فصل ۹

حل مسائل

فصل ۱

۱-۱ یک ستون ماتریس C' و در نتیجه یک ستون ماتریس $B'C'$ (طبق قسمت اول قضیه ۱-۴-۱) و در نتیجه یک سطر ماتریس CB صفر است.

۱-۲ بنابر تعریف داریم

$$\operatorname{tr}(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

الف) c یک عدد حقیقی است.

$$c\operatorname{tr}(A)=c\sum_{i=1}^{n} a_{ii}=\sum_{i=1}^{n} ca_{ii}=\operatorname{tr}(cA)$$

ب) فرض کنید A و B دو ماتریس $n\times k$ باشند. آنگاه مجموع A و B ماتریسی مانند D از مرتبه $n\times k$ است که $\forall_{i,j}$ و $d_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$

$$\operatorname{tr}(A+B)=\sum_{i=1}^{n}(a_{ii}+b_{ii})=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}+\sum_{i=1}^{n} b_{ii}=\operatorname{tr}(A)+\operatorname{tr}(B)$$

پ) اگر $A\sim n\times k$، $B\sim k\times n$، $E=AB$ و $F=BA$ آنگاه

$$\operatorname{tr}(AB)=\sum_{i=1}^{n} e_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{t=1}^{k} a_{it}b_{ti}\right]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{k} a_{it}b_{ti}$$

Scanned with CamScanner

$$\operatorname{tr}(BA)=\sum_{i=1}^{n} t_{ii}=\sum_{i=1}^{k}\left[\sum_{t=1}^{n} b_{it}a_{ti}\right]=\sum_{i=1}^{k}\sum_{t=1}^{n} b_{it}a_{ti}$$
$$=\sum_{i=1}^{k}\sum_{t=1}^{n} a_{ti}b_{it}=\sum_{t=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} a_{ti}b_{it}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{k} a_{it}b_{ti}=\operatorname{tr}(AB)$$

ت) با فرض $D=AB$، $E=CA$ و استفاده از قسمت (پ) می‌توان نوشت:

$$\operatorname{tr}(ABC)=\operatorname{tr}(DC)=\operatorname{tr}(CD)=\operatorname{tr}(CAB)=\operatorname{tr}(EB)=\operatorname{tr}(BE)=\operatorname{tr}(BCA)$$

۱-۳ الف)

$$A^2=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & cb+d^2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\Rightarrow A=\begin{bmatrix} \pm\sqrt{-bc} & b \\ c & \mp\sqrt{-bc} \end{bmatrix}$$

مثلاً:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} -\sqrt{2} & -2 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix},\dots$$

ب)

$$AB=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\Rightarrow a^2+bc=cb+d^2, ab+bd=ca+dc=0$$

مثلاً

$$\Rightarrow A=\pm I \text{ یا } A=\begin{bmatrix} 0 & b \\ \frac{1}{b} & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix},\dots$$

Scanned with CamScanner

پ)

$$A(B-C)=O\Rightarrow\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a' & b'\\ c' & d'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow aa'+bc'=ab'+bd'=ca'+bc'=cb'+dd'=0$$

مثلاً

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix},B-C=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix},\ldots$$

۱-۴ فرض کنید e_j یک‌ماتریس ستونی است که درایه jام برابر واحد و سایر درایه‌های آن برابر صفر می‌باشد. طبق لم ستونی داریم:

$Ae_j=a_{(j)}=A$ ستون jام ماتریس و $j=1,\ldots,k$

که طبق فرض مسئله باید برابر o باشد. پس $a_{(j)}=o\ \forall j=1,\ldots,k$

در نتیجه $A=O$

۱-۵ A پاد متقارن است هرگاه $A=-A'$ یعنی $\forall_{i,j}$ و $a_{ij}=-a_{ji}$ پس

$$a_{ii}=-a_{ii}\Rightarrow 2a_{ii}=0\Rightarrow a_{ii}=0,\forall_i$$

۱-۶

$$(AA')'=(A')'A'=AA'$$

$$(A'A)'=A'(A')'=A'A$$

$$(A+A')'=A'+(A')'=A'+A=A+A'$$

$$(A-A')'=A'-(A')'=A'-A=-(A+A')$$

۱-۷

الف)

$$(A+B)'=A'+B'=A+B$$

Scanned with CamScanner

ب) فرض کنید A متقارن و وارون‌پذیر است. می‌توان نوشت

$$(A^{-1})'=(A')^{-1}=A^{-1}$$

۱-۸ (کفایت) اگر $AB=BA$ آنگاه

$$(AB)'=(BA)'=A'B'=AB$$

(لزوم) اگر $A'=A$ و $B'=B$ آنگاه

$$BA=B'A'=(AB)'=AB$$

۱-۹

$$C=A+A',D=A-A'\Rightarrow A=\frac{1}{2}(C+D)$$

$$C'=(A+A')'=A'+A=C\ ,D'=(A-A')'=(A'-A)=-(A-A')=-D$$

۱-۱۰

الف) $AB=AC\Rightarrow A^{-1}AB=A^{-1}AC\Rightarrow B=C$

ب) $AB=O\Rightarrow A^{-1}AB=A^{-1}O\Rightarrow B=O$

۱-۱۱ α

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+bc' & cb'+dd' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow aa'+bc'=cb'+dd'=1,ab'+bd'=ca'+dc=0$$

$$\Rightarrow a'=d'/(ad-bc),b'=-b/(ad-bc),c'=-c/(ad-bc),d'=a'/(ad-bc)$$

پس A^{-1} وجود دارد اگر و تنها اگر $ad-bc\neq 0$. ضمناً اگر A نامنفرد باشد داریم:

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

۱-۱۲ الف

$$A=\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}=\text{منفرد}\ ,\ B=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\text{منفرد}\Rightarrow A+B=\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}=\text{نامنفرد}$$

Scanned with CamScanner

$$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\text{نامنفرد}\ ,\quad B=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=\text{نامنفرد}\Rightarrow A+B=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}=\text{منفرد}$$

۱-۱۳ فرض کنید $A\sim n\times k$, $\mathbf{x}'\sim 1\times n$. با افراز سطری A و افراز ستونی $\mathbf{x}'$ می‌توان نوشت:

$$\mathbf{x}'A=[x_1\ \vdots\ \cdots\ \vdots\ x_n]\begin{bmatrix}a'_1\\ \vdots\\ a'_n\end{bmatrix}=x_1a'_1+\cdots+x_na'_n$$

۱-۱۴ با افراز ستونی ماتریس B می‌توان نوشت:

$$AB=A\left[\mathbf{b}_{(1)}\ \cdots\mathbf{b}_{(j)}\ \cdots\mathbf{b}_{(m)}\right]=\left[A\mathbf{b}_{(1)}\ \cdots A\mathbf{b}_{(j)}\ \cdots A\mathbf{b}_{(m)}\right]$$

$A\mathbf{b}_{(j)}=AB$ ستونی jام ماتریس

۱-۱۵ فرض کنید $B=A'$. با افزار سطری ماتریس B و افزار ستونی ماتریس A می‌توان نوشت:

$$AA'=BA=\begin{bmatrix}\mathbf{b}'_1\\ \vdots\\ \mathbf{b}'_k\end{bmatrix}\left[a_{(1)}\ \cdots\ a'_{(k)}\right]=\begin{bmatrix}\mathbf{b}'_1a_{(1)}&\cdots&\mathbf{b}'_1a_{(k)}\\ \mathbf{b}'_ka_{(1)}&\cdots&\mathbf{b}'_ka_{(k)}\end{bmatrix}$$

پس

$$A'A\ \text{درایه}\ j\text{ام روی قطر اصلی}=\mathbf{b}'_ja_{(j)}=a'_{(j)}a_{(j)}=[a_{1j}\ \cdots a_{nj}]\begin{bmatrix}a_{1j}\\ \vdots\\ a_{nj}\end{bmatrix}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^2\geq 0,\forall j$$

ضمناً

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^2=0\ \Rightarrow\ a_{ij}=0,\forall j$$

پس اگر همه درایه‌های روی قطر اصلی $A'A$ برابر صفر باشند داریم:

Scanned with CamScanner

$$a_{ij}=0, \forall_{i,j} \Rightarrow A=O$$

۱-۱۶ الف) بازای $k=1$ بدیهی است. پس فرض کنید j کوچکترین عدد صحیح و مثبتی است که $A^j \neq O$ $(1<j<k)$. در جهت استفاده از برهان خلف فرض کنید B وارون A باشد می‌توان نوشت:

$$AB=I \Rightarrow A^j AB=A^j \Rightarrow A^{j+1}B=A^j \Rightarrow OB=A^j \Rightarrow A^j=O \Rightarrow \text{تناقض}$$

ب) اگر $A^k=O$. می‌توان نوشت:

$$(I-A)(I+A+\cdots+A^{k-1})=I+A+\cdots+A^{k-1}-(A+A^k+\cdots+A^k)$$
$$=I-A^k=I-O=I$$

پس ماتریس $B=I+A+\cdots+A^{k-1}$ وارون راست ماتریس $I-A$ است.

به طریق مشابه می‌توان نشان داد که B وارون چپ $I-A$ نیز هست. پس B وارون $I-A$ است.

۱-۱۷

$$1_n' 1_n=[1,\cdots,1]\begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}=[n]=n$$

$$J_n=1_n 1_n'=\begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}[1,\cdots,1]=\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & & & \\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}$$

$J_n'=(1_n 1_n')=1_n 1_n'=J_n \Rightarrow$ متقارن است J_n

$H_n'=(I_n-\frac{1}{n}J_n)'=I_n'-\frac{1}{n}J_n'=I_n-\frac{1}{n}J_n=H_n \Rightarrow$ متقارن است H_n

$$J_n^2=(1_n 1_n')(1_n 1_n')=1_n(1_n' 1_n)1_n'=1_n \times n \times 1_n'=n\, 1_n 1_n'=J_n$$

$$H_n^2=\left(I_n-\frac{1}{n}J_n\right)\left(I_n-\frac{1}{n}J_n\right)=I_n-\frac{2}{n}J_n+\frac{1}{n^2}J_n^2$$

$$=I_n-\frac{2}{n}J_n+\frac{1}{n}J_n=I_n-\frac{1}{n}J_n=H_n$$

Scanned with CamScanner

الف)

$$\frac{1}{n}\mathbf{1}_n'\mathbf{x}=\frac{1}{n}[1\ \cdots\ 1]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}$$

ب)

$$H_n\mathbf{x}=(\mathbf{1}_n-\frac{1}{n}J_n)\mathbf{x}=\mathbf{x}-\frac{1}{n}\mathbf{1}_n(\mathbf{1}_n'\mathbf{x})=\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}\ \mathbf{1}_n$$

$$=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\bar{x}\\x\\\vdots\\\bar{x}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1-\bar{x}\\x_2-\bar{x}\\\vdots\\x_n-\bar{x}\end{bmatrix}$$

پ)

$$\frac{1}{n}\mathbf{x}'H\mathbf{x}=\frac{1}{n}\mathbf{x}'H^2\mathbf{x}=\frac{1}{n}(\mathbf{x}'H')(H\mathbf{x})=\frac{1}{n}(H\mathbf{x})'(H\mathbf{x})$$

$$=\frac{1}{n}[x_1-\bar{x}\ \ x_2-\bar{x}\ \ \cdots\ \ x_n-\bar{x}]\begin{bmatrix}x_1-\bar{x}\\x_2-\bar{x}\\\vdots\\x_n-\bar{x}\end{bmatrix}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=s^2$$

۱-۱۸ الف) می‌توان نوشت:

$$\left[\frac{1}{n}X'\mathbf{1}_n\right]'=\frac{1}{n}\mathbf{1}_n'X=\frac{1}{n}\mathbf{1}_n'[\mathbf{x}_{(1)}\ \ \mathbf{x}_{(2)}\ \ \cdots\ \mathbf{x}_{(k)}]$$

$$=\left[\frac{1}{n}\mathbf{1}_n'\mathbf{x}_{(1)}\ \ \frac{1}{n}\mathbf{1}_n'\mathbf{x}_{(2)}\ \ \cdots\ \frac{1}{n}\mathbf{1}_n'\mathbf{x}_{(k)}\right]=[\bar{x}_1\bar{x}_2\ \cdots\bar{x}_k]=\bar{\mathbf{x}}'$$

ب)

$$\frac{1}{n}X'HX=\frac{1}{n}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_{(1)}'\\\vdots\\\mathbf{x}_{(k)}'\end{bmatrix}H[\mathbf{x}_{(1)}\ \cdots\ \mathbf{x}_{(k)}]=\frac{1}{n}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_{(1)}'H\\\vdots\\\mathbf{x}_{(k)}'H\end{bmatrix}[x_{(1)}\ \cdots x_{(k)}]$$

$$=\frac{1}{n}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_{(1)}'H\mathbf{x}_{(1)}&\cdots\mathbf{x}_{(1)}'H\mathbf{x}_{(k)}\\\vdots\\\mathbf{x}_{(k)}'H\mathbf{x}_{(1)}&\cdots\mathbf{x}_{(k)}'H\mathbf{x}_{(k)}\end{bmatrix}$$

Scanned with CamScanner

$$=\begin{bmatrix} S_{11} & \cdots S_{1k} \\ \vdots & \\ S_{1k} & \cdots S_{kk} \end{bmatrix}, S_{jr}=\frac{1}{n}(\mathbf{x}_{(j)}-\bar{x})'(\mathbf{x}_{(i)}-\bar{\mathbf{x}})$$

$$=S$$

۱۹-۱

$$A'=[I-X(X'X)^{-1}X']'=I'-[X(X'X)^{-1}X']'=I-X[(X'X)^{-1}]'X'$$
$$=I-X(X'X)^{-1}X'$$

چون $X'X$ (طبق مسئله ۱-۶) و درنتیجه $(X'X)^{-1}$ متقارن است.

$$A^2=[I-X(X'X)X'][I-X(X'X)^{-1}X']$$
$$=I-2X(X'X)^{-1}X'+X(X'X)^{-1}X'X(X'X)^{-1}X'$$
$$=I-2X(X'X)^{-1}X'+X(X'X)^{-1}X'=I-X(X'X)^{-1}X'=A$$

فصل ۲

۱-۲

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2 \qquad\qquad +4x_4=6 \\ \qquad\qquad x_2-2x_3+x_4=3 \\ 4x_1 \qquad\qquad\qquad +x_4=5 \\ -3x_1+x_2+2x_3 \qquad\qquad =0 \end{cases}$$

۲-۲ فرض کنید $\mathbf{x}=\mathbf{c}_1$ و $\mathbf{x}=\mathbf{c}_2$ هر دو جوابهای دستگاه باشند. پس داریم

$$A\mathbf{c}_1=\mathbf{b} \quad , \quad A\mathbf{c}_2=\mathbf{b}$$

فرض کنید $a\in R$, $\mathbf{d}=a\mathbf{c}_1+(1-a)\mathbf{c}_2$: می‌توان نوشت:

$$A\mathbf{d}=A[a\mathbf{c}_1+(1-a)\mathbf{c}_2]=aA\mathbf{c}_1+(1-a)A\mathbf{c}_2=a\mathbf{b}+(1-a)\mathbf{b}=\mathbf{b}$$

پس بازای هر $a\in R$ $\mathbf{x}=a\mathbf{c}_1+(1-a)\mathbf{c}_2$ جواب دستگاه است.

Scanned with CamScanner

۳-۲

$$B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{عمل نوع } I]{\text{تعویض سطرهای اول و دوم}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{عمل نوع } II]{\text{تقسیم سطر اول بر ۲}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{-1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{عمل نوع } III]{\text{افزون مضارب مناسبی از سطر اول به سایر سطرها}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{-1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & -3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & 2 & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{عمل نوع } II]{\text{تقسیم سطر دوم بر ۴}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{-1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & -3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & 2 & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{عمل نوع } III]{\text{افزون مضارب مناسبی از سطر دوم به سطرهای پایین‌تر}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{-1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 0 & -3 & \frac{-11}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$$

Scanned with CamScanner

$$\xrightarrow[\text{عمل نوع } II]{\text{تقسیم سطر سوم بر } -3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{-1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{11}{24} \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{عمل نوع } III]{\text{افزون مضرب مناسبی از سطر سوم به سطر چهارم}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{-1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{11}{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-13}{24} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{عمل نوع } II]{\text{تقسیم سطر چهارم بر } \frac{-13}{24}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{-1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{11}{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۲-۴ روش گاوس: (ت)

$$G=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 5 & -1 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = H$$

چون تعداد مجهولات برابر ۳ و تعداد ستونهای دارای درایه پیشرو (ستونها یک و دو)

$$-\frac{22}{24} + \frac{3}{8} = \frac{-22+9}{24} = \frac{13}{24}$$

Scanned with CamScanner

برابر ۲ است، مقدار یکی از مجهولات اختیاری می‌باشد.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 5 \\ x_2 - \frac{1}{2}x_3 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

اگر مقدار x_3 را برابر t اختیار کنیم داریم:

$$x_2 = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}x_3 = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}t \Rightarrow x_1 = 5 - 3x_2 = 5 - 3(\frac{-1}{2} + \frac{1}{2}t) = \frac{7}{2} - \frac{3}{2}t$$

روش گاوس جردن: الف)

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 15 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 15 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \\ 0 & -2 & -7 & -25 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 15 \\ 0 & -2 & -7 & -25 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 15 \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} & \frac{25}{2} \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 15 \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} & \frac{25}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = H \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} & \frac{25}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = H \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

بقیه نیز به‌طور مشابه حل می‌شود.

۲-۵ (ب)

$$G = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Scanned with CamScanner

$$\rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ & ۲ \\ ۰ & -۳ & -۳ & -۶ \\ ۰ & -۱ & -۲ & -۵ \\ ۰ & -۱ & -۱ & -۲ \\ ۰ & -۵ & -۱ & ۲ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۲ \\ ۰ & -۱ & -۲ & -۵ \\ ۰ & -۱ & -۱ & -۲ \\ ۰ & -۵ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ & -۱ & -۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۹ & ۲۷ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۹ & ۲۷ \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۹ & ۲۷ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} = H$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_۱ + ۲x_۲ + x_۳ = ۲ \\ x_۲ + x_۳ = ۲ \Rightarrow x_۳ = ۳ \Rightarrow x_۲ = ۲ - x_۳ = -۱ \Rightarrow x_۱ = ۲ - ۲x_۲ - x_۳ = ۱ \\ x_۳ = ۳ \end{cases}$$

بقیه نیز به‌طور مشابه حل می‌شود.

۲-۶ (کفایت)

$$\begin{cases} A\mathbf{x}_۱ = \mathbf{b} \\ \vdots \\ A\mathbf{y}_۱ = \mathbf{o} \end{cases} \Rightarrow A\mathbf{x}_۱ + A\mathbf{y}_۱ = \mathbf{b} + \mathbf{o} \Rightarrow A(\mathbf{x}_۱ + \mathbf{y}_۱) = \mathbf{b}$$

پس $\mathbf{x}_۰ = \mathbf{x}_۱ + \mathbf{y}_۱$ جواب دستگاه $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ است.

(لزوم) چون جواب بدیهی $\mathbf{x} = \mathbf{o}$ همواره یک جواب دستگاه همگن $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ است، اگر $\mathbf{x}_۰$ یک جواب دستگاه $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ باشد می‌توان نوشت $\mathbf{x}_۰ = \mathbf{x}_۱ + \mathbf{y}_۱$ که $\mathbf{y}_۱ = \mathbf{o}$

Scanned with CamScanner

۲-۷ الف) اگر جای سطرهای اول و سوم I_3 را عوض کنیم داریم:

$$E=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ب) اگر سطر دوم I_3 در $-c$ ضرب کنیم داریم:

$$E=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ج) اگر k برابر سطر اول ماتریس I_3 را به سطر سوم آن بیافزاییم داریم:

$$E=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۲-۸

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=I_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{-3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Scanned with CamScanner

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{-3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ \frac{-3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = A^{-1}$$

بقیه نیز به‌طور مشابه حل می‌شود.

۹-۲ $A \overset{R}{\sim} O \Rightarrow A = E_r \cdots E_1 O = O \Rightarrow A = O$

۱۰-۲ $A \overset{R}{\sim} B \Rightarrow B = E_r \cdots E_1 A = PA \ , \ P = E_r \cdots E_1$

$A \overset{C}{\sim} B \Rightarrow B = AF_1 \cdots F_r = AQ \ , \ Q = F_1 \cdots F_r$

چون ماتریسهای مقدماتی نامنفرد هستند دو ماتریس P و Q نیز نامنفرد هستند.

۱۱-۲ $A \overset{R}{\sim} B \Rightarrow B = E_r \cdots E_1 A \Rightarrow B' = A' E_1' \cdots E_r'$

چون ترانهادهٔ هر ماتریس مقدماتی نیز یک ماتریس مقدماتی است داریم: $A' \overset{C}{\sim} B'$

۲-۱۲ الف)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{ضرب سطر اول در } -1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 5 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Scanned with CamScanner

$$\xrightarrow[\text{و کاستن ۴ برابر سطر اول از سطر سوم}]{\text{کاستن ۵ برابر سطر اول از سطر دوم}} \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۲ \\ ۰ & ۷ & ۱۴ \\ ۰ & ۷ & ۱۴ \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{تقسیم سطر دوم بر ۷}} \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۲ \\ ۰ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۷ & ۱۴ \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{کاستن ۷ برابر سطر دوم از سطر سوم}} \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۲ \\ ۰ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{افزودن سطر دوم به سطر اول}} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{کاستن دو برابر ستون دوم از ستون سوم}} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_۲ & O \\ O & O \end{bmatrix}$$

$$I_۳ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{کاستن سطر دوم از سطر اول}} \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{افزودن ۷ برابر سطر دوم به سطر سوم}} \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۷ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{ضرب سطر دوم در ۷}} \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۷ & ۰ \\ ۰ & ۷ & ۱ \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{افزودن ۵ برابر سطر اول به سطر دوم}]{\text{افزودن ۴ برابر سطر اول به سطر سوم}} \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ ۵ & ۲ & ۰ \\ ۴ & ۳ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{تقسیم سطر اول بر } -۱} \begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۰ \\ ۵ & ۲ & ۰ \\ ۴ & ۳ & ۱ \end{bmatrix} = P$$

$$I_۳ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{افزودن دو برابر ستون دوم به ستون سوم}} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} = Q$$

Scanned with CamScanner

۱۳-۲

$$A \sim O \Rightarrow A = E_2 \quad \cdots \quad E_1 O F_1 \quad \cdots \quad F_k = O$$

۱۴-۲

$$A \sim B \Rightarrow B = E_r \quad \cdots \quad E_1 A F_1 \quad \cdots \quad F_k$$

$$\Rightarrow B' = F_k' \quad \cdots \quad F_1' A' E_1' \quad \cdots \quad E_r'$$

چون ترانهادهٔ هر ماتریس مقدماتی یک ماتریس مقدماتی است داریم $A' \sim B'$.

۱۵-۲

$$A \sim B \Rightarrow A = PBQ$$

که P و Q نامنفرد هستند. (کفایت) اگر B^{-1} نامنفرد باشد داریم:

$$AQ^{-1} = PB \Rightarrow AQ^{-1}B^{-1} = P \Rightarrow AQ^{-1}B^{-1}P^{-1} = I \Rightarrow A^{-1} = Q^{-1}B^{-1}P^{-1}$$

(لزوم) مشابه کفایت است.

۱۶-۲

$$A\mathbf{x} = \mathbf{x} \Rightarrow A\mathbf{x} - \mathbf{x} = o \Rightarrow (A - I)\mathbf{x} = o$$

پس جواب(های) دستگاه مفروض جواب(های) دستگاه همگن $B\mathbf{x} = o$ است که $B = A - I$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{تبدیل به پلکانی سطری}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = H$$

پس دستگاه دارای جواب یکتای $x = 0$ است.

۱۷-۲

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{کاستن سه برابر سطر اول از سطر سوم}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{تقسیم سطر سوم بر ۴}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow I = E_2 E_1 A \Rightarrow A = E_1^{-1} E_2^{-1}$$

Scanned with CamScanner

که $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ = ماتریسی که از افزودن سه برابر سطر اول I_2 به سطر دوم آن حاصل می‌شود $= E_1^{-1}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ = ماتریسی که از ضرب سطر دوم I_2 در ۴ حاصل می‌شود $= E_2^{-1}$

۱۸-۲

$$G=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -6 \\ 3 & -7 & -2 & -9 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -1 & -11 & 9 \\ 0 & 4 & -5 & 13 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 11 & -9 \\ 0 & 4 & -5 & 13 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 11 & -9 \\ 0 & 0 & -49 & 49 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 11 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -6 \\ x_2 + 11x_3 = -9 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_3 = -1 \Rightarrow x_2 = -9 - 11x_3 = 2 \quad x_1 = -6 + 2x_2 - 3x_3 = 1$$

۱۹-۲

$$B = E_2 E_1 A \Rightarrow C = E_2 E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

۲۰-۲

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Scanned with CamScanner

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow I = E_6 \cdots E_1 A \Rightarrow A = E_1^{-1} \cdots E_6^{-1}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۲-۲۱ (برهان خلف) فرض کنید A منفرد است در این صورت $A \overset{R}{\approx} C$ که C دارای یک سطر صفر است. پس:

$$C = E_r \cdots E_1 A$$

$$CB = E_r \cdots E_1 AB$$

چون یک سطر CB صفر است، نتیجه می‌گیریم که AB هم‌ارز سطری ماتریسی است که یک سطر صفر دارد و در نتیجه منفرد است که این (بنابر قضیه ۲-۵-۳) خلاف فرض نامنفرد بودن AB است.

اثبات نامنفرد بودن B مشابه است.

۲-۲۲ اثبات نامنفرد بودن A_1 مانند اثبات نامنفرد بودن A در مسئله ۲-۲۲ است. اثبات با استقراء کامل می‌شود.

فصل ۳

۳-۱ الف) فضای برداری نیست چون تحت عمل ضرب در اعداد حقیقی بسته نیست.

ب) فضای برداری نیست چون نه تحت عمل جمع و نه ضرب در اعداد حقیقی بسته نیست.

پ) فضای برداری نیست چون نه تحت عمل جمع و نه ضرب در اعداد حقیقی بسته نیست.

۳-۲ الف) طبق خواص فضای برداری: عضو خنثی

$$0 \odot (x_1, x_2) = (0,0) \Rightarrow \Theta = (0,0) =$$

Scanned with CamScanner

اما

$$(x_1,x_2)+\Theta=(x_1,x_2)+(0,0)=(2x_1,x_2)\neq(x_1,x_2)$$

ب) بدیهی است که $(0,0)$ عضو خنثی است. از طرفی

$$0\odot(x_1,x_2)=(0,x_2)\Rightarrow\Theta=(0,x_2)$$

پس عضو خنثی یکتا نیست.

(پ) $0\odot(x_1,x_2)=(0,0)\Rightarrow\Theta(0,0)=$ عضو خنثی

اما

$$(x_1,x_2)+\Theta=(x_1,x_2)+(0,0)=(2x_1,2x_2)\neq(x_1,x_2)$$

۳-۳

می‌دانیم برای هر عدد حقیقی x

$x-[x]\in[0,1)$ یا $0\leq x-[x]<1$ یا $[x]\leq x<[x]+1$

(الف ـ i) $x,y\in V\Rightarrow x\oplus y=x+y-[x+y]\in[0,1)\Rightarrow x\oplus y\in V$

(ب ـ i) $x\in V,c\in R\Rightarrow c\odot x=cx-[cx]\in[0,1]\Rightarrow c\odot x\in V$

پس V تحت دو عمل $\oplus$ و $\odot$ بسته است. فرض کنید $x\in V$ پس $[x]=0$ و می‌توان نوشت:

$0\odot x=0-[0]=0\Rightarrow\Theta=$ عضو خنثی $=0$

(الف ـ iv) $x\oplus\Theta=x+0-[x+0]=x-[x]=x$

(ب ـ v) $1\odot x=1\times x-[1\times x]=x-[x]=x$

سایر ویژگیهای ده‌گانه بدیهی است.

۳-۴ v تحت عمل $\oplus$ بسته است $x,y\in R^+\Rightarrow x\oplus y=xy\in R^+\Rightarrow$

v تحت عمل $\odot$ بسته است $x\in R^+,c\in R\Rightarrow c\odot x=x^c\in R^+\Rightarrow$

$0\odot x=x^0=1\Rightarrow\Theta=1$

(الف ـ iv) $x\oplus\Theta=x\oplus 1=x1=x\Rightarrow$

(ب ـ v) $1\odot x=x^1=x\Rightarrow$

سایر ویژگیهای ده‌گانه نیز بدیهی است.

Scanned with CamScanner

۳-۵ تحت عمل $\oplus$ بسته است $\quad \Theta \oplus \Theta = \Theta \in v$

تحت عمل $\odot$ بسته است $\quad c \in R \Rightarrow c \odot \Theta = \Theta \in v$

$\circ \odot \Theta = \Theta \Rightarrow$ عضو خنثی $= \Theta$

(الف ـ iv) $\quad \Theta + \Theta = \Theta$

(ب ـ v) $\quad 1 \odot \Theta = \Theta$

سایر ویژگیهای ده‌گانه نیز بدیهی است.

۳-۶ چون مجموع دو چندجمله‌ای یک چند جمله‌ای است داریم:

$f,g \in P \Rightarrow f \oplus g = f+g \in P$

چون حاصلضرب هر عدد حقیقی در یک چند جمله‌ای، یک چند جمله‌ای است داریم:

$c \in R, f \in P \Rightarrow c \odot f = cf \in P$

$\circ \odot f \equiv \circ \Rightarrow \Theta =$ چند جمله‌ای صفر

(الف ـ iv) $\quad f \oplus \Theta = f + \Theta = f$

(ب ـ v) $\quad 1 \odot f = 1 \times f = f$

سایر ویژگیهای ده‌گانه بدیهی است.

۳-۷ فرض کنید $B = \begin{bmatrix} a' & b' & c' \\ d' & c' & f' \end{bmatrix} \in W$ و $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & c & f \end{bmatrix}$ که W زیر مجموعه مفروض از R^2_3 است.

بدیهی است که W تهی نیست.

الف) $\quad f = d+c \quad , \quad c = a+b \quad , \quad f' = d'+c' \quad c' = a'+b'$

$$A+B = \begin{bmatrix} a+a' & b+b' & c+c' \\ d+d' & c+c' & f+f' \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow f+f' = (d+c)+(d'+c') = (d+d')+(c+c')$$

$$c+c' = (a+b)+(a'+b') = (a+a')+(b+b')$$

پس $A+B \in W$. اگر $k \in R$ داریم:

$$kA = \begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ kd & kc & kf \end{bmatrix}$$

Scanned with CamScanner

$$kf=k(d+c)=kd+kc$$
$$kc=k(a+b)=ka+kb$$

پس $kA\in W$. پس بنابر قضیه (۳-۱-۸) W یک زیر فضای R_3^2 است.

ب) $c=f=0 \quad , \quad b=a+1$

$c'=f'=0 \quad , \quad b'=a'+1$

$$A+B=\begin{bmatrix} a+a' & b+b' & c+c' \\ d+d' & c+c' & f+f' \end{bmatrix}$$

$$c+c'=0+0=0 \quad , \quad f+f'=0+0=0$$

$$b+b'=(a+1)+(a'+1)=(a+a')+2 \Rightarrow A+B\notin W$$

پس W یک زیر فضای R_2^3 نیست.

پ) $k\odot A=k\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & c & f \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ kd & kc & kf \end{bmatrix}$

اگر $k<0$ آنگاه $ka<0$ و در نتیجه $k\odot A\notin W$. لذا W یک زیر فضای R_3^2 نیست.

۳-۸ الف) فرض کنید W زیر مجموعه کلیه ماتریسهای متقارن باشد. بدیهی است که W تهی نیست.

$A,B\in W\Rightarrow A'=A, B'=B$

$(A+B)'=A'+B'=(A+B)'\Rightarrow A+B\in W$

$c\in R\Rightarrow (cA)'=cA'=cA\Rightarrow cA\in W$

پس بنابر قضیه ۳-۱-۸، W یک زیر فضای R_n^n است.

ب) دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ منفرد هستند در صورتی که حاصل جمع آنها یعنی ماتریس $A+B=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ منفرد نیست.

پس زیر مجموعه مفروض تحت عمل جمع بسته نیست و در نتیجه یک زیرفضا نمی‌باشد.

پ) دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ هر دو نامنفرداند، درصورتی که

Scanned with CamScanner

حاصل جمع آنها یعنی ماتریس $A+B=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$ منفرد است. پس زیرمجموعه مفروض تحت عمل جمع بسته نیست و در نتیجه یک زیر فضا نمی‌باشد.

۳-۹ الف) زیر فضا است.

ب) زیر فضا است.

پ) زیر فضا نیست. (تحت عمل جمع بسته نیست.)

ت) زیر فضا است.

ث) زیر فضا نیست. (تحت عمل ضرب بسته نیست.)

۳-۱۰ فرض کنید $a\neq 0$. می‌توان نوشت:

$$a\odot x=\ominus \Rightarrow \frac{1}{a}\odot(a\odot x)=\frac{1}{a}\odot\ominus$$
$$\Rightarrow \left(\frac{1}{a}\times a\right)\odot x=\ominus \Rightarrow 1\odot x=\ominus \Rightarrow x=\ominus$$

که خلاف فرض $x\neq\ominus$ است.

۳-۱۱

$$c\odot x=d\odot x \Rightarrow (c-d)\odot x=\ominus$$

با توجه به فرض $x\neq\ominus$ و مسئله ۳-۱۰

$$\Rightarrow c-d=0 \Rightarrow c=d$$

۳-۱۲ الف) $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}0\\2\\4\end{bmatrix}$

$$a_1\mathbf{x}_1+a_2\mathbf{x}_2+a_3\mathbf{x}_3=\mathbf{b}$$

$$a_1\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+a_2\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}+a_3\begin{bmatrix}1\\2\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\2\\4\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}a_1-a_2+a_3=0\\2a_1\qquad+2a_3=2\\3a_1+a_2+5a_3=4\end{cases}\Rightarrow G=\begin{bmatrix}1&-1&1&0\\2&0&2&2\\3&1&5&4\end{bmatrix}\Rightarrow H=\begin{bmatrix}1&-1&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

چون تعداد ستونهای دارای درایه پیشرو در H با تعداد مجهولات برابر است، دستگاه

Scanned with CamScanner

جواب دارد. نتیجه می‌گیریم که b متعلق به گستره مجموعه $X=\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\\5\end{bmatrix}\right\}$ است.

ب) $G=\begin{bmatrix}1&-1&1&1\\2&0&2&0\\3&1&5&0\end{bmatrix}\Rightarrow H=\begin{bmatrix}1&-1&1&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\end{bmatrix}\Rightarrow \mathbf{b}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\in \operatorname{sp}(X)$

پ) $G=\begin{bmatrix}1&-1&1&1\\2&0&2&1\\3&1&5&1\end{bmatrix}\Rightarrow H=\begin{bmatrix}1&-1&1&1\\0&1&0&\frac{-1}{2}\\0&0&1&0\end{bmatrix}\Rightarrow \mathbf{b}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\in \operatorname{sp}(X)$

۳-۱۳

$$q\in P_2\Rightarrow q(t)=u_1t^2+u_2t+u_3$$

$$a_1(t+1)+a_2(t^2-1)+a_3(2t-1)=u_1t^2+u_2t+u_3,\forall t$$

$$\Rightarrow a_2t^2+(a_1+2a_3)t+(a_1-a_2-a_3)=u_1t^2+u_2t+u_3,\forall t$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a_2=u_1\\a_1+2a_3=u_2\\a_1-a_2-a_3=u_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=\frac{1}{3}(2u_1+u_2+2u_3\\a_2=u_1\\a_3=\frac{1}{3}(u_2-u_3-u_1)\end{cases}$$

چون بازای هر u_1,u_2,u_3 دستگاه فوق جواب دارد، مجموعه $X=\{f,g,h\}$ مولد P_2 است.

۳-۱۴ الف) اگر $\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}\in R^2$ آنگاه

$$a_1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+a_2\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a_1+a_2=u_1\\a_1+2a_2=u_2\end{cases}\Rightarrow a_1=2u_1-u_2,a_2=u_2-u_1$$

چون بازای هر u_1,u_2 دستگاه فوق جواب دارد. مجموعه $X=\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right\}$ مولد

Scanned with CamScanner

$R^{۲}$ است.

ضمناً بنابر قضیه ۳-۴-۱ می‌دانیم که اگر مجموعه‌ای از $R^{۲}$ مانند X دارای دو عضو مستقل خطی باشد برای $R^{۲}$ پایه و در نتیجه مولد است و چون بردار $\begin{bmatrix}۱\\۲\end{bmatrix}$ مضربی از بردار $\begin{bmatrix}۱\\۱\end{bmatrix}$ نیست (و در نتیجه X مستقل خطی است)، بدون تشکیل معادله نیز می‌توان گفت که مجموعه مفروض مولد $R^{۲}$ است.

ب) چون $\begin{bmatrix}-۲\\۴\end{bmatrix} = -۲\begin{bmatrix}۱\\-۲\end{bmatrix}$ مجموعه $X_{۲} = \left\{\begin{bmatrix}-۲\\۴\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}۱\\-۲\end{bmatrix}\right\}$ مستقل خطی نیست. اما بنابر قضیه ۳-۵-۲ اگر $X_{۲}$ مولد $R^{۲}$ باشد باید برای $R^{۲}$ پایه باشد که با وابسته خطی بودن $X_{۲}$ تناقض دارد. پس X مولد $R^{۲}$ نیست.

پ) چون بردارهای $\begin{bmatrix}۰\\۰\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-۲\\-۳\end{bmatrix}$ مضاربی از بردار $\begin{bmatrix}۱\\۱\end{bmatrix}$ هستند، $\mathrm{sp}(X_{۳}) = \mathrm{sp}(Y)$ که $X = \left\{\begin{bmatrix}۱\\۱\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-۲\\-۳\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}۰\\۰\end{bmatrix}\right\}$, $Y = \left\{\begin{bmatrix}۱\\۱\end{bmatrix}\right\}$. اما Y نمی‌تواند مولد $R^{۲}$ باشد، چون اگر باشد، Y که مستقل خطی است برای $R^{۲}$ پایه خواهد بود که نیست، چون طبق قضیه ۳-۴-۱ هر پایه برای $R^{۲}$ باید دارای دو عضو باشد، پس X مولد $R^{۲}$ نیست.

۳-۱۵ الف) چون $X_{۱}$ مولد $R^{۲}$ است، بنابر قضیه ۳-۵-۲ برای $R^{۲}$ پایه است. پس $X_{۱}$ مستقل خطی است.

ب) با توجه به حل قسمت (ب) از مسئله قبل $X_{۲}$ وابسته خطی است.

پ) با توجه به حل قسمت (پ) از مسئله قبل $X_{۳}$ وابسته خطی است.

۳-۱۶ الف)

$$c_{۱}\mathbf{x}_{۱} + c_{۲}\mathbf{x}_{۲} + c_{۳}\mathbf{x}_{۳} = \mathbf{0}$$

$$c_{۱}\begin{bmatrix}۱\\۲\\۳\end{bmatrix} + c_{۲}\begin{bmatrix}۱\\۳\\۳\end{bmatrix} + c_{۳}\begin{bmatrix}۰\\۱\\۳\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}۰\\۰\\۰\end{bmatrix}$$

Scanned with CamScanner

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1+c_2 & =0 \\ 2c_1+3c_2+c_3 & =0 \\ 3c_1+3c_2+3c_3 & =0 \end{cases} \Rightarrow c_1=c_2=c_3=0$$

پس مجموعه مفروض مستقل خطی است.

ب) وابسته خطی است چون $\begin{bmatrix}-2\\-6\\-6\end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$.

پ) وابسته خطی است چون $\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$.

۳-۱۷

$$c_1\beta_1+c_2\beta_2 2+c_3\beta_3=\Theta$$

$$c_1x_1+c_2(x_1+x_2)+c_3(x_1+x_2+x_3)=\Theta$$

چون X مستقل خطی است داریم: $(c_1+c_2+c_3)x_1+(c_2+c_2)x_2+c_2x_3=\Theta$

$$\begin{cases} c_1+c_2+c_3=0 \\ c_2+c_3=0 \\ c_3=0 \end{cases} \Rightarrow c_1=c_2=c_3=0$$

پس Y مستقل خطی است.

۳-۱۸ الف)

$$c_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1+c_2+c_3=0 \\ 2c_2+3c_3=0 \\ 5c_3=0 \end{cases} \Rightarrow c_1=c_2=c_3=0$$

پس بنابر قسمت (الف) از قضیه ۳-۴-۱ مجموعه مفروض برای R^3 پایه است.

Scanned with CamScanner

ب) چون تعداد اعضای مجموعه مفروض بیش از بعد R^3 است، بنابر قسمت (ب) از قضیه ۳-۴-۱، این مجموعه وابسته خطی است و نمی‌تواند برای R^3 پایه باشد.

$$c_1\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}0\\2\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}c_1+c_2=0\\2c_1+2c_3=0\\3c_1+c_2+2c_3=0\end{cases}\Rightarrow G=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\2&0&2&0\\3&1&2&0\end{bmatrix}\Rightarrow H=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

چون تعداد ستونهای دارای درایه پیشرو از تعداد مجهولات (۳) کمتر است، دستگاه بینهایت جواب دارد.

پس جواب بدیهی $c_1=c_2=c_3=0$، تنها جواب دستگاه نیست. پس مجموعه مفروض وابسته خطی است و نمی‌تواند پایه باشد.

$$X=\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5\\-2\\-1\end{bmatrix}\right\}$$

۳-۱۹ داریم:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1&5\\-1&0&1&-2\\0&1&1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{تبدیل به پلکانی سطری}}B=\begin{bmatrix}1&2&1&5\\0&1&1&\frac{3}{2}\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

چون ستونهای اول و دوم و چهارم ماتریس B دارای درایه پیشرو هستند، یک زیر مجموعه مستقل بیشینه X عبارت است از $X^*=\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5\\-2\\1\end{bmatrix}\right\}$ در نتیجه X^* یک پایه برای گستره X است.

Scanned with CamScanner

۳-۲۰ پایه طبیعی و مرتب $T=[t^{۲},t,۱]$ را برای $P_{۲}$ در نظر بگیرید. داریم:

$$[f]_T=\begin{bmatrix}۲\\۰\\-۱\end{bmatrix},\ [g]_T=\begin{bmatrix}۰\\۱\\-۱\end{bmatrix},\ [h]_T=\begin{bmatrix}۲\\-۳\\۲\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}۲&۰&۲\\۰&۱&-۳\\-۱&-۱&۲\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{تبدیل به پلکانی سطری}}B=\begin{bmatrix}۱&۰&۱\\۰&۱&-۳\\۰&۰&۰\end{bmatrix}$$

چون فقط ستونهای اول و دوم ماتریس B دارای درایه پیشرو هستند، یک زیر مجموعه مستقل بیشینه از مجموعه ستونهای A عبارت است از $\left\{\begin{bmatrix}۲\\۰\\-۱\end{bmatrix},\begin{bmatrix}۰\\۱\\-۱\end{bmatrix}\right\}$. پس (با توجه یک ریختی فضاهای برداری هم بعد) یک زیر مجموعه مستقل بیشینه از مجموعهٔ $X=\{f,g,h\}$ عبارت است از $X^*=\{f,g\}$. پس X^* یک پایه برای گستره X است.

۳-۲۱

$$(a,b,c,d),(a',b',c',d')\in W\Rightarrow C=a+b,d=۲a,c'=a'+b',d'=۲a'$$

$$\Rightarrow(a,b,c,d)+(a',b',c'd')=(a+a',b+b',c+c',d+d')=(a'',b'',c'',d'')$$

$$c''=c+c'=(a+b)+(a'+b')=(a+a')+(b+b')=a''+b''$$

$$k\in R\Rightarrow k(a,b,c,d)=(ka,kb,kc,kd)$$

$$kc=k(a+b)=ka+kb$$

پس W یک زیر فضای $R_{۳}$ است.

مجموعه

$$W=\{(a,b,c,d)\mid c=a+b,d=۲a,a,b\in R\}$$

$$=\{(a,b,c,d)\mid(a,b,a+b,۲a),a,b\in R\}$$

$$=\{(a,b,c,d)\mid a(۱\ \ ۰\ \ ۱\ \ ۲)+b(۰\ \ ۱\ \ ۱\ \ ۰),a,b\in R\}$$

$$=X\ \text{گستره},\ X=\{(۱\ \ ۰\ \ ۱\ \ ۲),(۰\ \ ۱\ \ ۱\ \ ۰)\}$$

Scanned with CamScanner

چون دو عضو X مستقل خطی هستند، X یک پایه برای W است.

۳-۲۲ بعد زیر فضای مسئله ۱۹ برابر ۳ است.
بعد زیر فضای مسئله ۲۰ برابر ۲ است.
بعد زیر فضای مسئله ۲۱ برابر ۲ است.

۳-۲۳ اگر پایه طبیعی R^3 را به مجموعه X بیافزاییم داریم:

$$X_1=\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\}$$

بررسی می‌کنیم که آیا a_3 یک ترکیب خطی از α_1,α_2 است:

$$\alpha_1\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a_1+a_2=1\\2a_1+a_2=0\\3a_1+a_2=0\end{cases}$$

$$G=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&1&0\\2&1&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{تبدیل به پلکانی سطری}}H=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$$

پس مجموعه $X_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ مستقل خطی است. با توجه به اینکه بعد R^3 برابر ۳ است، X_1 یک پایه برای R^3 می‌باشد.

۳-۲۴ پایه طبیعی مرتب P_2 یعنی $T=[t^2,t,1]$ را در نظر بگیرید. داریم:

$$[f]_T=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},[g]_T=-\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}\Rightarrow X=\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\-2\end{bmatrix}\right\}$$

$$\Rightarrow X_1=\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\}$$

Scanned with CamScanner

بررسی می‌کنیم که آیا α_3 یک ترکیب خطی از α_1, α_2 است:

$$a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 0 \\ -a_1 - a_2 = 0 \end{cases}$$

بدیهی است که دستگاه فوق ناسازگار است (یعنی جواب ندارد) زیرا جوابهای به‌دست آمده از معادلات اول و دوم در معادله سوم صدق نمی‌کند. پس α_3 یک ترکیب خطی از α_1, α_2 نیست. یعنی مجموعه $X_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ مستقل خطی است.

با توجه به اینکه بعدی فضای برداری R^3 برابر ۳ است X_2 برای R^3 و در نتیجه (با به توجه یکریختی (P_2, R^3)) $X_3 = \{f, g, t^2\}$ برای P_2 یک پایه است.

۳-۲۵ بنابر قضیهٔ ۳-۴-۳ (قضیه استخراج پایه) زیر مجموعه‌ای از X، مانند Y، وجود دارد که برای V_n پایه است. از طرفی طبق قضیه ۳-۴-۱ (قضیه اساسی جبر خطی) هر پایه V_n دارای n عضو است. پس $Y = X$.

۳-۲۶ الف) طبق تعریف، ماتریس انتقال از T به S ماتریسی مربع مانند C است که ستونهای آن بردارهای مختصات اعضای T نسبت به S است. پس اگر $T = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ داریم:

$$\mathbf{c}_{(1)} = [\alpha_1]_S, \mathbf{c}_{(2)} = [\alpha_2]_S, \mathbf{c}_3 = [\alpha_3]_S$$

در حالت کلی برای به‌دست آوردن هر $\mathbf{c}_{(j)}$ باید یک دستگاه حل شود. اگر $S = [\beta_1, \beta_2, \beta_3]$، برای تعیین $[\alpha_1]_S$ باید نوشت:

$$a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 = \alpha_1$$

Scanned with CamScanner

$$\Rightarrow a_1\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+a_2\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+a_3\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

ماتریس افزوده دستگاه فوق عبارت است از:

$$G=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\2&1&0&1\\3&1&1&0\end{bmatrix}$$

که پس از تبدیل آن به پلکانی سطری داریم:

$$H=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&1\\0&0&1&\frac{-1}{2}\end{bmatrix}$$

نتیجه داریم $a_3=\frac{-1}{2}$, $a_2=2$, $a_1=\frac{-1}{2}$ پس:

$$\mathbf{c}_{(1)}=\begin{bmatrix}\frac{-1}{2}\\2\\\frac{-1}{2}\end{bmatrix}$$

به‌طریق مشابه داریم $\mathbf{c}_{(3)}=\begin{bmatrix}\frac{-1}{2}\\0\\\frac{-1}{2}\end{bmatrix}$ و بدیهی است که $\mathbf{c}_{(2)}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$. بنابراین ماتریس انتقال از T به S عبارت است از:

$$C=\begin{bmatrix}\frac{-1}{2}&0&\frac{1}{2}\\2&0&0\\\frac{-1}{2}&1&\frac{-1}{2}\end{bmatrix}$$

ب)
$$[\mathbf{x}]_S=C[\mathbf{x}]_T=\begin{bmatrix}\frac{-1}{2}&0&\frac{1}{2}\\2&0&0\\\frac{-1}{2}&1&\frac{-1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}$$

۳-۲۷ الف) با توجه به یکریختی R^3 و P_2 و نتیجهٔ ۳-۶-۱ ماتریس انتقال از T به S عیناً برابر ماتریس انتقال از S' به T' است که $S'=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ و $T'=\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ و α_iها مختصات اعضای T و β_iها مختصات اعضای S نسبت به

Scanned with CamScanner

پایه طبیعی مرتب $[t^2, t, 1]$ برای P_2 هستند.

پس داریم:

$$T' = \left[\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right], S' = \left[\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right]$$

ماتریس انتقال از T' به S' (که همان ماتریس انتقال از T به S است) مشابه به مسئله قبل به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$C = \begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\2 & 0 & -1\\-1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

ب) مختصات $x = 4t^2 - 3t + 1$ نسبت به پایه طبیعی مرتب $[t^2, t, 1]$ عبارت است از $a = \begin{bmatrix}4\\-3\\1\end{bmatrix}$ پس $[x]_T = [a]_T$. برای یافتن $[a]_T$ دستگاه زیر را حل می‌کنیم:

$$b_1\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} + b_2\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix} + b_3\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\-3\\1\end{bmatrix} \Rightarrow b_1 = 4, b_2 = 1, b_3 = 1$$

پس $[x]_T = \begin{bmatrix}4\\1\\1\end{bmatrix}$. در نتیجه داریم:

$$[x]_S = C[x]_T = \begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\2 & 0 & -1\\-1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\7\\-3\end{bmatrix}$$

۳-۲۸ ماتریس مفروض را به پلکانی سطری تبدیل می‌کنیم. تعداد ستونهای دارای درایه پیشرو و برابر رتبه ماتریس است.

الف) $$A = \begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\2 & 2 & 0\\1 & 3 & -2\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{تبدیل به پلکانی سطری}} B = \begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow r(A) = 2$$

ب) $$A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 2\\2 & 0 & 0 & -2\\3 & 1 & 2 & 0\\5 & 0 & 3 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{تبدیل به پلکانی سطری}} \begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 2\\0 & 1 & 2 & 3\\0 & 0 & 1 & 2\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow r(A) = 3$$

Scanned with CamScanner

۳-۲۹ فرض کنید $T=[\alpha_1,\cdots,\alpha_n]$. می‌توان نوشت:

$$[x]_T=\mathbf{a}\Rightarrow x=a_1\odot\alpha_1\oplus\cdots\oplus a_n\odot\alpha_n$$

$$[y]_T=\mathbf{b}\Rightarrow y=b_1\odot\alpha_1\oplus\cdots\oplus b_n\odot\alpha_n$$

$$\Rightarrow x\oplus y=(a+b_1)\alpha_1\oplus\cdots\oplus(a_n+b_n)\alpha_n$$

$$\Rightarrow [x\oplus y]_T=\begin{bmatrix}a_1+b_1\\ \vdots\\ a_n+b_n\end{bmatrix}=\mathbf{a}+\mathbf{b}=[x]_T=[y]_T$$

$$c\odot x=c\odot(a_1\odot\alpha_1\oplus\cdots\oplus a_n\alpha_n)=c\odot(a_1\odot\alpha_1)+\cdots+c\odot(a_n\odot\alpha_n)$$

$$=ca_1\odot\alpha_1+\cdots+ca_n\odot\alpha_n$$

$$\Rightarrow[c\odot x]_T=\begin{bmatrix}ca_1\\ \vdots\\ ca_n\end{bmatrix}=c\mathbf{a}=c[x]_T$$

۳-۳۰

$$x=\Theta\quad\Leftrightarrow\quad x=0\odot\alpha_1+\cdots+0\odot\alpha_n\quad\Leftrightarrow\quad[x]_T=\mathbf{0}$$

۳-۳۱ (کفایت) فرض کنید Y مستقل خطی است. می‌توان نوشت:

$$c_1x_1+\cdots+c_nx_n=\Theta_V$$

با استفاده از قضایای ۳-۶-۲ و ۳-۶-۳

$$\Rightarrow[c_1x_1+\cdots+c_nx_n]_T=[\Theta_V]_T$$

$$\Rightarrow c_1[x_1]_T+\cdots+c_n[x_n]_T=\mathbf{0}$$

که با توجه به استقلال Y داریم

$$c_1=0,\cdots,c_n=0$$

پس X مستقل خطی است.

(لزوم)

$$c_1[x_1]_T+\cdots+c_n[x_n]_T=\mathbf{0}$$

$$\Rightarrow[c_1x_1+\cdots+c_nx_n]_T=\mathbf{0}$$

$$\Rightarrow c_1x_1+\cdots+c_nx_n=\Theta_V$$

که با توجه به استقلال x داریم

$$\Rightarrow c_1=0,\cdots,c_n=0$$

یعنی x مستقل خطی است.

Scanned with CamScanner

۳-۳۲ کفایت و لزوم:

$r(A)=n \Leftrightarrow$ رتبه ستونی $A=n$ $\Leftrightarrow$ مجموعه ستونهای A مستقل خطی است.

$\Leftrightarrow$ A وارون‌پذیر است

۳-۳۳ فرض کنید $\mathbf{x}=\mathbf{c}$ جواب دستگاه $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ باشد. می‌توان نوشت:

$A\mathbf{c}=\mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{b}=c_1 a_{(1)}+\dots+c_n a_{(n)}=$ یا یک ترکیب خطی از ستونهای A است

$$\Rightarrow \dim sp(X')=\dim sp(X) \Rightarrow r(A)=r[A \vdots \mathbf{b}]$$

۳-۳۴

$$a_1\mathbf{x}'_1+a_2\mathbf{x}'_2+a_3\mathbf{x}'_3+a_4\mathbf{x}'_4=\mathbf{x}'$$

$$\Leftrightarrow a_1\mathbf{x}_1+a_2\mathbf{x}_2+a_3\mathbf{x}_3+a_4\mathbf{x}_4=\mathbf{x}$$

$$a_1\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}+a_2\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}+a_3\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\1\end{bmatrix}+a_4\begin{bmatrix}2\\0\\2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\2\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$G=\begin{bmatrix}1&1&1&2&3\\1&2&-1&0&2\\1&3&1&2&0\\1&4&1&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{تبدیل به پلکانی سطری}}\begin{bmatrix}1&1&1&2&3\\0&1&-2&-2&-1\\0&0&1&1&\frac{-1}{4}\\0&0&0&1&\frac{-5}{4}\end{bmatrix}$$

چون دستگاه فوق جواب دارد $\mathbf{x}'$ متعلق به گستره X است.

۳-۳۵

$$A=P^{-1}(PA) \Rightarrow A \overset{R}{\sim} PA \Rightarrow r(A)=r(PA)$$

$$A=(AQ) \Rightarrow Q^{-1}A \overset{C}{\sim} A \Rightarrow r(A)=r(AQ)$$

$$A=P^{-1}(PAQ)Q^{-1} \Rightarrow A \sim PAQ \Rightarrow r(A)=r(PAQ)$$

۳-۳۶ چوم رتبهٔ سطری A با رتبهٔ ستونی A برابر است، صحت قسمت (الف) بدیهی می‌باشد. برای اثبات قسمت (ب) ابتدا لم زیر را ثابت می‌کنیم:

لم: فرض کنید $P_1 \sim n\times r$، $(r<n)$، $r(P_1)=r$، $E\sim r\times k$، آنگاه

Scanned with CamScanner

$$r(P_1 E)=r(E)$$

اثبات: با توجه به اینکه تعداد سطرهای $r(P_1)=P_1$، بنابر نتیجه ۲-۶-۱ می‌توان نوشت

$$P_1=B\begin{bmatrix} I_r \\ O \end{bmatrix}$$

که B یک ماتریس نامنفرد است. پس

$$P_1 A=B\begin{bmatrix} I_r \\ O \end{bmatrix} E \quad =B\begin{bmatrix} E \\ O \end{bmatrix}$$

از طرفی بنابر قضیه ۳-۸-۶ داریم

$$r(P_1 A)=r(\begin{bmatrix} E \\ O \end{bmatrix})=r(E)$$

حل: فرض کنید $r(A)=r$ بنابر نتیجه ۲-۶-۱ می‌توان نوشت

$$A=P\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} Q$$

که $P\sim n\times n$ و $Q\sim m\times m$ نامنفرد هستند. اگر P و Q را به‌صورت

$$P=\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \end{bmatrix}, Q=\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}$$

افراز کنیم که $P_1\sim n\times r$ و $Q_1\sim r\times m$ می‌توان نوشت:

$$A=\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}=P_1 Q_1$$

چون P و Q نامنفرد هستند داریم

$$r(P_1)=r(Q_1)=r$$

(الف) $r(A)=$ بعد فضای سطری $A=$ بعد فضای ستونی $r(A')=A'$

(ب) با توجه به لم فوق می‌توان نوشت:

$$r(AA')=r(P_1 Q_1 Q_1' P_1')=r(Q_1 Q_1' P_1')=r(Q_1' R_1')$$

$$=r(P_1')=r(P_1)=r=r(A)$$

به‌طور مشابه ثابت می‌شود $r(A'A)=r(A)$.

Scanned with CamScanner

۳-۳۷ فرض کنید B شکل ماتریس پلکانی ماتریس A و B_1 ماتریسی باشد که از حذف سطرهای صفر ماتریس B حاصل می‌شود. سطر iام B_1 را در نظر بگیرید. چون درایه‌های زیر درایه‌های پیشرو B_1 همگی صفر هستند هیچ ترکیب خطی از سطرهای پایین سطر iام نمی‌تواند درایه پیشرو سطر iام را (که برابر واحد است) تولید کند. پس سطر iام یک ترکیب خطی از سطرهای بعد از خود نیست. پس بنابر قضیه ۳-۳-۲ سطرهای B_1 تشکیل یک مجموعه مستقل خطی می‌دهند.

۳-۳۸

$$W=\left\{\mathbf{x}\in R^3 \mid \mathbf{x}=\begin{bmatrix} a \\ a+b \\ b \end{bmatrix},\ a,b\in R\right\}$$

$$=\left\{\mathbf{x}\in R^3 \mid \mathbf{x}=a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ a,b\in R\right\}$$

چون مجموعه

$$T=\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

مستقل خطی و مولد W است، یک پایه برای W می‌باشد.

۳-۳۹

$$W=\left\{\mathbf{x}\in R^3 \mid \mathbf{x}=\begin{bmatrix} a \\ a \\ b \end{bmatrix},\ a,b\in R\right\}$$

$$=\left\{\mathbf{x}\in R^3 \mid \mathbf{x}=a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ a,b\in R\right\}$$

چون

$$T=\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

Scanned with CamScanner

مستقل خطی و مولد W است، یک پایه برای W می‌باشد.

۳-۴۰ (الف) چون V زیر مجموعه‌ای از فضای برداری مجموعه کلیه توابع پیوسته است و بنابر فرض مسئله تحت عمل جمع و ضرب عددی بسته است (چون هر ترکیب خطی از اعضای V یک ترکیب خطی از اعضای X است)، V یک فضای برداری است.

(ب) مجموعه X وابسته خطی است چون $h=f-g$. ولی ثابت می‌کنیم مجموعه $T=\{f,g\}$ یک پایه برای V است:

بدیهی است که T مولد V است. برای اثبات استقلال خطی T می‌نویسیم:

$c_1 f+c_2 g=\Theta=$ تابع ثابت صفر

$\Rightarrow c_1\cos^2 t+c_2\sin^2 t=0,\forall t$

$\Rightarrow (c_1-c_2)\cos^2 t+c_2=0,\forall t$

$\Rightarrow c_1-c_2=0, c_2=0\Rightarrow c_1=c_2=0$

بنابراین $\dim V=2=\dim R^2$. پس بنابر قضیه ۳-۶-۵ V و R^2 یکریخت هستند.

۳-۴۱ (الف) فرض کنید $a, c\in W$. طبق فرض وجود دارد. x_0, x_1 طوری که

$Ax_0=a, Ax_1=c$

$\Rightarrow Ax_0+Ax_1=a+c\Rightarrow A(x_0+x_1)=a+c\Rightarrow a+c\in W$

$d\in R, dAx_0=da\Rightarrow A(dx_0)=da$

$\Rightarrow da\in W$

پس بنابر قضیه ۳-۱-۸، W زیر فضای R^n است.

(ب) بنابر قضیه ۳-۸-۷ می‌توان نوشت:

$W=\{b\in R^n \mid r(A)=r([A \vdots b])\}$

$=\{b\in R^n \mid$ b یک ترکیب خطی از ستونهای A است$\}$

$\Rightarrow W=A$ مجموعه کلیه ترکیبهای خطی ستونهایِ

$\Rightarrow \dim W=A$ بعد فضای ستونیِ $=r(A)$

Scanned with CamScanner

فصل ۴

۱-۴

$$\mathbf{x}'\cdot\mathbf{y}'=1\times1+2\times0+3\times(-2)=-5$$

۲-۴

$$f\cdot g=\int_0^1 f(t)g(t)dt=\int_0^1(3t^2-1)(t+1)dt$$

$$=\int_0^1(3t^3+3t^2-t-1)dt=\frac{3}{4}t^4+t^3-\frac{1}{2}t^2-t\Big|_0^1$$

$$=\frac{3}{4}+1-\frac{1}{2}-1=\frac{5}{4}$$

۳-۴ باید نشان دهیم که ضرب داخلی تعریف شده دارای ویژگیهای چهارگانه (۴-۱-۶) است.

$$A\cdot B=tr(AB)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}a_{it}b_{ti}$$

$$B\cdot A=tr(BA)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}b_{it}a_{ti}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}b_{ti}a_{it}=tr(AB)=A\cdot B$$

پس ویژگی (ii) برقرار است.

$$A\cdot A=tr(AA)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}a_{it}a_{it}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}a_{it}^2>0$$

اگر $A\neq o$. پس ویژگی (i) برقرار است.

$$A\cdot(B+C)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}a_{it}(b_{ti}+c_{ti})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}a_{it}b_{ti}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}a_{it}c_{ti}$$

$$=A\cdot B+A\cdot C$$

پس ویژگی (iii) برقرار است.

$$(cA)\cdot B=\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}c\,a_{it}b_{ti}=c\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}a_{it}b_{ti}$$

$$=c(A\cdot B)$$

Scanned with CamScanner

پس ویژگی (iv) برقرار است.

۴-۴

$$|\mathbf{x}'| = \sqrt{\mathbf{x}'\cdot\mathbf{x}'} = \sqrt{۱\times۱+۲\times۲+۳\times۳} = \sqrt{۱۴}$$

$$|\mathbf{y}'| = \sqrt{\mathbf{y}'\cdot\mathbf{y}'} = \sqrt{۱\times۱+۰\times۰+(-۲)\times(-۲)} = \sqrt{۵}$$

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{x}'\cdot\mathbf{y}'}{|\mathbf{x}'||\mathbf{y}'|} = \frac{-۵}{\sqrt{۱۴}\sqrt{۵}} = -\frac{۵}{\sqrt{۷۰}}$$

۵-۴

$$|f| = \sqrt{f\cdot f} = \sqrt{\int_{۰}^{۱}(۳t^{۲}-۱)^{۲}dt} = \sqrt{\frac{۴}{۵}}$$

$$|g| = \sqrt{g\cdot g} = \sqrt{\int_{۰}^{۱}(t+۱)^{۲}dt} = \sqrt{\frac{۷}{۳}}$$

$$\cos\alpha = \frac{f\cdot g}{|f||g|} = \frac{\frac{۵}{۴}}{\sqrt{\frac{۴}{۵}}\sqrt{\frac{۷}{۳}}} = \frac{۵}{۸}\sqrt{\frac{۱۵}{۷}}$$

۴-۶ اثبات ویژگی (i): اگر $x \neq \theta$ داریم:

$$x\cdot x = [x]_T' C [x]_T > ۰$$

اثبات ویژگی (ii):

$$x\cdot y = [x]_T' C [y]_T$$

$$= \left[[x]_T' C [y]_T\right]' = [y]_T' C [x]_T = y\cdot x$$

چون هر ماتریس یک در یک متقارن است و C نیز بنابر تعریف متقارن می‌باشد.

اثبات ویژگی (iii):

$$x\cdot(y+z) = [x]_T' C [(y+z)]_T = [x]_T' C([y]_T + [z]_T)$$

$$= [x]_T' C [y]_T + [x]_T' C [z]_T = x\cdot y + x\cdot z$$

اثبات ویژگی (iv):

$$(cx)\cdot y = [cx]_T' C [y]_T = c[x]_T' C [y]_T = c(x\cdot y)$$

۴-۷ فرض کنید می‌خواهیم ماتریس ضرب داخلی بر $R^{۲}$ را براساس پایه طبیعی مرتب $T = \left\{\begin{bmatrix}۱\\۱\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}۱\\-۱\end{bmatrix}\right\}$ بیابیم.

Scanned with CamScanner

الف) برمبنای تعریف ضرب داخلی در مثال ۴-۱-۱:

$$c_{11}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=1\times1-1\times1-1\times1+2\times1\times1=1$$

$$c_{12}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=1\times1-1\times(-1)-1\times1+2\times1\times(-1)=-1=c_{21}$$

$$c_{22}=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=1\times1-1\times(-1)-(-1)\times1+2\times(-1)\times(-1)=3$$

$$\Rightarrow C=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&3\end{bmatrix}$$

ب) برمبنای ضرب داخلی متعارف:

$$c_{11}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=2$$

$$c_{12}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=0=c_{21}$$

$$c_{22}=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=2\quad\Rightarrow C=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$$

۴-۸ بدیهی است که دو بردار $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ و $\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$ (تحت ضرب داخلی متعارف) برهم عمودند. بردار $\alpha_3=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$ را طوری می‌یابیم که بر α_1 و α_2 عمود باشد:

$$\alpha_1\cdot\alpha_3=x_1+x_2+x_3=0$$
$$\alpha_2\cdot\alpha_3=x_1-x_2=0$$

$$\Rightarrow x_3=t\Rightarrow x_2=\frac{t}{2}\quad x_1=-\frac{1}{2}$$

$$x_3=t\begin{bmatrix}\frac{-1}{2}\\\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix}$$

بازای $t=2$ (اختیاری) داریم $\alpha_3=\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}$

Scanned with CamScanner

$$\gamma_1=\frac{1}{|\alpha_1|}\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{bmatrix}$$

$$\gamma_2=\frac{1}{|\alpha_2|}\alpha_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{3}\\0\end{bmatrix}$$

$$\gamma_3=\frac{1}{|\alpha_3|}\alpha_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\end{bmatrix}$$

مجموعه $Z=\{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3\}$ یک مجموعه متعامد یکه است.

۹-۴

$$|A|=\sqrt{A\cdot A}=\sqrt{tr(A^2)}=\sqrt{19}$$

$$|B|=\sqrt{B\cdot B}=\sqrt{tr(B^2)}=\sqrt{12}$$

$$A\cdot B=tr(AB)=-5$$

$$\cos\alpha=\frac{-5}{\sqrt{19}\sqrt{12}}=-\frac{5}{2}\sqrt{57}$$

۱۰-۴ در تمرین قبل به‌دست آمد

۱۱-۴

$$\begin{aligned}|x+y|^2+|x-y|^2&=(x+y)\cdot(x+y)+(x-y)\cdot(x-y)\\&=x\cdot x+y\cdot y+2x\cdot y+x\cdot x+y\cdot y-2x\cdot y\\&=2(x\cdot x+y\cdot y)\\&=2(|x|^2+|y|^2)\end{aligned}$$

۱۲-۴

$$\begin{aligned}|cx|^2&=(cx)\cdot(cx)=c(x\cdot(cx))=c(c(x\cdot x))=c^2x\\&=c^2(x\cdot x)=c^2|x|^2\\&\Rightarrow|cx|=|c||x|\end{aligned}$$

Scanned with CamScanner

۴-۱۳ فرض کنید $u=x-y$ و $v=y-z$ و در نتیجه $u+v=x+z$. بنابر قضیه ۴-۲-۴ (نامساوی مثلثی) می‌توان نوشت:

$$|u+v|\leq|u|+|v|$$

با مقدارگذاری به جای u و v برحسب x و y و z در نامساوی فوق نتیجه حاصل است.

۴-۱۴

$$|x+y|^{۲}=(x+y)\cdot(x+y)=|x|^{۲}+|y|^{۲}+۲x\cdot y$$

بنابراین تساوی موردنظر برقرار است اگر و تنها اگر $x\cdot y=۰$.

۴-۱۵

$$d(x\cdot y)=|x-y|$$

روابط (الف) و (ب) بدیهی هستند. رابطه (پ) بنابر مسئله ۴-۱۴ (و قراردادن $-y$ به جای y) بدیهی است. رابطه (ت) بنابر قضیه ۴-۲-۵ بدیهی است.

۴-۱۶ فرض می‌کنیم که ضرب داخلی بر $R_{۴}$ ضرب داخلی متعارف باشد.

$$\alpha'_{۱}=\mathbf{x}'_{۱}=(۰\quad ۲\quad ۱\quad -۱)$$

$$\alpha'_{۲}=\mathbf{x}'_{۲}-\frac{\alpha'_{۲}\cdot\alpha'_{۱}}{\alpha'_{۱}\cdot\alpha'_{۱}}\alpha'_{۱}=(۱-۱\quad ۱-۱)-\frac{(۱-۱\quad ۱-۱)\cdot(۰\quad ۲\quad ۱\quad -۱)}{(۰\quad ۲\quad ۱-۱)\cdot(۰\quad ۲\quad ۱\quad -۱)}(۰\quad ۲\quad ۱\quad -۱)$$

$$=(۱\quad -۱\quad ۱\quad -۱)-\frac{۲}{۶}(۰\quad ۲\quad ۱\quad -۱)=(۱\quad -\frac{۵}{۳}\quad \frac{۲}{۳}\quad -\frac{۲}{۳})$$

$$\gamma'_{۱}=\frac{۱}{|\alpha'_{۱}|}\alpha'_{۱}=\frac{۱}{\sqrt{۶}}(۰\quad ۲\quad ۱\quad -۱)=\left(۰\quad \frac{۲}{\sqrt{۶}}\quad \frac{۱}{\sqrt{۶}}\quad -\frac{۱}{\sqrt{۶}}\right)$$

$$\gamma'_{۲}=\frac{۱}{|\alpha'_{۲}|}\alpha'_{۲}=\frac{۱}{\sqrt{\frac{۴۲}{۳}}}(۱\quad \frac{-۵}{۳}\quad \frac{۲}{۳}\quad \frac{-۲}{۳})=\left(\frac{\sqrt{۴۲}}{۱۴}\quad \frac{-۵\sqrt{۴۲}}{۴۲}\quad \frac{\sqrt{۴۲}}{۲۱}\quad -\frac{\sqrt{۴۲}}{۲۱}\right)$$

Scanned with CamScanner

۱۷-۴

$$\beta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \beta_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{2}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\beta_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{3}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{|\beta_1|} \beta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{|\beta_2|} \beta_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

Scanned with CamScanner

$$\gamma_3=\frac{1}{|\beta_3|}\beta_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$$

۱۸-۴

$$\beta_1=\alpha_1=t^2$$

$$\beta_1\cdot\beta_1=\int_0^1(t^2)^2dt=\frac{1}{5}$$

$$\alpha_2\cdot\beta_1=\int_0^1(4t+3)t^2dt=2$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{\alpha_2\cdot\beta_1}{\beta_1\cdot\beta_1}\beta_1=(4t+3)-\frac{2}{\frac{1}{5}}t^2$$

$$=(4t+3)-10t^2=-10t^2+4t+3$$

$$\beta_2\cdot\beta_2=\int_0^1(-10t^2+4t+3)^2dt=\frac{185}{13}$$

$$\gamma_1=\frac{1}{|\beta_1|}\beta_1=\frac{1}{\sqrt{5}}t^2$$

$$\gamma_2=\frac{1}{|\beta_2|}\beta_2=\frac{1}{\sqrt{185/13}}(-10t^2+4t+3)$$

مجموعه $\{\gamma_1,\gamma_2\}$ یک پایه متعامد یکّه برای زیر فضای مفروض است.

۱۹-۴ با مقایسه، ضرب داخلی بر R^3 بدیهی است که ویژگیهای چهارگانه لازم برای ضرب داخلی بر قرار است.

۲۰-۴

$$x\in sp(X)\Rightarrow x=a_1x_1+\cdots+a_nx_n$$

$$x\cdot y=(a_1x_1+\cdots+a_nx_n)\cdot y$$

$$=a_1x_1\cdot y+\cdots+a_nx_n\cdot y=0$$

Scanned with CamScanner

۲۱-۴

$$x,y\in W\Rightarrow z\cdot(x+y)=z\cdot x+z\cdot y=0$$
$$\Rightarrow x+y\in W$$
$$c\in R\Rightarrow z\cdot(cx)=c(z\cdot x)=0$$
$$\Rightarrow cx\in W$$

۲۲-۴ فرض کنید W زیر فضایی از R_3 باشد که اعضای آن بر $\mathbf{y}'$ عمودند. تحت ضرب داخلی متعارف داریم:

$$W=\{\mathbf{x}'\in R_3\ |\mathbf{x}'\cdot\mathbf{y}'=0\}=\{\mathbf{x}'\in R_2\,|x_1+2x_2+3x_3=0\}$$

$$=\left\{\mathbf{x}'\in R_3\,|x_3=-\frac{1}{3}x_1-\frac{2}{3}x_2\right\}$$

$$=\left\{\mathbf{x}'\in R_3\,|\mathbf{x}'=(a\quad b\quad -\frac{1}{3}a-\frac{2}{3}b),a,b\in R\right\}$$

$$=\left\{\mathbf{x}'\in R_3\,|\,\mathbf{x}'=a(1\quad 0\quad -\frac{1}{3})+b(0\quad 1\quad -\frac{2}{3}),a,b\in R\right\}$$

$$=\mathrm{sp}\{\alpha'_1,\alpha'_2\}\quad,\quad \alpha'_1=(1\quad 0\quad -\frac{1}{3}),\alpha'_3=(0\quad 1\quad -\frac{2}{3})$$

چون α'_1,α'_2 مستقل‌اند یک پایه برای W هستند.

$$d^2(y,cx)=|y-2x\ |^2=(y-2x)\cdot(y-cx)$$
$$=c^2x\cdot x-2cx\cdot y+y\cdot y$$

۲۳-۴

مشتق عبارت سمت راست نسبت به c را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$2cx\cdot x-2x\cdot y=0\Rightarrow c_0=\frac{x\cdot y}{x\cdot x}$$

$c_0x=\frac{x\cdot y}{x\cdot x}x=x$ تصویر y بر

Scanned with CamScanner

۴-۲۴

$$\text{تصویر } \mathbf{x}' \text{ بر } \mathbf{y}' = \frac{\mathbf{x}'\cdot\mathbf{y}'}{\mathbf{x}'\cdot\mathbf{y}'}\mathbf{y}' = \frac{-۵}{۵}(۱ \quad ۰ \quad -۲) = (-۱ \quad ۰ \quad ۲)$$

$$\text{تصویر } f \text{ بر } g = \frac{f\cdot g}{g\cdot g}g = \frac{۵/۴}{۷/۳}(t+۱) = \frac{۱۵}{۸}t + \frac{۱۵}{۲۸}$$

$$\text{تصویر } A \text{ بر } B = \frac{A\cdot B}{B\cdot B}B = \frac{-۵}{۱۲}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-۵}{۱۲} & \frac{۵}{۱۲} \\ \frac{۵}{۱۲} & \frac{-۵}{۴} \end{bmatrix}$$

۴-۲۵ فرض کنید $T=\{\alpha_۱,\cdots,\alpha_k\}$ یک پایه متعامد یکّه برای W است. بنابر قضیه ۴-۴-۲ می‌توان نوشت:

$$\text{prj}_W x = a_۱\alpha_۱ + \cdots + a_n\alpha_k, a_i = x\cdot\alpha_i, i=۱,\cdots,k$$

فرض کنید $z\in W$. می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\alpha_i\cdot y &= \alpha_i\cdot(x-\text{prj}_W x)\\ &= \alpha_i\cdot(x-a_۱\alpha_۱-\cdots-a_k\alpha_k)\\ &= x\cdot\alpha_i - a_۱(\alpha_i\cdot\alpha_۱)-\cdots-a_k(\alpha_i\cdot\alpha_k)\\ &= x\cdot\alpha_i\cdot - a_i(\alpha_i\cdot\alpha_i)\\ &= a_i-\alpha_i=۰ \quad , \quad i=۱,\cdots,k\end{aligned}$$

پس x بر همه اعضای T عمود است.

حال اگر $z\in W$ داریم:

$$z=b_۱\alpha_۱+\cdots+b_k\alpha_k$$

$$x\cdot z = b_۱(x\cdot\alpha_۱)+\cdots+b_k(x\cdot\alpha_k)=۰$$

۴-۲۶ طبق فرض مسئله داریم $z=-(x+y)$. می‌توان نوشت:

$$|z|^۲ = |-(x+y)|^۲ = [-(x+y)]\cdot[-(x+y)] = (x+y)\cdot(x+y)$$

بنابر نامساوی کوشی شوارتز

$$= |x+y|^۲ \le (|x|+|y|)^۲$$

و با توجه نامنفی بودن طول

$$\Rightarrow |x+y| \le (|x|+|y|)$$

فصل ۵

۵-۱ (الف) تبدیل خطی نیست زیرا در شرایط (i) از تعریف ۵-۱-۱ صدق نمی‌کند:

Scanned with CamScanner

۳-۲۴ آیا اگر هر عضو از فضای برداری V را بتوان به‌صورت یک ترکیب خطی از اعضای مجموعه $X=\{x_1,\cdots,x_k\}$ نوشت، آنگاه لزوماً X برای V یک پایه است؟

۳-۲۵ آیا هر مجموعه شامل بردار صفر، وابسته خطی است؟

۳-۲۶ آیا هر زیر مجموعه از یک مجموعه وابسته خطی، وابسته خطی است؟

۳-۲۷ آیا هر زیر مجموعه از یک مجموعه مستقل خطی، مستقل خطی است؟

۳-۲۸ آیا اگر مجموعه‌ای از بردارها مستقل خطی باشد، هیچ یک از بردارها را نمی‌توان به صورت ترکیب خطی از سایر بردارها نوشت؟

۳-۲۹ آیا اگر مجموعه‌ای از بردارها وابسته خطی باشد، دست‌کم یکی از بردارها را می‌توان به‌صورت ترکیبی خطی از سایر بردارها نوشت؟

۳-۳۰ آیا بعد فضای برداری P_n برابر n است؟

۳-۳۱ آیا هر فضای برداری، پایه‌ای متناهی دارد؟

۳-۳۲ آیا رتبه یک ماتریس برابر تعداد ستون‌های غیر صفر آن است؟

۳-۳۳ آیا عملیات سطری مقدماتی رتبه ماتریس را حفظ می‌کند؟

۳-۳۴ آیا هر ماتریس $n \times n$، زمانی وارون‌پذیر است که رتبه‌اش n باشد؟

مسائل

۳-۱ کدام‌یک از مجموعه‌های زیر با جمع معمولی بجای عمل $\oplus$ و ضرب معمولی بجای عمل $\odot$ یک فضای برداری هستند؟

الف) مجموعه اعداد صحیح

ب) مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت

پ) مجموعه اعداد حقیقی دربارهٔ $[0,1]$

۳-۲ نشان دهید مجموعه زوج‌های مرتب اعداد حقیقی تحت هیچ‌کدام از شرایط زیر یک فضای برداری نیست.

الف) $(x_1,x_2)\oplus(y_1,y_2)=(2x_1+2y_1,x_2+y_2),\quad c\odot(x_1,x_2)=(cx_1,cx_2)$

ب) $(x_1,x_2)\oplus(y_1,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2),\quad c\odot(x_1,x_2)=(cx_1,x_2)$

Scanned with CamScanner

پ) $c\odot(x_1,x_2)=(cx_1,cx_2)$, $(x_1,x_2)\oplus(y_1,y_2)=(2x_1+2y_1,2x_2+2y_2)$

۳-۳ فرض کنید $[\alpha]$ نماد جزء صحیح α و $V=[0,1)\subset R$ باشد. نشان دهید V تحت دو عمل

$$x\oplus y=x+y-[x+y],\ x,y\in V$$
$$c\odot x=cx-[cx],\ x\in V,c\in R$$

یک فضای برداری است.

۳-۴ ثابت کنید مجموعه اعداد حقیقی مثبت یعنی $V=R^+$ تحت دو عمل

$$x\oplus y=xy,\ x,y\in V$$
$$c\odot x=x^c,\ x\in V,c\in R$$

یک فضای برداری است.

۳-۵ نشان دهید مجموعه یک عضوی $V=\{\Theta\}$ تحت دو عمل

$$\Theta\oplus\theta=\Theta,\ c\odot\theta=\theta,\ c\in R$$

یک فضای برداری است

۳-۶ نشان دهید P (مجموعه کلیه چند جمله‌ایها از همه درجات) تحت دو عمل

$$f\oplus g=(f+g)\quad f,g\in P\quad ,c\odot f=(cf)\quad f\in P,c\in R$$

یک فضای برداری است.

۳-۷ فضای برداری R^2_3 یعنی فضای برداری کلیه ماتریسهای حقیقی 2×3 به‌صورت $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. از زیر مجموعه‌های زیر کدام زیر فضای R^2_3 است؟

الف) مجموعه ماتریسهای 2×3 تحت شرایط $f=d+e,c=a+b$

ب) مجموعه ماتریسهای 2×3 تحت شرایط $e=f=0,b=a+1$

پ) مجموعه ماتریسهای 2×3 تحت شرایط $a>0$

۳-۸ فضای برداری R^n_n یعنی مجموعه ماتریسهای حقیقی $n\times n$ را در نظر بگیرید. از زیر مجموعه‌های زیر کدام زیر فضای R^n_n است؟

الف) مجموعهٔ ماتریسهای متقارن

ب) مجموعه ماتریسهای منفرد

پ) مجموعه ماتریسهای نامنفرد

Scanned with CamScanner

۳-۹ فرض کنید V مجموعه کلیه توابع حقیقی پیوسته بر بازهٔ $[0,1]$ باشد. از زیر مجموعه‌های زیر کدام زیر فضای V است؟

الف) کلیه توابع ثابت

ب) کلیه توابع با شرط $f(0)=0$

پ) کلیه توابع با شرط $f(0)=1$

ت) کلیه توابع مشتق‌پذیر

ث) کلیه توابع مثبت

۳-۱۰ فرض کنید V یک فضای برداری و $x\in V$, $x\neq\theta$, $a\in R$ طوری که $a\odot x=\theta$ نشان دهید $a=0$.

۳-۱۱ فرض کنید V یک فضای برداری، $x\in V$, $x\neq\theta$, $c,d\in R$ نشان دهید.

$$cx=dx\Rightarrow c=d$$

۳-۱۲ از بردارهای زیر کدام متعلق به گسترهٔ بردارهای $\mathbf{x}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$، $\mathbf{x}_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$ و $\mathbf{x}_3=\begin{bmatrix}1\\2\\5\end{bmatrix}$ است؟

الف) $\begin{bmatrix}0\\2\\4\end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ پ) $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

۳-۱۳ نشان دهید مجموعه $X=\{f,g,h\}$ که $f=t+1$، $g=t^2-1$، $h=2t-1$ مولد P_2 است.

۳-۱۴ از مجموعه‌های زیر کدام مولد R^2 است؟

الف) $X_1=\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right\}$ ب) $X_2=\left\{\begin{bmatrix}-2\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}\right\}$

پ) $X_3=\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right\}$

۳-۱۵ از مجموعه‌های مفروض در مسئله ۱۲ کدام وابسته خطی است؟

Scanned with CamScanner

۳-۱۶ از مجموعه‌های زیر کدام وابسته خطی است؟

الف) $\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\3\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\3\end{bmatrix}\right\}$ ب) $\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\-4\\-6\end{bmatrix}\right\}$

پ) $\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\3\end{bmatrix}\right\}$

۳-۱۷ اگر مجموعه $X=\{x_1,x_2,x_3\}$ مستقل خطی باشد نشان دهید مجموعهٔ $y=\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ نیز مستقل خطی است که

$\beta_1=x_1$ ، $\beta_2=x_1+x_2$ و $\beta_3=x_1+x_2+x_3$

۳-۱۸ از مجموعه زیر کدام برای R^3 پایه است؟

الف) $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix}\right\}$

ب) $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$

پ) $\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\\-1\end{bmatrix}\right\}$

ت) $\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\2\\2\end{bmatrix}\right\}$

۳-۱۹ فرض کنید W زیر فضایی از R^3 باشد که به‌وسیله مجموعه $\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\-2\\-1\end{bmatrix}\right\}$ تولید می‌شود. یک پایه برای W بیابید.

۳-۲۰ یک پایه برای زیر مجموعه‌ای که از P_2 که به‌وسیلهٔ مجموعهٔ $X=\{f,g,h\}$ تولید

Scanned with CamScanner

می‌شود بیابید، که

$$h(t)=2t^2-3t+2 \quad , \quad g(t)=t-1 \quad , \quad f(t)=2t^2-1$$

۳-۲۱ ابتدا نشان دهید که W که به‌صورت زیر تعریف می‌شود، یک زیر فضای R_4 است، سپس یک پایه برای آن بیابید.

$$W=\{(a,b,c,d)\,|\,c=a+b \quad , \quad d=2a\}$$

۳-۲۲ بعد زیر فضاهای مذکور در تمرینهای ۱۹، ۲۰ و ۲۱ را معین کنید.

۳-۲۳ مجموعه $X=\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$ را به یک پایه برای R^3 توسعه دهید.

۳-۲۴ یک پایه برای P_2 بیابید که شامل $f(t)=t^2-1$, $g(t)=t-1$ باشد.

۳-۲۵ قضیه ۳-۵-۲ را ثابت کنید.

۳-۲۶ دو پایه مرتب $S=\left[\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right], T=\left[\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right]$ را برای R^3 درنظر بگیرید.

الف) ماتریس انتقال از T به S را معین کنید.

ب) اگر مختصات بردار $\mathbf{x}$ نسبت به پایه T برابر $\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$ باشد، مختصات $\mathbf{x}$ را نسبت به پایه S بیابید.

۳-۲۷ دوپایه مرتب $T=[(t^2-1),2t,(t+1)]$ و $S=[(t-1),t^2,(t^2+1)]$ برای P_2 و $x=4t^2-3t+1$ مفروض است.

الف) ماتریس انتقال مختصات از T به S را معین کنید.

ب) مختصات x را نسبت به T و S بیابید.

۳-۲۸ رتبه‌های ماتریسهای زیر را معین کنید.

الف) $\begin{bmatrix}3&1&2\\2&2&0\\1&3&-2\end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix}1&1&2&2\\2&0&0&-2\\3&1&2&0\\5&0&3&1\end{bmatrix}$

۳-۲۹ قضیه ۳-۶-۲ را ثابت کنید.

۳-۳۰ قضیه ۳-۶-۳ را ثابت کنید.

Scanned with CamScanner

۳-۳۱ نتیجهٔ ۳-۶-۱ را ثابت کنید.

۳-۳۲ نتیجهٔ ۳-۸-۲ را ثابت کنید.

۳-۳۳ قسمت لزوم قضیه ۳-۸-۷ را ثابت کنید.

۳-۳۴ آیا $\mathbf{x}'=(3,2,0,1)$ متعلق به گسترهٔ مجموعه $X=\{\mathbf{x}'_1,\mathbf{x}'_2,\mathbf{x}'_3,\mathbf{x}'_4\}$ است که

$$\mathbf{x}'_4=(2,0,2,0)$$

$$\mathbf{x}'_1=(1,1,1,1),\ \mathbf{x}'_2=(1,2,3,4),\ \mathbf{x}'_3=(1,-1,1,1)$$

۳-۳۵ فرض کنید A یک ماتریس $n\times k$ و P و Q دو ماتریس نامنفرد باشند آنگاه

$$r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)$$

{راهنمایی: $A=P^{-1}(PA)$}

۳-۳۶ قضیه ۳-۸-۹ را ثابت کنید.

{راهنمایی قسمت ب: از نتیجه ۲-۶-۱ استفاده کنید.}

۳-۳۷ نشان دهید اگر A یک ماتریس $n\times k$ به شکل ماتریس پلکانی سطری کاهش یافته باشد، آنگاه سطرهای غیرصفر آن تشکیل یک زیر مجموعه مستقل خطی را از R_k می‌دهند.

۳-۳۸ یک پایه برای زیر فضای برداری $W=\{\mathbf{x}\in R^3 \mid x_2=x_1+x_3\}$ از R^3 بیابید.

۳-۳۹ یک پایه برای زیر فضای برداری $W=\{\mathbf{x}\in R^3 \mid x_1=x_2\}$ از R^3 بیابید.

۳-۴۰ فرض کنید V مجموعه کلیه توابعی است که از ترکیبات خطی اعضای $X=\{f,g,h\}$ به‌وجود می‌آید که $f=\cos 2t$ و $g=\sin 2t$ و $h=\cos 2t$.

الف) نشان دهید V (تحت جمع معمولی توابع و ضرب معمولی اعداد در توابع) یک فضای برداری است.

ب) نشان دهید V با R^2 یکریخت است.

{راهنمایی: الف) V زیرمجموعهٔ مجموعه کلیه توابع پیوسته است.}

۳-۴۱ فرض کنید $W=\{\mathbf{b}\in R^n \mid$ دستگاه $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ دارای جواب است$\}$، که در آن $A\sim n\times k$

الف) نشان دهید که W یک زیر فضای R^n است.

ب) $\dim W=r(A)$

Scanned with CamScanner

۴-۹ آیا اگر u عضوی از فضای اقلیدسی V و $\forall x \in V$ و $x \cdot u = o$، آنگاه $u = \theta$؟

۴-۱۰ آیا از هر مجموعه‌ای دلخواه از بردارها می‌توان به روش گرام - اشمیت مجموعه‌ای متعامد یکّه ساخت؟

۴-۱۱ آیا هر فضای ضرب داخلی با بُعد متناهی یک پایه متعامد یکّه دارد؟

۴-۱۲ آیا هر مجموعه متعامد یکّه، مستقل خطی است؟

۴-۱۳ آیا پایه طبیعی R^n، تحت ضرب داخلی متعارف، یک پایه متعامد یکّه برای R^n است؟

۴-۱۴ آیا در هر فضای ضرب داخلی، نامساوی کوشی - شوارتز برقرار است؟

۴-۱۵ آیا هرگاه x یک بردار غیر صفر در یک فضای اقلیدسی باشد، آنگاه $\frac{x}{|x|}$ یک بردار یکّه است؟

۴-۱۶ آیا اگر V یک فضای اقلیدسی و W یک زیر فضای آن باشد، $W^{\perp}$ یک زیر فضای V است؟

مسائل

۴-۱ فرض کنید $x' = (1,2,3)$ و $y' = (1,0,-2)$. حاصلضرب داخلی متعارف x'، y' را حساب کنید.

۴-۲ اگر $f(t) = 3t^2 - 1$، $g(t) = t + 1$ باشد، حاصلضرب داخلی f و g را برمبنای تعریف مثال ۴-۱-۳ حساب کنید.

۴-۳ فرض کنید V فضای برداری ماتریسهای متقارن $n \times n$ باشد. نشان دهید تابع $A,B \in V$، $A \cdot B = tr(AB)$ یک ضرب داخلی بر V را تعریف می‌کند.

۴-۴ کوسینوس زاویه داخلی بردارهای x'، y' را در تمرین ۱ حساب کنید.

۴-۵ کوسینوس زاویه داخلی بردارهای f و g را در تمرین ۲ حساب کنید.

۴-۶ فرض کنید T یک پایه مرتب برای فضای برداری V و C یک ماتریس مثبت معین باشد. نشان دهید تابع $x \cdot y = [x]_T' C [y]_T$ یک ضرب داخلی بر V تعریف می‌کند.

۴-۷ ماتریس ضرب داخلی را برای R^2 بر مبنای تعریف مثال ۴-۱-۱ و همچنین برمبنای ضرب داخلی متعارف بیابید. $(T = \{\alpha_1, \alpha_2\}, \alpha_1' = [1,1], \alpha_2' [1,-1])$

Scanned with CamScanner

۴-۸ سه بردار متعامد (برمبنای ضرب داخلی متعارف) در R^3 بیابید و سپس آنها را به یک مجموعهٔ متعامد یکّه تبدیل کنید.

۴-۹ کوسینوس زاویه بین دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ را برمبنای تعریف تمرین ۳ بیابید.

۴-۱۰ طول ماتریسهای تمرین ۹ را برمبنای تعریف تمرین ۳ بیابید.

۴-۱۱ فرض کنید $x, y \in V$ و V یک فضای اقلیدسی باشد. ثابت کنید (تساوی متوازی الاضلاع)

$$|x+y|^2+|x-y|^2=2|x|^2+2|y|^2$$

۴-۱۲ نشان دهید در فضای اقلیدسی V بازای هر $c\in R$ و هر $x\in V$ داریم $|cx|=|c||x|$ که $|c|$ قدر مطلق c و $|x|$ طول x است.

۴-۱۳ قضیهٔ ۴-۲-۵ را ثابت کنید.

۴-۱۴ فرض کنید x و y اعضای فضای اقلیدسی V باشند ثابت کنید (قضیه فیثاغورس)

$$|x+y|^2=|x|^2+|y|^2 \Leftrightarrow x\cdot y=0$$

۴-۱۵ روابط زیر را برای تابع فاصله بین دو بردار ثابت کنید.

الف) $d(x,y)\geq 0$ ب) $x=y \Leftrightarrow d(x,y)=0$

پ) $d(x,y)=d(y,x)$ ت) $d(x,y)\leq d(x,y)+d(y,x)$

۴-۱۶ به‌وسیله فرایند گرام - اشمیت یک‌پایه متعامد یکّه برای زیرفضای W از R_4 بسازید که W گستره $X=\{x_1,x_2\}$ و $x'_1=(0\ \ 2\ \ 1\ \ -1)$ و $x'_2=(1\ \ -1\ \ 1\ \ -1)$ است.

۴-۱۷ به‌روش گرام - اشمیت از مجموعه $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix}\right\}$ یک مجموعه متعامد یکّه بسازید.

۴-۱۸ یک پایه متعامد یکّه برای زیر فضایی از P_2 بیابید که مجموعه $T=\{t^2-1, t+1\}$ یک پایه برای آن است. از ضرب داخلی تعریف شده در مثال ۴-۱-۳ استفاده کنید.

۴-۱۹ اگر $x=at^2+bt+c$ و $y=a't^2+b't+c'$ دو عضو P_2 باشند نشان دهید تابع

Scanned with CamScanner

$x \cdot y = aa' + bb' + cc'$ یک ضرب داخلی بر P_2 تعریف می‌کند.

۴-۲۰ ثابت کنید اگر بردار y از فضای اقلیدسی V بر هر یک از اعضای مجموعهٔ $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$ عمود باشد، آنگاه y بر کلیه بردارهای گسترهٔ X عمود است.

۴-۲۱ فرض کنید W مجموعه کلیه بردارهای فضای اقلیدسی V است که بر بردار $z \in V$ عمود هستند. نشان دهید W یک زیر فضای V است.

۴-۲۲ فرض کنید $y' = (1, 2, 3) \in R_3$. یک پایه برای زیر فضایی از R_3 که اعضایش بر y عمودند بیابید.

۴-۲۳ قضیه ۴-۴-۱ را ثابت کنید.

۴-۲۴ تصویر $\bar{x}'$ را بر y' در تمرین ۱ و تصویر f را بر g در تمرین ۲ و تصویر A را بر B در تمرین ۹ بیابید.

۴-۲۵ قضیه ۴-۴-۳ را ثابت کنید.

۴-۲۶ اگر x و y و z اعضای یک فضای اقلیدسی باشند و $x + y + z = \theta$ نشان دهید $|z| \leq |x| + |y|$

Scanned with CamScanner