \right)$

$$S^{۲} = ۱۰/۱۹^{۲} \rightarrow \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^{۲} = \frac{1}{n-1} \left(\sum x_i^{۲} - n\bar{x}^{۲} \right)$$

$$= \frac{۱}{۲۴} \left(\sum x_i^{۲} - ۲۵ \times ۱۱۱^{۲} \right) = ۱۰/۱۹^{۲}$$

$$\Rightarrow \sum x_i^{۲} = ۳۱۰۵۱۷/۱$$

$$S_n^{۲} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^{۲} = \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^{۲} + n\mu^{۲} - ۲ \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i}_{n\bar{x}} \mu \right]$$

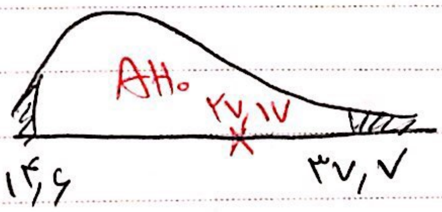
$$= \frac{۱}{۲۵} \left[۳۱۰۵۱۷/۱ + ۲۵ \times ۱۰۸^{۲} - ۲ \times ۲۵ \times ۱۱۱ \times ۱۰۸ \right]$$

$$= ۱۰۸/۴۸$$

$$\sigma^{۲}: \left(\frac{۲۵ \times ۱۰۸/۴۸}{\underbrace{۳۷/۷}_{\chi^{۲}_{۲۵, ۰/۰۵}}} , \frac{۲۵ \times ۱۰۸/۴۸}{\underbrace{۱۴/۹}_{\chi^{۲}_{۲۵, ۰/۹۵}}} \right)$$

$$= (۷۲/۰۷ , ۱۸۹/۱۱) \Rightarrow \sigma : (۸/۴۸ , ۱۳/۶۴)$$

$$\chi_0^2 = \frac{n S_n^{۲}}{\sigma_0^{۲}} = \frac{۲۵ \times ۱۰۸/۴۸}{۱۰۰} = ۲۷/۱۷$$



$۲۷/۱۷ \ngtr ۳۷/۷$

$\nless ۱۴/۹$

$\Rightarrow AH_0$

Subject

Date

③ براساس اطلاعات زیر یک فاصله اطمینان ۹۵٪ برای میانگین بدست آورید.

$n = 60 \quad \sum x_i = 752 \quad \sum (x_i - \bar{x})^2 = 426$

$$\mu : \left(\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}\right) = \left(12.5 \pm \overbrace{1.96 \frac{\sqrt{7.22}}{\sqrt{60}}}^{1.827}\right)$$

$$\sum_{1}^{60} x_i = 752 \Rightarrow \bar{x} = \frac{752}{60} = 12.5 \qquad \cancel{(11.77 \text{ و } 13.23)}$$

$$(11.82 \text{ و } 13.18)$$

$$s^2 = \frac{1}{59} \times 426 = 7.22$$

با اطمینان ۹۵٪ میانگین بین این دو عدد است

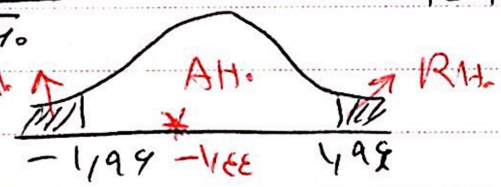
ب) فرضیه

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 13 \\ H_1 : \mu \neq 13 \end{cases}$$

را آزمون نمایید. $\alpha = 0.05$

$$Z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{12.5 - 13}{\frac{\sqrt{7.22}}{\sqrt{60}}} \cong -1.44$$

$$|Z_0| = 1.44 \not> 1.96$$



از فاصله اطمینان هم می توان نتیجه گرفت

④ زمان واکنش ۳۰ راننده دارای میانگین ۰/۸۳ ثانیه انحراف معیار ۰/۲ ثانیه است یک فاصله اطمینان ۹۵٪ برای میانگین زمان واکنش کل رانندگان به روش t بیابید (توزیع نرمال)

$n = 30 \downarrow$

$$\bar{x} = 0.83 \qquad s = 0.2$$

$$\mu : \bar{x} \pm \underbrace{t_{n-1, \alpha/2}}_{\substack{t_{29, 0.025} \\ 2.04}} \frac{s}{\sqrt{n}} = 0.83 \pm 2.04 \frac{0.2}{\sqrt{30}}$$

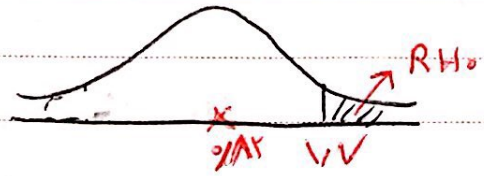
$$= (0.76 \text{ و } 0.90)$$

با اطمینان ۹۵٪ میانگین واکنش رانندگان بین ۰/۷۶ و ۰/۹۰ ثانیه است

Subject ۳
Date

ب) فرضیه $\begin{cases} H_0: \mu = 0/8 \\ H_1: \mu > 0/8 \end{cases}$ را آزمون کنید

$$T = \frac{0/83 - 0/8}{\frac{0/2}{\sqrt{30}}} \simeq 0/82$$



$$t_{29,0/05} = 1/7$$

$$0/82 \ngtr 1/7 \Rightarrow AH_0$$

۵) داده های ثبت شده زیر مدت زمان لازم برای جوانه زدن نژاد حبوبی از نخود را برای ۷ دانه ارائه می دهد یک فاصله اطمینان ۹۵٪ برای میانگین واقعی مدت زمان لازم جوانه زدن نخود بدست آورید

12 16 15 20 17 11 18

$$\bar{x} = \frac{12 + \dots + 18}{7} = 15,57 \qquad S^2 = \frac{1}{6}\left[(12- \ )^2 + \dots (18- \ )^2\right]$$

$$= (3,21)^2$$

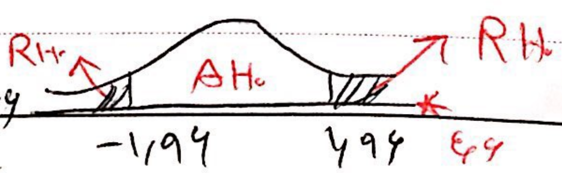
$$\mu : (\bar{x} \pm \underbrace{t_{6,0/025}}_{2,45} \frac{s}{\sqrt{7}}) = (15,57 \pm 2,45 \frac{3,21}{\sqrt{7}})$$

$$= (12,61 \ , \ 18,54)$$

$\begin{cases} H_0: \mu = 10 \\ H_1: \mu \neq 10 \end{cases}$ را آزمون کنید

$$T_0 = \frac{15,57 - 10}{\frac{3,21}{\sqrt{7}}} = 4,6$$

$$4,61 > 1,96 \Rightarrow RH_0$$



PAPCO

Subject
Date

(۶) فرض کنید $X \sim N(\mu, 4)$ برای آزمون
$$\begin{cases} H_0: \mu = 0 \\ H_1: \mu = 1 \end{cases}$$
یک نمونه تصادفی ۲۵ تایی از X در نظر بگیرید اگر $\bar{X} \geq 0/4$ ناحیه بحرانی باشد (ناحیه رد فرض صفر) خطاها و توان آزمون را محاسبه کنید

$$\alpha = P(RH_0 \mid \text{درست } H_0) = P_{\mu=0}(\bar{X} \geq 0/4)$$

$$= P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{0/4 - 0}{\frac{2}{5}}\right) = P(Z \geq 1)$$

$$= 1 - \Phi(1) = 0/1587$$

$$\beta = P(RH_1 \mid \text{درست } H_1) = P_{\mu=1}(\bar{X} < 0/4)$$

$$= P\left(Z < \frac{0/4 - 1}{\frac{2}{5}}\right) = P(Z < -1/5)$$

$$= \Phi(-1/5) = 0/0668$$

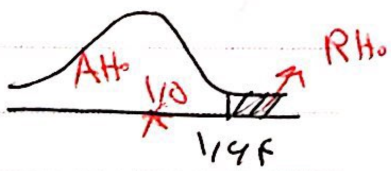
توان آزمون $= \gamma = 1 - \beta = 1 - 0/0668 = 0/9332$

PAPCO

۷) فرض کنید $X \sim N(\mu, 4)$ یک نمونه ۱۰۰ تایی در اختیار داریم به طوری که $\bar{X} = 4.2$ آزمون زیر را به روش p مقدار انجام دهید در دو سطح ۰٫۰۵ و ۰٫۱

$$\begin{cases} H_0: \mu = 3.9 \\ H_1: \mu > 3.9 \end{cases}$$

$$Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{4.2 - 3.9}{\frac{2}{10}} = 1.5$$



$$p\text{-value} = P(Z > z_0) = P(Z > 1.5)$$

$$= 1 - \underbrace{\Phi(1.5)}_{0.9332} \cong 0.067 \not< 0.05 \Rightarrow AH_0$$

$$0.067 < 0.1 \Rightarrow RH_0$$