مسائل

۱-۱ نشان دهید که اگر ماتریس C دارای یک سطر صفر باشد، آنگاه لااقل یکی از سطرهای ماتریس CB نیز صفر است.

۱-۲ با توجه به اینکه اثر یک ماتریس مربع مانند A (trA) مجموع درایه‌های روی قطر اصلی آن است، ویژگیهای زیر را در مورد اثر ماتریس ثابت کنید. توجه کنید که در قسمتهای (پ) و (ت) لازم نیست ماتریس‌های A، B و C مربع باشند.

الف) $tr(cA) = ctr(A)$ که c یک عدد حقیقی است

ب) $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$

پ) $tr(AB) = tr(BA)$

ت) $tr(ABC) = tr(CAB) = tr(BCA)$

۱-۳ در هر یک از حالات زیر ماتریس‌های ۲ × ۲ بیابید که در شرایط مربوطه صدق کنند.

الف) $A \neq O \ , \ A^{2} = O$

ب) $A = B \ , \ AB = I$

پ) $B \neq C \ , \ A \neq O \ , \ AB = AC$

۱-۴ فرض کنید A یک ماتریس و $\mathbf{x}$ یک ماتریس ستونی است. نشان دهید

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \ , \forall \mathbf{x} \Rightarrow A = O$$

۱-۵ نشان دهید که همه درایه‌های روی قطر اصلی یک ماتریس پاد متقارن برابر

صفراند.

۱-۶ اگر A یک ماتریس مربع باشد، نشان دهید که ماتریس‌های AA'، $A'A$ و $A+A'$ متقارن هستند و ماتریس $A-A'$ پاد متقارن است.

۱-۷ ویژگیهای زیر را در مورد ماتریس‌های متقارن ثابت کنید.

الف) حاصل جمع دو ماتریس متقارن قابل جمع یک ماتریس متقارن است.

ب) وارون هر ماتریس متقارن وارون‌پذیر، متقارن است.

۱-۸ اگر A و B دو ماتریس متقارن هم بعد باشد آنگاه AB نیز متقارن است اگر و تنها اگر ضرب A و B جابه‌جایی‌پذیر باشد، یعنی $AB = BA$.

✓۱-۹ ثابت کنید هر ماتریس مربع را می‌توان به‌صورت مجموع دو ماتریس نوشت که یکی متقارن و دیگری پاد متقارن است.

۱-۱۰ فرض کنید A یک ماتریس مربع نامنفرد باشد. ثابت کنید:

الف) $AB = AC \Rightarrow B = C$

ب) $AB = O \Rightarrow B = O$

۱-۱۱ اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$، نشان دهید A نامنفرد است اگر و تنها اگر $ad - bc \neq 0$. نشان دهید اگر A نامنفرد باشد $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

۱-۱۲ ماتریس‌های 2×2 مانند A و B بیابید طوری که:

الف) A و B منفرد باشند ولی $A + B$ نامنفرد باشد.

ب) A و B نامنفرد باشند ولی $A + B$ منفرد باشد.

۱-۱۳ لم سطری را ثابت کنید.

۱-۱۴ نشان دهید اگر $\mathbf{b}_{(j)}$ ستون jاُم ماتریس B باشد، آنگاه $A\,\mathbf{b}_{(j)}$ ستون jاُم ماتریس AB است.

۱-۱۵ فرض کنید A یک ماتریس $n \times k$ است. نشان دهید درایه‌های قطر اصلی ماتریس $A'A$ همگی نامنفی هستند و در صورتی که همگی صفر باشند $A = 0$.

۱-۱۶ فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ است. A را پوچ توان می‌نامیم اگر بازای یک عدد صحیح و مثبت k، $A^k = O$ باشد.

الف) ثابت کنید هر ماتریس پوچ توان منفرد است.

ب) اگر A پوچ توان باشد ماتریس $(I-A)$ نامنفرد است.

۱-۱۷ یک ماتریس ستونی دارای n درایه را که همگی یک هستند با $\mathbf{1}_n$ نشان می‌دهیم. نشان دهید که $\mathbf{1}'_n \mathbf{1}_n = n$ و $\mathbf{1}'_n \mathbf{1}_n$ یک ماتریس $n \times n$ است که همگی درایه‌های آن یک هستند. ماتریس اخیر را با J_n نشان می‌دهیم.

ماتریس $H_n = I_n - \frac{1}{n} J_n$ را **ماتریس تمرکز** می‌نامیم. نشان دهید H_n متقارن است و $H_n^{۲} = H_n$.

فرض کنید $x_{۱}, \dots, x_n$ درایه‌های ماتریس ستونی $\mathbf{x}$ و مقادیر یک نمونه آماری باشند. نشان دهید:

الف) $\mathbf{x}\ \mathbf{1}'_n \frac{1}{n} = \bar{x} =$ میانگین نمونه

ب) $H_n \mathbf{x}$ یک ماتریس ستونی است که درایه‌های آن *انحراف از میانگینها* (یعنی $(x_i - \bar{x})$ها) هستند.

پ) $\frac{1}{n}\ \mathbf{x}' H_n \mathbf{x} = s^{۲} =$ واریانس نمونه

۱-۱۸ داده‌های آماری معمولاً به‌صورت یک ماتریس $n \times k$ ثبت می‌شوند، که n تعداد موارد (یعنی تعداد واحدهای نمونه) و k تعداد متغیرهایی است که روی هر واحد نمونه اندازه‌گیری می‌شوند. این ماتریس را با X نشان داده، آن را **ماتریس داده‌ها** می‌نامیم در این صورت x_{ij} مقدار متغیر jاُم روی واحد iاُم نمونه است. نشان دهید:

الف) $\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{n} X' \mathbf{1}_n$ که $\bar{\mathbf{x}}$ یک ماتریس ستونی است که درایه‌های آن میانگینهای متغیرها هستند.

ب) $S = \frac{1}{n} X' H_n \mathbf{X}$ که S **ماتریس واریانس - کوواریانس نمونه** است یعنی

کوواریانس دو متغیر jاُم و rاُم نمونه $= S_{jr} = \frac{1}{n} \sum_{i=۱}^{n} (x_{ij} - \bar{x}_j)(x_{ir} - \bar{x}_r)$

واریانس متغیر jاُم نمونه $= S_{jj} = \frac{1}{n} \sum_{i=۱}^{n} (x_{ij} - \bar{x}_j)^{۲}$

۱-۱۹ فرض کنید $A = \left[I - X(X'X)^{-۱} X' \right]$، نشان دهید A متقارن است و $A^{۲} = A$.

مسائل

۲-۱ دستگاه معادلات خطی‌ای را بنویسید که ماتریس افزوده آن عبارت است از:

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 2 & 3 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ -3 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

۲-۲ نشان دهید که اگر دستگاه $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ دارای بیش از یک جواب باشد، آنگاه دارای بی‌نهایت جواب است.

۲-۳ ماتریس‌های A و B را با استفاده از اعمال مقدماتی سطری ابتدا به‌صورت یک ماتریس پلکانی سطری و سپس به‌صورت یک ماتریس پلکانی سطری کاهش یافته در آورید.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} -4 & 6 & 1 & -5 \\ 2 & -4 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

۲-۴ جواب دستگاههای زیر را یکبار از روش گاوس و یکبار از روش گاوس -

جردن بیابید.

الف $\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 = 15 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 5 \end{cases}$ ب $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = -1 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$

پ $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -2 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$ ت $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$

۲-۵ دستگاههای معادلات خطی با ماتریس‌های افزوده زیر را حل کنید.

الف $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 6 & 0 \\ 3 & 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & \vdots & 5 \\ 2 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \vdots & 3 \\ 3 & 5 & 2 & \vdots & 9 \\ 3 & 1 & 2 & \vdots & 8 \end{bmatrix}$ ج $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$

۲-۶ فرض کنید $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ یک دستگاه معادلات خطی سازگار و $\mathbf{b} = \mathbf{o}$ باشد نشان دهید که $\mathbf{x}_\circ$ جواب دستگاه فوق است اگر و تنها اگر $\mathbf{x}_\circ = \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1$ که $\mathbf{x}_1$ یک جواب همان دستگاه و $\mathbf{y}_1$ یک جواب دستگاه همگن $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ است.

۲-۷ فرض کنید A یک ماتریس 2×3 باشد. ماتریس مقدماتی E را طوری بیابید که اگر در A به‌صورت EA ضرب شود یکی از اعمال زیر را روی A انجام دهد:

الف) سطرهای اول و سوم را جابه‌جا کند.

ب) سطر دوم را در $c-$ ضرب کند.

پ) k برابر سطر اول را به سطر سوم اضافه کند.

۲-۸ وارون ماتریس‌های زیر را در صورت وجود از طریق روش «عمل به مثل» بیابید:

الف $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ پ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

۲-۹ نشان دهید اگر ماتریس A هم ارز سطری ماتریس O باشد، آنگاه $A = O$.

۲-۱۰ نشان دهید دو ماتریس A و B هم ارز سطری (ستونی) هستند اگر و تنها اگر ماتریس نامنفردی مانند P(Q) وجود داشته باشد طوری که $B = PA$ ($B = AQ$).

۲-۱۱ نشان دهید اگر $A \overset{R}{\sim} B$، آنگاه $A' \overset{C}{\sim} B'$

۲-۱۲ در مورد هر یک از دو ماتریس زیر ماتریسی به شکل بیان شده در قضیه ۲-۶-۷ بیابید که هم ارز ماتریس مفروض باشد و ماتریس‌های، P و Q مندرج در نتیجه ۲-۶-۱ را محاسبه کنید.

$A = P\Delta Q$

$P = E_r \text{—} E_1$

$Q = F_1 \text{—} F_c$

الف $\begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۲ \\ ۵ & ۲ & ۴ \\ ۴ & ۳ & ۶ \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۳ & ۳ & ۴ \end{bmatrix}$

۲-۱۳ نشان دهید اگر ماتریس A با ماتریس O هم ارز باشد آنگاه $A = O$.

۲-۱۴ نشان دهید اگر A و B هم ارز باشند آنگاه A' و B' نیز هم ارز هستند.

۲-۱۵ نشان دهید اگر $A \sim B$، آنگاه A نامنفرد است اگر و تنها اگر B نامنفرد باشد.

۲-۱۶ مطلوبست حل معادلهٔ $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ که

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۱ \\ ۲ & -۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

$I = E_r \text{—} E_1 A \Rightarrow A = E_1^{-1} \text{—} E_r^{-1}$

۲-۱۷ ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ را به‌صورت حاصلضرب ماتریس‌های مقدماتی بنویسید.

۲-۱۸ مطلوبست حل دستگاه خطی $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ از روش گاوس، که

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۳ \\ ۳ & -۷ & -۲ \\ ۲ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -۶ \\ -۹ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

۲-۱۹ ماتریس A یک ماتریس $۳ \times k$ است. سه برابر سطر اول A را به سطر دوم افزوده، سپس جای سطرهای دوم و سوم ماتریس حاصل را عوض می‌کنیم تا ماتریس B

به‌دست آید. ماتریس نامنفرد C را طوری بیابید که $B = CA$.

۲-۲۰ ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۴ \\ ۰ & ۱ & ۵ \\ ۱ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ را در صورت امکان به‌صورت حاصلضرب ماتریس‌های مقدماتی بنویسید.

۲-۲۱ فرض کنید A و B دو ماتریس مربع هم بعد هستند. ثابت کنید اگر AB نامنفرد باشد، هم A و هم B نامنفرد هستند.

۲-۲۲ فرض کنید $A_۱,\cdots,A_k$ ماتریس‌های مربع هم بعد و $B=A_۱A_۲\cdots A_k$، ثابت کنید اگر B نامنفرد باشد، $A_۱,\cdots,A_k$ نیز نامنفرد می‌باشند.

مسائل

۳-۱ کدام‌یک از مجموعه‌های زیر با جمع معمولی بجای عمل $\oplus$ و ضرب معمولی بجای عمل $\odot$ یک فضای برداری هستند؟

الف) مجموعه اعداد صحیح

ب) مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت

پ) مجموعه اعداد حقیقی دربارهٔ $[0,1]$

۳-۲ نشان دهید مجموعه زوج‌های مرتب اعداد حقیقی تحت هیچ‌کدام از شرایط زیر یک فضای برداری نیست.

الف) $(x_1,x_2)\oplus(y_1,y_2)=(2x_1+2y_1,x_2+y_2),\quad c\odot(x_1,x_2)=(cx_1,cx_2)$

ب) $(x_1,x_2)\oplus(y_1,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2),\quad c\odot(x_1,x_2)=(cx_1,x_2)$

پ) $(x_1,x_2)\oplus(y_1,y_2)=(2x_1+2y_1, 2x_2+2y_2),\quad c\odot(x_1,x_2)=(cx_1, cx_2)$

۳-۳ فرض کنید $[\alpha]$ نماد جزء صحیح α و $V=[0,1)\subset R$ باشد. نشان دهید V تحت دو عمل

$$x\oplus y=x+y-[x+y]\,,x,y\in V$$
$$c\odot x=cx-[cx]\,,x\in V\,,c\in R$$

یک فضای برداری است.

۴-۳ ثابت کنید مجموعه اعداد حقیقی مثبت یعنی $V=R^+$ تحت دو عمل

$$x\oplus y=xy\,,\ x,y\in V$$
$$c\odot x=x^c,\ x\in V, c\in R$$

یک فضای برداری است.

۵-۳ نشان دهید مجموعه یک عضوی $V=\{\Theta\}$ تحت دو عمل

$$\Theta\oplus\theta=\Theta,\ c\odot\theta=\theta\ ,c\in R$$

یک فضای برداری است

۶-۳ نشان دهید P (مجموعه کلیه چند جمله‌ایها از همه درجات) تحت دو عمل

$$f\oplus g=(f+g)\quad f,g\in P\quad ,c\odot f=(cf)\quad f\in P, c\in R$$

یک فضای برداری است.

۷-۳ فضای برداری R_3^2 یعنی فضای برداری کلیه ماتریسهای حقیقی ۳ × ۲ به‌صورت $\begin{bmatrix} a & b & c\\ d & e & f\end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. از زیر مجموعه‌های زیر کدام زیر فضای R_3^2 است؟

الف) مجموعه ماتریسهای ۳ × ۲ تحت شرایط $c=a+b$, $f=d+e$

ب) مجموعه ماتریسهای ۳ × ۲ تحت شرایط $b=a+1$, $e=f=0$

پ) مجموعه ماتریسهای ۳ × ۲ تحت شرایط $a>0$

۸-۳ فضای برداری R_n^n یعنی مجموعه ماتریسهای حقیقی $n\times n$ را در نظر بگیرید. از زیر مجموعه‌های زیر کدام زیر فضای R_n^n است؟

الف) مجموعهٔ ماتریسهای متقارن

ب) مجموعه ماتریسهای منفرد

پ) مجموعه ماتریسهای نامنفرد

۳-۹ فرض کنید V مجموعه کلیه توابع حقیقی پیوسته بر بازهٔ $[۰,۱]$ باشد. از زیر مجموعه‌های زیر کدام زیر فضای V است؟

الف) کلیه توابع ثابت

ب) کلیه توابع با شرط $f(۰)=۰$

پ) کلیه توابع با شرط $f(۰)=۱$

ت) کلیه توابع مشتق‌پذیر

ث) کلیه توابع مثبت

۳-۱۰ فرض کنید V یک فضای برداری و $x\in V$, $x\neq\theta$, $a\in R$ طوری که $a\odot x=\theta$ نشان دهید $a=۰$.

۳-۱۱ فرض کنید V یک فضای برداری، $x\in V$, $x\neq\theta$, $c,d\in R$ نشان دهید.

$$cx=dx\Rightarrow c=d$$

۳-۱۲ از بردارهای زیر کدام متعلق به گسترهٔ بردارهای $\mathbf{x}_۱=\begin{bmatrix}۱\\۲\\۳\end{bmatrix}$، $\mathbf{x}_۲=\begin{bmatrix}-۱\\۰\\۱\end{bmatrix}$ و $\mathbf{x}_۳=\begin{bmatrix}۱\\۲\\۵\end{bmatrix}$ است؟

الف) $\begin{bmatrix}۰\\۲\\۴\end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix}۱\\۰\\۰\end{bmatrix}$ پ) $\begin{bmatrix}۱\\۱\\۱\end{bmatrix}$

۳-۱۳ نشان دهید مجموعه $X=\{f,g,h\}$ که $f=t+۱$، $g=t^۲-۱$، $h=۲t-۱$ مولد $P_۲$ است.

۳-۱۴ از مجموعه‌های زیر کدام مولد $R^۲$ است؟

الف) $X_۱=\left\{\begin{bmatrix}۱\\۱\end{bmatrix},\begin{bmatrix}۱\\۲\end{bmatrix}\right\}$ ب) $X_۲=\left\{\begin{bmatrix}-۲\\۴\end{bmatrix},\begin{bmatrix}۱\\-۲\end{bmatrix}\right\}$

پ) $X_۳=\left\{\begin{bmatrix}۱\\۱\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-۲\\-۲\end{bmatrix},\begin{bmatrix}۰\\۰\end{bmatrix}\right\}$

۳-۱۵ از مجموعه‌های مفروض در مسئله ۱۲ کدام وابسته خطی است؟

۳-۱۶ از مجموعه‌های زیر کدام وابسته خطی است؟

الف) $\left\{\begin{bmatrix}۱\\۲\\۳\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}۱\\۳\\۳\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}۰\\۱\\۳\end{bmatrix}\right\}$ ب) $\left\{\begin{bmatrix}۱\\۲\\۳\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-۲\\-۴\\-۶\end{bmatrix}\right\}$

پ) $\left\{\begin{bmatrix}۱\\۲\\۳\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}۱\\۱\\۰\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}۰\\۱\\۳\end{bmatrix}\right\}$

۳-۱۷ اگر مجموعه $X=\{x_۱,x_۲,x_۳\}$ مستقل خطی باشد نشان دهید مجموعهٔ $y=\{\beta_۱,\beta_۲,\beta_۳\}$ نیز مستقل خطی است که

$\beta_۱=x_۱$ ، $\beta_۲=x_۱+x_۲$ و $\beta_۳=x_۱+x_۲+x_۳$

۳-۱۸ از مجموعه زیر کدام برای $R^۳$ پایه است؟

الف) $\left\{\begin{bmatrix}۱\\۰\\۰\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}۱\\۲\\۰\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}۱\\۳\\۵\end{bmatrix}\right\}$

ب) $\left\{\begin{bmatrix}۱\\۱\\۱\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}۱\\۲\\۳\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}۱\\۰\\۱\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}۱\\۰\\۰\end{bmatrix}\right\}$

پ) $\left\{\begin{bmatrix}۱\\۲\\۳\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}۲\\۰\\-۱\end{bmatrix}\right\}$

ت) $\left\{\begin{bmatrix}۱\\۲\\۳\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}۱\\۰\\۱\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}۰\\۲\\۲\end{bmatrix}\right\}$

۳-۱۹ فرض کنید W زیر فضایی از $R^۳$ باشد که به‌وسیله مجموعه

$\left\{\begin{bmatrix}۱\\-۱\\۰\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}۲\\۰\\۱\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}۱\\۱\\۱\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}۵\\-۲\\-۱\end{bmatrix}\right\}$ تولید می‌شود. یک پایه برای W بیابید.

۳-۲۰ یک پایه برای زیر مجموعه‌ای که از $P_۲$ که به‌وسیلهٔ مجموعهٔ $X=\{f,g,h\}$ تولید

می‌شود بیابید، که

$$h(t)=۲t^{۲}-۳t+۲ \quad , \quad g(t)=t-۱ \quad , \quad f(t)=۲t^{۲}-۱$$

۳-۲۱ ابتدا نشان دهید که W که به‌صورت زیر تعریف می‌شود، یک زیر فضای $R_{۴}$ است، سپس یک پایه برای آن بیابید.

$$W=\{(a,b,c,d)\,|\,c=a+b \quad , \quad d=۲a\}$$

۳-۲۲ بعد زیر فضاهای مذکور در تمرینهای ۱۹، ۲۰ و ۲۱ را معین کنید.

۳-۲۳ مجموعه $X=\left\{\begin{bmatrix}۱\\۲\\۳\end{bmatrix},\begin{bmatrix}۱\\۱\\۱\end{bmatrix}\right\}$ را به یک پایه برای $R^{۳}$ توسعه دهید.

۳-۲۴ یک پایه برای $P_{۲}$ بیابید که شامل $f(t)=t^{۲}-۱ \quad , \quad g(t)=t-۱$ باشد.

۳-۲۵ قضیه ۳-۵-۲ را ثابت کنید.

۳-۲۶ دو پایه مرتب $T=\left[\begin{bmatrix}۱\\۱\\۰\end{bmatrix},\begin{bmatrix}۱\\۰\\۱\end{bmatrix},\begin{bmatrix}۰\\۱\\۱\end{bmatrix}\right]$، $S=\left[\begin{bmatrix}۱\\۲\\۳\end{bmatrix},\begin{bmatrix}۱\\۱\\۱\end{bmatrix},\begin{bmatrix}۱\\۰\\۱\end{bmatrix}\right]$ را برای $R^{۳}$ درنظر بگیرید.

الف) ماتریس انتقال از T به S را معین کنید.

ب) اگر مختصات بردار $\mathbf{x}$ نسبت به پایه T برابر $\begin{bmatrix}۱\\۲\\۱\end{bmatrix}$ باشد، مختصات $\mathbf{x}$ را نسبت به پایه S بیابید.

۳-۲۷ دوپایه مرتب $T=[(t^{۲}-۱),۲t,(t+۱)]$ و $S=[(t-۱),t^{۲},(t^{۲}+۱)]$ برای $P_{۲}$ و $x=۴t^{۲}-۳t+۱$ مفروض است.

الف) ماتریس انتقال مختصات از T به S را معین کنید.

ب) مختصات x را نسبت به T و S بیابید.

۳-۲۸ رتبه‌های ماتریسهای زیر را معین کنید.

الف) $\begin{bmatrix}۳&۱&۲\\۲&۲&۰\\۱&۳&-۲\end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix}۱&۱&۲&۲\\۲&۰&۰&-۲\\۳&۱&۲&۰\\۵&۰&۳&۱\end{bmatrix}$

۳-۲۹ قضیه ۳-۶-۲ را ثابت کنید.

۳-۳۰ قضیه ۳-۶-۳ را ثابت کنید.

۳-۳۱ نتیجهٔ ۳-۶-۱ را ثابت کنید.

۳-۳۲ نتیجهٔ ۳-۸-۲ را ثابت کنید.

۳-۳۳ قسمت لزوم قضیه ۳-۸-۷ را ثابت کنید.

۳-۳۴ آیا $\mathbf{x}'=(۳,۲,۰,۱)$ متعلق به گسترهٔ مجموعه $X=\{\mathbf{x}'_۱,\mathbf{x}'_۲,\mathbf{x}'_۳,\mathbf{x}'_۴\}$ است که $\mathbf{x}'_۴=(۲,۰,۲,۰)$

$\mathbf{x}'_۱=(۱,۱,۱,۱)$,$\mathbf{x}'_۲=(۱,۲,۳,۴)$, $\mathbf{x}'_۳=(۱,-۱,۱,۱)$

۳-۳۵ فرض کنید A یک ماتریس $n\times k$ و P و Q دو ماتریس نامنفرد باشند آنگاه

$$r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)$$

{راهنمایی: $A=P^{-۱}(PA)$}

۳-۳۶ قضیه ۳-۸-۹ را ثابت کنید.

{راهنمایی قسمت ب: از نتیجه ۲-۶-۱ استفاده کنید.}

۳-۳۷ نشان دهید اگر A یک ماتریس $n\times k$ به شکل ماتریس پلکانی سطری کاهش یافته باشد، آنگاه سطرهای غیرصفر آن تشکیل یک زیر مجموعه مستقل خطی را از R_k می‌دهند.

۳-۳۸ یک پایه برای زیر فضای برداری $W=\{\mathbf{x}\in R^۳ | x_۲=x_۱+x_۳\}$ از $R^۳$ بیابید.

۳-۳۹ یک پایه برای زیر فضای برداری $W=\{\mathbf{x}\in R^۳ | x_۱=x_۲\}$ از $R^۳$ بیابید.

۳-۴۰ فرض کنید V مجموعه کلیه توابعی است که از ترکیبات خطی اعضای $X=\{f,g,h\}$ به‌وجود می‌آید که $f=\cos ۲t$ و $g=\sin ۲t$ و $h=\cos ۲t$.

الف) نشان دهید V (تحت جمع معمولی توابع و ضرب معمولی اعداد در توابع) یک فضای برداری است.

ب) نشان دهید V با $R^۲$ یکریخت است.

{راهنمایی: الف) V زیرمجموعهٔ مجموعه کلیه توابع پیوسته است.}

۳-۴۱ فرض کنید $W=\{\mathbf{b}\in R^n \mid$ دستگاه $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ دارای جواب است$\}$، که در آن $A\sim n\times k$

الف) نشان دهید که W یک زیر فضای R^n است.

ب) $\dim W=r(A)$

۴-۹ آیا اگر u عضوی از فضای اقلیدسی V و $\forall x \in V$ و $x \cdot u = o$، آنگاه $u = \theta$؟

۴-۱۰ آیا از هر مجموعه‌ای دلخواه از بردارها می‌توان به روش گرام - اشمیت مجموعه‌ای متعامد یکّه ساخت؟

۴-۱۱ آیا هر فضای ضرب داخلی با بُعد متناهی یک پایه متعامد یکّه دارد؟

۴-۱۲ آیا هر مجموعه متعامد یکّه، مستقل خطی است؟

۴-۱۳ آیا پایه طبیعی R^n، تحت ضرب داخلی متعارف، یک پایه متعامد یکّه برای R^n است؟

۴-۱۴ آیا در هر فضای ضرب داخلی، نامساوی کوشی - شوارتز برقرار است؟

۴-۱۵ آیا هرگاه x یک بردار غیر صفر در یک فضای اقلیدسی باشد، آنگاه $\frac{x}{|x|}$ یک بردار یکّه است؟

۴-۱۶ آیا اگر V یک فضای اقلیدسی و W یک زیر فضای آن باشد، $W^{\perp}$ یک زیر فضای V است؟

مسائل

۴-۱ فرض کنید $\mathbf{x}' = (۱,۲,۳)$ و $\mathbf{y}' = (۲,-۱,۰,۱)$. حاصلضرب داخلی متعارف $\mathbf{x}', \mathbf{y}'$ را حساب کنید.

۴-۲ اگر $g(t) = t + ۱, f(t) = ۳t^۲ - ۱$ باشد، حاصلضرب داخلی f و g را برمبنای تعریف مثال ۴-۱-۳ حساب کنید.

۴-۳ فرض کنید V فضای برداری ماتریسهای متقارن $n \times n$ باشد. نشان دهید تابع $A \cdot B = tr(AB), A, B \in V$ یک ضرب داخلی بر V را تعریف می‌کند.

۴-۴ کوسینوس زاویه داخلی بردارهای $\mathbf{x}', \mathbf{y}'$ را در تمرین ۱ حساب کنید.

۴-۵ کوسینوس زاویه داخلی بردارهای f و g را در تمرین ۲ حساب کنید.

۴-۶ فرض کنید T یک پایه مرتب برای فضای برداری V و C یک ماتریس مثبت معین باشد. نشان دهید تابع $x \cdot y = [x]_T' C [y]_T$ یک ضرب داخلی بر V تعریف می‌کند.

$\boxed{۴-۷}$ ماتریس ضرب داخلی را برای $R^۲$ بر مبنای تعریف مثال ۴-۱-۱ و همچنین برمبنای ضرب داخلی متعارف بیابید. $(T = \{\alpha_۱, \alpha_۲\}, \alpha_۱' = [۱,۱], \alpha_۲' [۱,-۱])$

۴-۸ سه بردار متعامد (برمبنای ضرب داخلی متعارف) در R^3 بیابید و سپس آنها را ب یک مجموعهٔ متعامه یکّه تبدیل کنید.

۴-۹ کوسینوس زاویه بین دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ را برمبنای تعریف تمرین ۳ بیابید.

۴-۱۰ طول ماتریسهای تمرین ۹ را برمبنای تعریف تمرین ۳ بیابید.

۴-۱۱ فرض کنید V یک فضای اقلیدسی باشد. و $x,y\in V$ ثابت کنید (تساوی متوازی الاضلاع)

$$|x+y|^2+|x-y|^2=2|x|^2+2|y|^2$$

۴-۱۲ نشان دهید در فضای اقلیدسی V بازای هر $c\in R$ و هر $x\in V$ داریم $|cx|=|c||x|$ که $|c|$ قدر مطلق c و $|x|$ طول x است.

۴-۱۳ قضیهٔ ۴-۲-۵ را ثابت کنید.

۴-۱۴ فرض کنید x و y اعضای فضای اقلیدسی V باشند ثابت کنید (قضیه فیثاغورس)

$$|x+y|^2=|x|^2+|y|^2 \quad \Leftrightarrow \quad x\cdot y=0$$

۴-۱۵ روابط زیر را برای تابع فاصله بین دو بردار ثابت کنید.

الف) $d(x,y)\geq 0$ 　　 ب) $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$

پ) $d(x,y)=d(y,x)$ 　　 ت) $d(x,y)\leq d(x,y)+d(y,x)$

۴-۱۶ به‌وسیله فرایند گرام-اشمیت یک‌پایه متعامه یکّه برای زیرفضای W از R_4 بسازید که W گستره $X=\{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\}$ و $\mathbf{x}'_1=(0\quad 2\quad 1\quad -1)$ و $\mathbf{x}'_2=(1\quad -1\quad 1\quad -1)$ است.

۴-۱۷ به‌روش گرام - اشمیت از مجموعه $\left\{\begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$ یک مجموعه متعامد یکّه بسازید.

۴-۱۸ یک پایه متعامد یکّه برای زیر فضایی از P_2 بیابید که مجموعه $T=\{t^2-1,t+1\}$ یک پایه برای آن است. از ضرب داخلی تعریف شده در مثال ۴-۱-۳ استفاده کنید.

۴-۱۹ اگر $x=\alpha t^2+bt+c$ و $y=\alpha' t^2+b't+c'$ دو عضو P_2 باشند نشان دهید تابع

$x \cdot y = \alpha a' + bb' + cc'$ یک ضرب داخلی بر $P_۲$ تعریف می‌کند.

۴-۲۰ ثابت کنید اگر بردار y از فضای اقلیدسی V بر هر یک از اعضای مجموعهٔ $X = \{x_۱, \cdots, x_n\}$ عمود باشد، آنگاه y بر کلیه بردارهای گسترهٔ X عمود است.

۴-۲۱ فرض کنید W مجموعه کلیه بردارهای فضای اقلیدسی V است که بر بردار $z \in V$ عمود هستند. نشان دهید W یک زیر فضای V است.

۴-۲۲ فرض کنید $\mathbf{y}' = (۱, ۲, ۳) \in R_۳$. یک پایه برای زیر فضایی از $R_۳$ که اعضایش بر $\mathbf{y}$ عمودند بیابید.

۴-۲۳ قضیه ۴-۴-۱ را ثابت کنید.

۴-۲۴ تصویر $\mathbf{x}'$ را بر $\mathbf{y}'$ در تمرین ۱ و تصویر f را بر g در تمرین ۲ و تصویر A را بر B در تمرین ۹ بیابید.

۴-۲۵ قضیه ۴-۴-۳ را ثابت کنید.

۴-۲۶ اگر x و y و z اعضای یک فضای اقلیدسی باشند و $x + y + z = \theta$ نشان دهید $|z| \leq |x| + |y|$