تئوری مجموعه‌ها

یک مجموعه دلخواه تحت عنوان Ω در نظر بگیرید. آن‌گاه از

$$A, B, C, \ldots \subseteq \Omega$$

می‌توانیم تعاریف زیر را تعریف کنیم

$$A - B \quad A \cap B \quad A \Delta B \quad \ldots \quad A \cup B$$

A یا B نه هردو

$$(A - B) \cup (B - A)$$

if $\{A_n ; n \geq 1\} \rightarrow$ زنجیرهای از مجموعه‌ها

می‌توان $\bigcup_{n \geq 1} A_n$ و $\bigcap_{n \geq 1} A_n$ را تعریف کنیم

$$\bigcup_{n \geq 1} A_n = A_1 \cup A_2 \cup \ldots$$

$$\bigcap_{n \geq 1} A_n = A_1 \cap A_2 \cap \ldots$$

صحت لم

اینجا ثابت شده

$$\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right)^c = \bigcap_{n \geq 1} A_n^c$$

$$\left(\bigcap_{n \geq 1} A_n\right)^c = \bigcup_{n \geq 1} A_n^c$$

زنجیر صعودی: اگر A_n دنباله‌ای از زیرمجموعه‌ی در Ω باشد دنباله صعودی است اگر

$$A_1 \subset A_2 \subset \ldots \quad \text{نماد: } A_n \uparrow$$

$$n=1 \rightarrow B_1 = A_1$$

$$n=2 \rightarrow B_2 = A_1 \cup A_2 \quad \Leftarrow \quad B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \quad \text{ساده}$$

$$\Rightarrow B_1 \subset B_2 \subset \ldots$$

PqPCO

Scanned with CamScanner

Subject:
Date

دنباله نزولی: اگر A_n دنباله‌ای از مجموعه‌ها در Ω باشد که

$A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ (یعنی $A_n \downarrow$) آنگاه A_n نزولی است.

قضیه: $C_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i \Leftarrow$

$n=1 \rightarrow C_1 = A_1$

$n=2 \rightarrow C_2 = A_1 \cap A_2$

$\Rightarrow \cdots \subset C_2 \subset C_1$

$\Leftarrow$ (صفحه بعد اول کشته شد) $C_n \downarrow$ پس

تعاریف: حد در مجموعه‌ها:

دو تعریف دیگر که در این درس بیان می‌کنیم $\liminf$, $\limsup$ است:

$$\inf_n \sup_{k \geq n} \{A_k\} = \limsup A_n = \overline{\lim} A_n = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k \subset \Omega$$

i = infintely
o = often

$= \{A_n ; i.o\}$ مجموعه تمام نقاطی که بی‌نهایت از A_n متعلق است

$$\sup_n \inf_{k \geq n} \{A_k\} = \liminf A_n = \underline{\lim} A_n = \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} A_k \subset \Omega$$

مجموعه تمام نقاطی که همه A_n ها جز تعدادی متناهی متعلق داشته باشد

$$\underline{\lim} \leq \overline{\lim}$$

حد دنباله وجود دارد اگر $\underline{\lim} = \overline{\lim}$ در این صورت A را حد دنباله A_n می‌نامیم و به صورت $A = \lim A_n$ یا $A_n \rightarrow A$ نشان می‌دهیم

PAPCO

Scanned with CamScanner

Subject: Date

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{\omega \in \Omega, \exists i \in I \text{ st } \omega \in A_i\}$$

$$= \{\text{وقوع حداقل یکی از } A_i\text{ها}\}$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{\text{همه } A_i\text{ها رخ دهند}\} = \{\omega \in \Omega, \omega \in A_i, \forall i \in I\}$$

$$(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i)^c = \{\text{حداقل یک } A_i \text{ مستقل نباشد}\} = \{\omega \text{ به کلیه } A_i\text{ها مستقل نباشد}\} = \bigcup A_i^c$$

$$(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)^c = \{\omega \text{ هیچ یک از } A_i\text{ها مستقل نباشد}\} = \{\omega; \omega \notin A_i, \forall i\}$$

$$\bigcup_{i=h}^{\infty} A_i = \{\text{از } h \text{ به بعد حداقل یکی رخ دهد}\}$$

$$\bigcap_{h=1}^{\infty} \bigcup_{i=h}^{\infty} A_i = \forall h \quad \exists i \geq h \quad A_i = \{\text{تعداد نامتناهی از } A_i\text{ها رخ دهند}\} = \{A_i; i \to \infty\}$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{\text{همه } A_n\text{ها رخ دهند به جز تعداد متناهی}\} \qquad \cap \cup > \cup \cap$$

Scanned with CamScanner

Subject: (۲)
Date

قضیه ۱ اگر $\{A_n\}$ یک دنباله در X صعودی باشد (یعنی $A_n \subseteq A_{n+1}$) آنگاه $\{A_n\}$ همگرا است و $\lim A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

اگر دنباله $\{A_n\}$ نزولی باشد $\lim A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$

اثبات فرض کنید $\{A_n\}$ صعودی باشد

$$\limsup A_n = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k \quad \text{صعودی}$$

$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$: اثبات

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

$$\liminf A_n = \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_k = \bigcup_{n\geq 1} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

(A_n)

$$\Rightarrow \overline{\lim} = \underline{\lim} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

$$\Rightarrow A_n \longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

فرض کنید $\{A_n\}$ نزولی باشد

$$\limsup A_n = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k = \bigcap_{n\geq 1} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

PqPCO

$A_1 \supseteq \cdots \supseteq A_n \supseteq A_k$ ، $A_n \supseteq A_{n+1} \supseteq$

Scanned with CamScanner

Subject:
Date

حیله نزدیکی ابد $\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$

$$\liminf A_n = \bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n} A_k = \bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

$A_n \supset A_{n+1} \supset \cdots$ متشکل از n

$$\bigcap_{k\geq 1}\bigcup_{k\geq 1} \quad A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_k \quad (k\geq n) \Rightarrow \bigcap A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$$

$$\Rightarrow A_n \longrightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

مثال ۱: اگر $A_n = [0, \frac{n}{n+1})$ آیا حد وجود دارد بدست آورید.

منظم sup و inf
فصل اول پایه ۱۵

دنباله A_n صعودی است پس حد وجود دارد.

$$\limsup A_n = \liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

دنباله‌ای که همیشه می‌گذرد ولی هیچ‌گاه نمی‌رسد

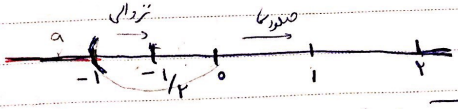
$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} [0, \frac{n}{n+1}) \quad (1-\frac{1}{n+1}) \quad = [0,1)$$

$A_1 = [0, 1/2)$ $A_2 = [0, 2/3)$ ..... $\to \infty$ $[0,1)$

نکته: $\liminf A_n \subseteq \limsup A_n$

if $\omega \in \liminf A_n \Rightarrow \omega \in \limsup A_n$

مثال ۲: آیا $\{A_n\} = (-1/n, n)$ حد دارد (-1,1) $(-1/2, 2)$ $(-1/3, 3)$ ...



$a \leq -1 \Rightarrow a \notin A_n \; ; \forall n \Rightarrow a \notin \overline{\lim A_n}, \underline{\lim A_n}$

Scanned with CamScanner

$$\limsup A_n = \inf \sup A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

$k=1$ $\quad \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} (-1/k, k) \rightarrow (-1,1), (-1/2,2), (-1/3,3), \ldots, (-1,\infty)$

$k=2$ $\quad \bigcup_{k=2}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=2}^{\infty} (-1/k, k) \rightarrow (-1/2,2), (-1/3,3), \ldots, (-1/2,\infty)$

$\vdots$

$k=n$ $\quad \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=n}^{\infty} (-1/k, k) = (-1/n, n), \ldots$

$\cap \cup \rightarrow [0,\infty)$

بزرگترین کران

$$\liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$$

$k=1$ $\quad \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} (-1/k, k) \rightarrow (-1,1), (-1/2,2), \ldots, [0,\infty)$

$\vdots$

$k=n$ $\quad \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{k=n}^{\infty} (-1/k, k) \rightarrow (-1/n, n), \ldots$

$\cup \cap \rightarrow$ کوچکترین کران

مثال: $A_n = [0, 1-1/n]$ حد دارد یا خیر

$A_1 = [0,0] = \{0\}$ $\quad A_2 = [0, 1/2]$ $\quad A_3 = [0, 2/3]$ $\rightarrow$ صعودی

$$\lim A_n = \underline{\lim} A_n = \overline{\lim} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$ حد وجود دارد و

$= [0,1)$ باز

از بالا به یک میل می‌کند.

مثال: $A_n = [0, 1+1/n] \rightarrow [0,1]$

نزدیکی

از بالا به یک میل می‌کند

$$\lim A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

Scanned with CamScanner

Subject:
Date

تابع نشانگر:

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \omega \notin A \end{cases} \qquad I_A : \Omega \to R, \quad A \subseteq R$$

$$P(A) = E(I_A)$$

خواص.

۱) $I_\Omega = 1, \; I_\phi = 0$ ۲) $I_{A\cap B} = I_A I_B$

۳) $I_{A^c} = 1 - I_A$ ۴) $I_{A\cup B} \le I_A + I_B$ (تساوی وقتی $A\cap B = \phi$)

۵) $I_{\lim A_n} = \lim I_{A_n}$, $I_{\overline{\lim} A_n} = \overline{\lim} I_{A_n}$

۶) $I_{A\cup B} = I_A + I_B - I_{A\cap B}$

اثبات ۵.

فرض کنید

$$I_{\limsup A_n} = 1 \iff \omega \in \limsup A_n \iff \omega \in A_k \;\; \exists k \ge n \;\; \forall n \ge 1$$

$$\iff I_{A_k} = 1 \qquad \exists k \ge n \qquad \forall n \ge 1$$

$$\iff \sup_{k \ge n} I_{A_k} = 1 \qquad \forall n \ge 1$$

$$\iff \inf_n \sup_{k \ge n} I_{A_k} = 1 \Rightarrow \limsup I_{A_k} = 1$$

$$\Rightarrow I_{\limsup A_n} = \limsup I_{A_n}$$

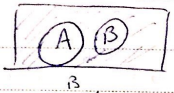
همین ترتیب برای حد کاهنده با جای $\sup$ و $\inf$ و برای $\lim$ هم ثابت می‌شود. (حد کوشی)

PAPCO

Scanned with CamScanner

Subject: (۴)
Date

مثال: ثابت کنید $I_B - I_A = I_{B-A}$





$(B-A) \cup A = B$ and $(B-A) \cap A = \phi$

$I_{(B-A)\cup A} = I_{B-A} + I_A - I_{\phi} \Rightarrow I_B = I_{B-A} + I_A$

$\Rightarrow I_B - I_A = I_{B-A}$

ثابت کنید اگر $A \subset B$ آنگاه $I_A \leq I_B$

if $x \in A \Rightarrow x \in B \Rightarrow I_A = 1 \rightarrow I_B = 1 \rightarrow 1 \leq 1$

if $x \in B, x \notin A \Rightarrow I_B = 1, I_A = 0 \Rightarrow 0 \leq 1$

if $x \notin B \Rightarrow x \notin A \Rightarrow 0 \leq 0$

اثبات خواص ۱ تا ۴ عبوضابطی

اثبات

① $\forall x \Rightarrow x \in \Omega \Rightarrow I_{\Omega}(x) = 1$

ϕ: هیچ عضوی ندارد $\Rightarrow I_{\phi} = 0$

② if $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A, x \in B \rightarrow I_A = 1, I_B = 1$

($I_{A\cap B} = 1$)

$\Rightarrow I_{A\cap B} = 1 = I_A \cdot I_B$

Scanned with CamScanner

Subject:
Date

if $x \notin A \cap B \rightarrow I_{A\cap B} = 0$,
$\begin{cases} x \in A, x \notin B \rightarrow I_A = 1, I_B = 0 \\ x \notin A, x \in B \rightarrow I_A = 0, I_B = 1 \\ x \notin A, x \notin B \rightarrow I_A = 0, I_B = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow I_A \cdot I_B = 0$

(۳) $I_{A^c} = I_{\Omega - A} = I_\Omega - I_A = 1 - I_A$

(۴) if $x \in A \cup B \Rightarrow I_{A\cup B}(x) = 1$, $\begin{matrix} x \in A \\ \text{یا} \\ x \in B \end{matrix}$ $\Rightarrow I_{A\cup B} \leq I_A + I_B$

$I_{A\cup B} = 1$

$x \in A \cup B \rightarrow \begin{matrix} x \in A \\ \text{یا} \\ x \in B \end{matrix} \Rightarrow$ حالت مختلف

چون در نظر گرفتیم :

(۴) if $x \in A, x \notin B \Rightarrow I_A = 1$, $I_B = 0$, $I_{A\cap B} = 0$

$I_{A\cup B} = 1$, $I_A + I_B - I_{A\cap B} = 1$

if $x \notin A, x \in B$

$\Rightarrow I_A = 0$ $I_B = 1$ $I_{A\cap B} = 0$

$\Rightarrow I_{A\cup B} = 1$, $I_A + I_B - I_{A\cap B} = 1$

if $x \in A, x \in B \Rightarrow I_A = 1$ $I_B = 1$ $I_{A\cap B} = 1$

$\Rightarrow I_{A\cup B} = 1$, $I_A + I_B - I_{A\cap B} = 1$

مثال فرض کنید A_n ها دنباله‌ای از مجموعه‌ها باشند ثابت کنید اگر $\lim_{n\to\infty} A_n = A$

آن‌گاه $\lim_{n\to\infty} I_{A_n} = I_A$ برعکس.

Scanned with CamScanner

$$A_n \to A \Rightarrow \limsup A_n = \liminf A_n = A$$

می دانیم: $\liminf I_{A_n} = I_{\liminf A_n} = I_A$ ، $\limsup I_{A_n} = I_{\limsup A_n} = I_A$

$$\liminf I_{A_n} = \limsup I_{A_n} = I_A \quad \text{پس}$$

$$\Rightarrow I_{A_n} \to I_A$$

$I_{A_n} \to I_A \Rightarrow \limsup I_{A_n} = \liminf I_{A_n} = I_A$ بعکس،

$$I_{\limsup A_n} = I_{\liminf A_n} = I_A$$

$$\Rightarrow \overline{\lim} A_n = \underline{\lim} A_n = A$$

مثال. نشان دهید $I_{A \triangle B} = I_A I_{B^c} + I_{A^c} I_B$

می دانیم $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$

اگر A و B جدازهم $\leftarrow$ $I_{A \cup B} = I_A + I_B - I_{A \cap B} = I_A + I_B$

چون A−B و B−A جدازهم اند $\leftarrow$ $I_{A \triangle B} = I_{A-B} + I_{B-A}$

$$= I_A I_{B^c} + I_B I_{A^c}$$

Scanned with CamScanner

Subject:
Date

σ-میدان (سیگما میدان)

فرض کنید Ω مجموعه مربع باشد مجموعه توانی را با $P(\Omega)$ نشان می دهند که به معنی "مجموعه تمام زیرمجموعه‌های Ω" است. قبل از تعریف σ-میدان به تعریف میدان توجه کنید:

فرض کنید $\mathcal{F} \subset P(\Omega)$، $\mathcal{F}$ میدان است هرگاه:

i) $\Omega \in \mathcal{F}$ ii) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$ تحت عمل مکمل بسته

iii) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$ تحت اجتماع متناهی بسته

یا $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$

نکته ۱: میدان تحت اشتراک متناهی بسته است $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$

نکته ۲: اشتراک هر تعداد میدان، میدان است اما اجتماع دو میدان ممکن است میدان نباشد «مثال نقض»

$\Omega = \{1, 2, 3\}$ $\mathcal{F}_1 = \{\Omega, \phi, \{1\}, \{2, 3\}\}$

$\mathcal{F}_2 = \{\Omega, \phi, \{3\}, \{1, 2\}\}$

$\Rightarrow \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 = \{\Omega, \phi, \{1\}, \{3\}, \{2, 3\}, \{1, 2\}\}$

$A \quad B \quad A^c \quad B^c$

$A \cup B = \{1, 3\} \notin \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$

PAPCO

Scanned with CamScanner

نکته ۳ : $\mathcal{F}_0 = \{\phi, \Omega\}$ کوچکترین میدان و $P(\Omega)$ بزرگترین میدان است.

σ - field

σ - میدان : فرض کنید Ω مجموعه مرجع باشد، مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های Ω که دارای شرایط زیر باشد :

① $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$ نسبت به عمل متمم بسته باشد

② $A_i \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ نسبت به اجتماع شمارا بسته باشد ($i \in I \to$ شمارا)

- مجموعه توانی σ میدان است و $\mathcal{F}_1 = \{\phi, \Omega\}$ کوچکترین σ میدان است.

نکته ۱ : σ میدان تحت اشتراک شمارا بسته است

$$A_i \in \mathcal{F} \to A_i^c \in \mathcal{F} \to \bigcup A_i^c \in \mathcal{F}$$

$$\to \left(\bigcup A_i^c\right)^c \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap A_i \in \mathcal{F}$$

نکته ۲ : اگر $\mathcal{F}$ شبه میدان باشد $\mathcal{F}$ میدان است.

نکته ۳ : اشتراک هر تعداد σ میدان، σ میدان است اما اجتماع شبه میدانها ممکن است σ میدان نباشد.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\mathcal{F}_1 = \{\phi, \Omega, \{1, 2\}, \{3, 4, 5, 6\}\}$

Scanned with CamScanner

Subject:
Date

$$\mathcal{F}_2 = \{\phi, \Omega, \{2,3\}, \{1,4,5,6\}\}$$

$$\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 = \{\phi, \Omega, \{1,2\}, \{3,4,5,6\}, \{2,3\}, \{1,4,5,6\}\}$$

$\{1,2\} \cup \{2,3\} \to \{1,2,3\} \notin \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$

$$\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \{\phi, \Omega\}$$

تمرین. اگر $\mathcal{F}_1 \dots$ شبه میدان باشند آنگاه $\bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{F}_\alpha$ یک میدان است.

یعنی باید ثابت کنیم:

۱) $A \in \bigcap_\alpha \mathcal{F}_\alpha \Rightarrow A^c \in \bigcap_\alpha \mathcal{F}_\alpha$

۲) $A_i \in \bigcap_\alpha \mathcal{F}_\alpha \to \bigcup A_i \in \bigcap_\alpha \mathcal{F}_\alpha$

① فرض کنید $A \in \bigcap_\alpha \mathcal{F}_\alpha$ پس $\forall \alpha, A \in \mathcal{F}_\alpha$ و چون $\mathcal{F}_\alpha$ شبه میدان است پس $\forall \alpha, A^c \in \mathcal{F}_\alpha$ و بنابراین

$$A^c \in \bigcap_\alpha \mathcal{F}_\alpha$$

② $A_i \in \bigcap \mathcal{F}_\alpha \Rightarrow A_i \in \mathcal{F}_\alpha \Rightarrow \forall \alpha \ \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}_\alpha$

$$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \bigcap_\alpha \mathcal{F}_\alpha$$

بنابراین اشتراک دلخواهی از میدانها، خود شبه میدان است.

Scanned with CamScanner

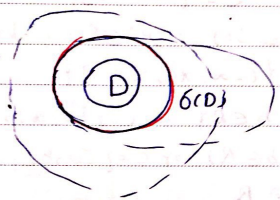
Subject: (۷)
Date

σ-میدان‌ها تولیدشده:

فرض کنید $D \subseteq P(\Omega)$، کوچکترین σ-میدان شامل D یا σ-میدان تولیدشده توسط D می‌توسندودان را با $\sigma(D)$ نشان می‌دهند.

σ میدان تولیدشده D = میدان تولیدشده D : اگر D متناهی باشد

$\sigma(D)$ کوچکترین σ میدانی شامل D است



مقدمه ۲: $\sigma(D)$ برابر استراک تمام σ-میدان‌های شامل D است

$$\sigma(D) = \bigcap_{\alpha} \mathcal{F}_\alpha$$

$$D \subset \mathcal{F}_\alpha \rightarrow D \subset \bigcap_\alpha \mathcal{F}_\alpha$$

ازطرفی چون $\sigma(D)$ کوچکترین σ میدانی است شامل D است پس

$$\sigma(D) \subseteq \bigcap_\alpha \mathcal{F}_\alpha$$

ازطرفی $\mathcal{F}_\alpha$ ها هرکدام σمیدان اند پس $\sigma(D)$یکی از $\mathcal{F}_\alpha$ هاست

پس واضح است که $\bigcap_\alpha \mathcal{F}_\alpha \subseteq \sigma(D)$

مثال: $D=\{A\} \leftarrow \sigma(D) = \{A, A^c, \Omega, \phi\}$

$D=\{A_1, A_2, \dots\}$ متناهی نباشد $\leftarrow$

$\sigma(D) = \{\phi, \text{کل}, \text{اجتماع‌های ۲تایی}, \text{اجتماع‌های ۳تایی}, \dots, \Omega\}$

Scanned with CamScanner

میدان بورل Borel و مجموعه بورل :

σ - میدانی از مجموعه‌های باز در $\mathbb{R}$ تولید می‌شود را میدان بورل می‌نامند و به هرعضو این σ - میدان مجموعه بورل می‌گویند و معمولاً میدان بورل را با $\mathcal{B}$ نشان می‌دهند

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(C) \subseteq P(\mathbb{R}) \quad \text{که} \quad C = \{(a,b],\ a,b \in \mathbb{R}\}$$

معادل با C های زیر : (اثبات به عهده دانشجو)

$$C = \{(-\infty, x],\ x \in \mathbb{R}\} \text{ or } C = \{(-\infty, x),\ x \in \mathbb{R}\}$$
$$\text{or } C = \{(a,b),\ a,b \in \mathbb{R}\} \text{ or } C = \{[x,\infty),\ x \in \mathbb{R}\}$$
$$\text{or } C = \{[a,b],\ a,b \in \mathbb{R}\} \text{ or } C = \{[a,b),\ a,b \in \mathbb{R}\}$$

اگر $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow$ مجموعه بورل B

(مجموعه‌ای باز یا مجموعه‌ای بسته و هر ترکیب شمارا از مجموعه‌های باز و بسته مجموعه بورل است) هر مجموعه‌ای که بتوان آن را به صورت ترکیب شمارا از مجموعه‌های باز و بسته نوشت مجموعه بورل است

π رده (کلاس) و λ کلاس (سیستم) : (معادل فارسی کلاس، سیستم) ← گروه‌ایم

فرض کنید $\mathcal{P}$ یک رده از زیرمجموعه‌های Ω باشد آن گاه $\mathcal{P}$ یک π - کلاس است هرگاه نسبت به عمل اشتراک متناهی بسته باشد یعنی

$$\begin{cases} \forall A,B \in \mathcal{P} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{P} \\ \mathcal{P} \subseteq P(\Omega) \end{cases}$$

Ω مجموعه دلخواه باشد و $\mathcal{L}$ رده‌ای از زیرمجموعه‌های Ω یعنی $\mathcal{L} \subseteq P(\Omega)$

λ سیستم (λ-system) می‌گوییم گر دارای سه شرط باشد (تعریف قدیم) :

① $\Omega \in \mathcal{L}$

② نسبت به تفاضل گیری بسته باشد $A, B \in \mathcal{L} \Rightarrow A - B \in \mathcal{L}$ ($B \subset A$)

③ نسبت به اجتماع صعودی بسته باشد $A_1 \subset A_2 \subset \dots \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{L}$

P4PCO

Scanned with CamScanner

- تعریف جدیدتر λ-سیستم (دیکین)
صد ۳۶ رزنیک معادل بودن
تعریف قدیم و جدید (اثبات تمرین)

① $\Omega \in \mathcal{L}$
② نسبت به متمم گیری بسته باشد
③ نسبت به عمل اجتماع شمارا از مجموعه‌های مجزا بسته باشد: A_i مجزا، $A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow \bigcup_i A_i \in \mathcal{L}$ $(i \neq j)$

قضیه ۳.۰: اگر یک کلاس داشته باشیم هم λ-system و هم π-system باشد آن گاه σ-میدان است.

تتایج از تعاریف و قضیه:

① $\mathcal{F}$ اگر σ-میدان باشد $\Leftarrow$ $\mathcal{F}$ یک π-کلاس و λ-کلاس است

② اگر $\mathcal{F}$ σ-میدان باشد $\Leftarrow$ $\mathcal{F}$ یک π-کلاس است

③ اگر $\mathcal{F}$ یک λ-کلاس و π-کلاس باشد $\Leftarrow$ $\mathcal{F}$ σ-میدان است

④ یک λ-کلاس است $\iff$ ۳ شرط زیر برقرار باشد (لازمه‌ی این هم تعریف دیگر)

i) $\Omega \in \mathcal{L}$ ii) $A \subseteq B, A, B \in \mathcal{L} \Rightarrow B - A \in \mathcal{L}$
iii) $A_n \uparrow A, A_n \in \mathcal{L} \Rightarrow A \in \mathcal{L}$

Scanned with CamScanner

Subject:
Date

Dynkin theorem — قضیه دینکین

a) if ρ is a π-system and λ is a λ-system

$$s.t \quad \rho \subset \lambda \Rightarrow \sigma(\rho) \subset \lambda$$

b) $\sigma(\rho) = L(\rho)$

$\sigma(\rho)$: کوچکترین σ-میدان تولید شده توسط ρ

$L(\rho)$: کوچکترین λ-سیستمی که شامل ρ است

(در مبحث احتمال کاربرد دارد)

کلاس (گردایه) یکنوا: monotone class — "کلاسهای یکنوا" monotone classes

مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های Ω که دارای دو شرط زیر باشند

۱- نسبت به اجتماع صعودی بسته باشد

۲- نسبت به اشتراک نزولی بسته باشد

$\mathcal{M} \subseteq P(\Omega)$

① $A_i \in \mathcal{M} \xrightarrow{A_i \uparrow} \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}$

② $A_i \in \mathcal{M} \xrightarrow{A_i \downarrow} \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}$

$\mathcal{M}$ یک گردایه یکنوا است.

نکته: هر σ-میدان یک گردایه یکنوا است عکس همیشه برقرار نیست

Scanned with CamScanner

Subject: (۹)
Date

میدان σ و دایره یکنوا

$\mathcal{F}$ یک میدان یکنوا است $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}$ یک σ میدان است

لم ۲

قضیه: فرض کنید $\mathcal{F}_0$ یک میدان از زیر مجموعه‌های Ω باشد همچنین

فرض کنید $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ کوچکترین یکنوا از زیر مجموعه‌های Ω باشد

$$\text{if } \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{M} \Rightarrow \sigma(\mathcal{F}_0) \subseteq \mathcal{M}$$

Monotone class theorem

قضیه (یکنوا): اگر D میدان باشد آن گاه $\sigma(D) = \mathcal{M}(D)$ که $\sigma(D)$ کوچکترین σ میدان تولید شده D و $\mathcal{M}(D)$ کوچکترین کلاس یکنوا تولید شده D است

فضای اندازه پذیر

Measureable space

تعریف:

اگر Ω مجموعه‌ای دلخواه و $\mathcal{F}$ یک میدان از زیر مجموعه‌های Ω باشد زوج $(\Omega, \mathcal{F})$ را فضای اندازه پذیر می‌گوییم. اگر $A \in \mathcal{F}$ و A یک مجموعه اندازه پذیر نسبت به $\mathcal{F}$ نامیده می‌شود.

هم خواهی که بر σ میدان برقرار است برای مجموعه اندازه پذیر نیز هم برقرار است.

- متمم A نیز مجموعه اندازه پذیر است
- اجتماع و اشتراک دو مجموعه اندازه پذیر، مجموعه‌ای اندازه پذیر است

Scanned with CamScanner

Subject:
Date

تعریف اندازه :

فرض کنید فضای اندازه پذیر $(\Omega, \mathcal{F})$ را داریم و μ تابعی است از

$$\mu : \mathcal{F} \longrightarrow [0, +\infty] \quad (\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\})$$

در این صورت μ یک اندازه روی $\mathcal{F}$ نامیده می‌شود هرگاه 0 برابر هر دنباله از مجموعه‌های اندازه پذیر دو به دو جدا از هم داشته باشیم

$$A_i \in \mathcal{F},\ A_i \cap A_j = \phi \ (i \neq j) \Rightarrow \mu\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i \mu(A_i)$$

اکنون به فضای سه تایی مرتب $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ "فضای اندازه" می‌گوییم.

Measure space

نکته : توابع ثابت روی فضا $(\Omega, \mathcal{F})$ نمی‌توانند تابع اندازه باشند

$$A_1 \cap A_2 = \phi \quad A_1, A_2 \in \mathcal{F}$$

$$\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$$
$$c \neq c + c$$

قضیه ۷ : فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ یک فضای اندازه باشد و عضوی مانند $A \in \mathcal{F}$ وجود داشته باشد که $\mu(A) < \infty$ در این صورت $\mu(\phi) = 0$

PqPCO

$$\mu(A) = \mu(A \cup \phi) = \mu(A) + \mu(\phi) \xrightarrow[\mu(A) < \infty]{} \mu(\phi) = 0$$

Scanned with CamScanner

Lebesque measure اندازه لبگ

اندازه‌ای که روی بازه‌ها تعریف می‌شود

$\ell([a,b]) = b-a$ طول بازه

$\int_a^b dx = b-a$

$\ell([a_1,b_1] \cup [a_2,b_2]) = \ell([a_1,b_1]) + \ell([a_2,b_2])$ ← اگر بازه‌ها مجزا باشند

در فضای اندازه

$([0,1], \mathcal{B}(\mathbb{R}) \cap [0,1], \lambda)$

که یک فضای اندازه لبگ است به λ اندازه لبگ می‌گوییم و داریم

$\lambda([0,1]) = 1$

$\lambda([\frac{1}{2},1]) = \frac{1}{2}$

Scanned with CamScanner

تابع اندازه‌پذیر:

تعریف تصویر معکوس: فرض کنید X و Y دو مجموعه کاملاً دلخواه باشند و f تابعی از X به Y، $f: X \to Y$ در این صورت داریم

$$f^{-1}(B) = \{x \in X, f(x) \in B\}$$

مثال: فرض کنید $f: R \to R$ ضابطه $f(x) = \sin x$

$$f^{-1}[-1,1] = R \qquad f^{-1}\{0\} = \{k\pi : k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

$$f^{-1}(-\infty, -1) = \phi \qquad f^{-1}(1, \infty) = \phi$$

قضیه (ویژگی‌های تصویر معکوس): فرض کنید $f: X \to Y$ یک تابع و A، B و B_α زیرمجموعه‌هایی از Y باشند در این صورت

$$x \in f^{-1}(B^c) \Leftrightarrow f(x) \in B^c \Leftrightarrow f(x) \notin B \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in (f^{-1}(B))^c$$

$$f^{-1}(Y) = X \qquad f^{-1}(\phi) = \phi \qquad f^{-1}(\bigcup_\alpha B_\alpha) = \bigcup_\alpha f^{-1}(B_\alpha)$$

$$f^{-1}(\bigcap_\alpha B_\alpha) = \bigcap_\alpha f^{-1}(B_\alpha) \qquad f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$$

$$f^{-1}(A - B) = f^{-1}(A) - f^{-1}(B) \qquad B \subseteq A$$

$$x \in f^{-1}(A-B) \Rightarrow f(x) \in A - B \Leftrightarrow f(x) \in A, f(x) \in B^c$$

$$\Rightarrow x \in f^{-1}(A), x \in f^{-1}(B^c) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A), x \notin f^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) - f^{-1}(B)$$

(تمرین)

$$f^{-1}(Y) = \{x \in X, f(x) \in Y\} = X$$

$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cap (f^{-1}(B))^c$$

$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) - f^{-1}(B)$$

PqPCO

$$x \in f^{-1}(\bigcup_\alpha B_\alpha) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcup_\alpha B_\alpha \Leftrightarrow \exists \alpha \quad f(x) \in B_\alpha$$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha \quad x \in f^{-1}(B_\alpha) \Leftrightarrow x \in \bigcup_\alpha f^{-1}(B_\alpha)$$

Scanned with CamScanner

Subject: (11)
Date

- تابع اندازه پذیر: فرض کنید $f: X \to Y$ و $\mathcal{F}$ و $\mathcal{G}$ در σ میدان روی X و Y باشند، f یک تابع اندازه پذیر است هرگاه

$$\forall B \in \mathcal{G} \quad f^{-1}(B) \in \mathcal{F} \quad ; \quad f^{-1}(\mathcal{G}) \subset \mathcal{F}$$

($\mathcal{G}$ مجموعه اندازه پذیر)

(تصویر معکوس هر عضو $\mathcal{G}$ عضوی از $\mathcal{F}$ باشد)

در اینصورت تابع f را $\mathcal{F}-\mathcal{G}$ اندازه پذیر گوییم.

$f^{-1}(\cup B_\alpha) = \cup f^{-1}(B_\alpha)$

- تابع اندازه پذیر بورل:

فرض کنید $f: R \to R$ تابعی باشد، $\mathcal{B}-\mathcal{B}$ اندازه پذیر است

($\mathcal{B}$ سیگما میدان بورل) در اینصورت می گوییم f اندازه پذیر بورل است.

$f: (R, \mathcal{B}(R)) \to (R, \mathcal{B}(R))$

- تابع حقیقی اندازه پذیر:

$f: (R, \mathcal{F}) \to (R, \mathcal{B}(R))$

f → σ میدان تعریف شده روی R

$\mathcal{B}(R)$ → σ میدان تعریف شده روی R

$$\text{if } f^{-1}(\mathcal{B}(R)) \subset \mathcal{F}$$

تابع حقیقی f اندازه پذیر است.

$$\Rightarrow f^{-1}(\mathcal{B}(R)) = \{f^{-1}(B),\ B \in \mathcal{B}(R)\}$$

P4PCO

Scanned with CamScanner

Subject:
Date

مثال: نشان دهید $X=\{1,2,3\}$ $\mathcal{F}=\{\phi, X, \{1,2\}, \{3\}\}$

$Y=\{5,6,7\}$ $\mathcal{G}=\{\phi, Y, \{5,6\}, \{7\}\}$

$f: X \to Y$, $f(1)=5$, $f(2)=6$, $f(3)=7$ به طوری که f نسبت به $\mathcal{F}-\mathcal{G}$ اندازه‌پذیر است

$B_1=\{5,6\}$ $B_2=\{7\}$

$$f^{-1}(B_1)=f^{-1}(\{5,6\})=\{1,2\}\in\mathcal{F}$$

$$f^{-1}(B_2)=f^{-1}(\{7\})=\{3\}\in\mathcal{F}$$

اگر تعریف کنیم $g(1)=5$, $g(2)=g(3)=7$ آیا g اندازه‌پذیر است؟

$$g^{-1}(7)=\{2,3\}\notin\mathcal{F} \qquad g^{-1}(5)=\{1\}\notin\mathcal{F}$$

قضیه ۹: فرض کنید $(\Omega,\mathcal{F})$ فضای اندازه‌پذیر و $f:\Omega\to R$ تابع حقیقی باشد. موارد زیر معادلند

الف) f اندازه‌پذیر است

اثبات ۱۳۷ یا

ب) به ازای هر $t\in R$ ، $f^{-1}(-\infty,t]=\{\omega \mid f(\omega)\le t\}\in\mathcal{F}$

ج) به ازای هر $t\in R$ ، $f^{-1}(-\infty,t)=\{\omega \mid f(\omega)<t\}\in\mathcal{F}$

د) به ازای هر $t\in R$ ، $f^{-1}(t,+\infty)=\{\omega \mid f(\omega)>t\}\in\mathcal{F}$

ه) به ازای هر $t\in R$ ، $f^{-1}[t,+\infty)=\{\omega \mid f(\omega)\ge t\}\in\mathcal{F}$

"پس برای اثبات اندازه‌پذیری از قضیه ۹ بیزی توان استفاده کرد"

قضیه ۱۰: فرض کنید $f,g:\Omega\to R$ دو تابع حقیقی اندازه‌پذیر باشند

$$f:(\Omega,\mathcal{F})\to(R,\mathcal{B}(R))$$
$$g:(\Omega,\mathcal{F})\to(R,\mathcal{B}(R))$$

Scanned with CamScanner

و $h: R \to R$ تابع بورل پیوسته باشد در این صورت تابع زیر اندازه پذیرند

۱) $f+g$ ۲) $f-g$ ۳) $f.g$ ۴) $g \neq 0 \Rightarrow f/g$ ۵) $hof = h(f)$

اثبات صفحه ۳۸ و ۳۹ بالا

برای مثال برای ① فرض کنید $t \in R$ دلخواه باشد (طبق ق۹)

$$\{\omega \in \Omega : (f+g)(\omega) < t\} = \{\omega \in \Omega : f(\omega) + g(\omega) < t\}$$

$$= \{\omega \in \Omega : f(\omega) < t - g(\omega)\}$$

بین عددی گویا مثل r بین $f(\omega)$ و $t - g(\omega)$ حتما وجود دارد پس می‌شود اجتماع

$$\{\omega \in \Omega : f(\omega) < t - g(\omega)\} = \bigcup_{r \in Q} \{\omega \in \Omega : f(\omega) < r < t - g(\omega)\}$$

$$= \bigcup_{r \in Q} [\{\omega \in \Omega : r < t - g(\omega)\} \cap \{\omega \in \Omega : f(\omega) < r\}]$$

$$= [\bigcup_{r \in Q} \{\omega \in \Omega : f(\omega) < r\}] \cap [\bigcup_{r \in Q} \{\omega \in \Omega : g(\omega) < t - r\}]$$

$\in \mathcal{F}$ $\in \mathcal{F}$ $\in \mathcal{F}$ $\in \mathcal{F}$

چون $\mathcal{F}$ سیگما جبر است طبق تعریف سیگما جبر

صورت تمرین چون f و g اندازه پذیرند و اجتماع شمارا از مجموعه‌ای اندازه پذیر اندازه پذیر است.

داریم این مجموعه‌ها اندازه پذیرند و اشتراک آنها نیز اندازه پذیر است.

به همین ترتیب $f-g$ ثابت می‌شود برای اثبات fg:

$$f \cdot g = \frac{(f+g)^2 - (f-g)^2}{4}$$ چون $f+g$ اندازه پذیر است

Scanned with CamScanner

Subject:
Date

برای تمرین ۶ ثابت کنید اگر g اندازه پذیر باشد آنگاه $\frac{1}{g}$ اندازه پذیر است.

از تمرین قبل $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ اندازه پذیر است.

$\forall t \in R \quad \{\omega ; \frac{1}{g(\omega)} < t\} = \{\omega ; t g(\omega) > 1\} = \{\omega ; g(\omega) > \frac{1}{t}\} \in \mathcal{F}$

برای تمرین ۵. فرض کنید $t \in R$ آنگاه

$$\{\omega \in \Omega : h(f(\omega)) < t\} = \{\omega \in \Omega : f(\omega) \in h^{-1}(-\infty, t)\}$$

چون $(-\infty, t)$ باز است و h پیوسته پس $h^{-1}(-\infty, t)$ مجموعه ای باز است و لذا مجموعه بورل است و نتیجه می گیریم بصورت مشابه هر بازه باز یک بازه باز است

$$\{\omega \in \Omega : h(f(\omega)) < t\} = f^{-1}(\underbrace{h^{-1}(-\infty, t)}_{B}) = f^{-1}(B)$$

چون f اندازه پذیر است پس $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ و لذا ترکیب h نیز اندازه پذیر است.

نتیجه: هر تابع پیوسته $f : R \to R$ اندازه پذیر بورل است (f بصورت مشابه $f^{-1}(B) \in B(R)$ هر مجموعه بورل یک مجموعه بورل می برد)

نتیجه: فرض کنید $f : \Omega \to R$ و $g : R \to R$ به ترتیب اندازه پذیر و اندازه پذیر بورل باشد در این صورت ترکیب $g \circ f : \Omega \to R$ نیز اندازه پذیر است.

تمرین. ثابت کنید اگر f اندازه پذیر باشد f^2 اندازه پذیر است.

برای اثبات کافی است $\forall t \in R \quad \{\omega ; f^2(\omega) < t\} \in \mathcal{F}$

$f : (\Omega, \mathcal{F}) \to (R, \mathcal{B}(R))$

P4PCO

Scanned with CamScanner

a) $t \le 0$; $\{\omega, f^2(\omega) < t\} = \phi \in \mathcal{F}$

b) $t > 0$; $\{\omega, f^2(\omega) < t\} = \{\omega ; |f(\omega)| < \sqrt{t}\}$

$= \{\omega ; -\sqrt{t} < f(\omega) < \sqrt{t}\} = \{\omega ; f(\omega) < \sqrt{t}\} \cap$

$\{\omega ; f(\omega) > -\sqrt{t}\} \in \mathcal{F}$

$\in \mathcal{F}$ ($\in \mathcal{F}$ ، t' ، $-\sqrt{t}$)

و $\mathcal{F}$ یک σ-میدان است تحت اشتراک متناهی

قضیه ۱۱: اگر $f_i : \Omega \to R$ ، $i = 1, \dots, n$ اندازه‌پذیر بوسیله $\mathcal{F}$ آنگاه

$\max\{f_1, \dots, f_n\}$ ، $\min\{f_1, \dots, f_n\}$ اندازه‌پذیرند

$\{\omega \in \Omega : \min\{f_1(\omega), \dots, f_n(\omega)\} > t\} = \{\omega \in \Omega : f_1(\omega) > t$

$, \dots, f_n(\omega) > t\} = \{\omega : f_1(\omega) > t\} \cap \dots \cap \{\omega : f_n(\omega) > t\} \in \mathcal{F}$

($\in \mathcal{F}$ ، $\in \mathcal{F}$)

$\{\omega \in \Omega : \max\{f_1(\omega), \dots, f_n(\omega)\} < t\} = \{\omega \in \Omega ; f_1(\omega) < t\} \cap$

$\in \mathcal{F}$

$\dots \cap \{\omega : f_n(\omega) < t\} \in \mathcal{F}$

$\in \mathcal{F}$

قضیه ۱۲: فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای همگرا از توابع اندازه‌پذیر بوسیله

Scanned with CamScanner

Subject:
Date:

اندازه‌پذیری $(\Omega, \mathcal{F})$ به شرط‌های زیر است

الف) $\sup\{f_1, f_2, \dots\}$ اندازه‌پذیر است

ب) $\inf\{f_1, f_2, \dots\}$ اندازه‌پذیر است

ج) $\overline{\lim} f_n$ ، $\underline{\lim} f_n$ اندازه‌پذیر است

د) $\lim_{n\to\infty} f_n$ (در صورت وجود) اندازه‌پذیر است

الف) $\{\omega \in \Omega : \sup\{f_1, f_2, \dots\} \le t\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega \in \Omega ; f_n(\omega) \le t\} \in \mathcal{F}$ ✓

$\{f_1(\omega) \le t, \dots f_n(\omega) \le t\}$

ب) $\{\omega \in \Omega : \inf\{f_1, f_2 \dots\} \ge t\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega \in \Omega ; f_n(\omega) \ge t\} \in \mathcal{F}$ ✓

ج) $\overline{\lim} f_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \ge n} f_k = \lim_{n\to\infty} \sup_{k \ge n} f_k = \inf_{n \ge 1} \sup_{k \ge n} f_k \in \mathcal{F}$ ↓ از ①، ②

د) $\lim_{n\to\infty} f_n = \overline{\lim} f_n = \underline{\lim} f_n$

Scanned with CamScanner

$$I_A(\omega)=\begin{cases}1 & \omega\in A\\ 0 & \omega\notin A\end{cases}$$

اندازه پذیری توابع نسبت به متغیر

$I_A:\Omega\to R \qquad (\Omega,\mathcal{F})\to(R,\mathcal{B}(R))$

قضیه ۱۳: شرط لازم و کافی برای آن که I_A اندازه پذیر باشد آن است که A

$A\in\mathcal{F} \iff I_A$ اندازه پذیر

اندازه پذیر باشد

فرض کنید A اندازه پذیر باشد B مجموعه بورل دلخواه و فرض

B مجموعه بورل دلخواه فرض کنید A اندازه پذیر $\Rightarrow I_A^{-1}(B)=\begin{cases}\Omega & 0\in B,\ 1\in B\\ A & 0\notin B,\ 1\in B\\ A^c & 0\in B,\ 1\notin B\\ \phi & 0\notin B,\ 1\notin B\end{cases}$

باشد

$A\in\mathcal{F}$ چون A اندازه پذیر است $\Rightarrow I_A^{-1}(B)\in\mathcal{F}$

$A^c\in\mathcal{F}$

$\phi\in\mathcal{F}$

$\Omega\in\mathcal{F}$

عکس: فرض کنید I_A اندازه پذیر باشد

$I_A^{-1}(1)\in\mathcal{F}\Rightarrow$ اندازه A $\underbrace{I_A^{-1}(1)}_{A}$

نکته ۱: یک تابع ثابت نسبت به هر σ میدانی اندازه پذیر است

$f^{-1}(B)=\begin{cases}\Omega & c\in B\\ \phi & c\notin B\end{cases}$ ، $B=\{\omega;\ f(\omega)=c\}$ زمرکند

هر σ میدان $\in$

نکته ۲: یک تابع دو ضابطه‌ای نسبت به هر σ میدان اندازه پذیر است

$f(x)=\begin{cases}a & x\in A\\ b & x\notin A\to x\in A^c\end{cases}$

$f^{-1}(B)=\begin{cases}A^c & a\in B,\ b\notin B\\ A & a\notin B,\ b\in B\\ \Omega & a\in B,\ b\in B\\ \phi & a\notin B,\ b\notin B\end{cases}$

نکته: اگر f و g دو تابع ساده نسبت به آن σ جبر باشند

$f+g$ ، $f.g$ هم ساده صفر بعد

Scanned with CamScanner

Subject:
Date

تابع ساده : تابع f را یک تابع ساده گوییم هرگاه مجموعه مقادیر متناهی باشد

$$\forall x \; ; \quad f(x) = \{a_1 \dots a_n\}$$

$$x \in A_i \;\; (\text{از آن}) \rightarrow f(x) = a_i \qquad i = 1 \dots n$$

$$A_i = \{x \in \Omega \; ; \; f(x) = a_i\} = f^{-1}(\{a_i\})$$

پس تابع f را می‌توانیم به صورت ترکیب خطی از توابع مشخصه مجموعه‌های $A_1 \dots A_n$ بنویسیم

$$f = a_1 I_{A_1} + \dots + a_n I_{A_n}$$

به صورت فرم کانونی $\rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i I_{A_i}(x)$ اگر A_i ها مجزا باشند این فرم کانونی نمود می‌شود

نوشت : $A_1 \cup A_2 \dots \cup A_n = \Omega$ و $A_i \cap A_j = \phi \;\; i \neq j$ (به عبارت دیگر A_i ها مجزا و افراز Ω)

مثال .

$$f(x) = 2 I_{(-1,2]}(x) + 3 I_{(2,5)}(x)$$

$$f(x) = \begin{cases} 2 & -1 < x \leq 2 \quad A_1 \\ 3 & 2 < x < 5 \quad A_2 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

$$f(x) = 2 I_{(-1,2]}(x) - 3 I_{[2,5)}(x)$$

اشتراک دارند

$$\Rightarrow \begin{cases} I_{(-1,2]} = I_{(-1,2)} + I_{[2,2]} \\ I_{[2,5)} = I_{[2,2]} + I_{(2,5)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = 2 I_{(-1,2)}(x) - I_{[2,2]} - 3 I_{(2,5)}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2 & -1 < x < 2 \\ -1 & 2 \leq x \leq 2 \\ -3 & 2 < x < 5 \end{cases}$$

P4PCO

Scanned with CamScanner

Subject: (۱۵)
Date

$a_1 I_{A_1} + \dots + a_n I_{A_n}$

قضیه ۱۴: شرط لازم و کافی برای آن که تابع ساده $f = \sum_{i=1}^{n} a_i I_{A_i}$ اندازه‌پذیر باشد آن است که A_iها $i = 1, \dots, n$ اندازه‌پذیر باشند.

- اگر A_iها مجزا باشند:

$f: \Omega \to R$ $\quad (\Omega, \mathcal{F}) \to (R, \mathcal{B}(R))$ $\quad \forall B \in \mathcal{B}(R)$ طبق تعریف $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$

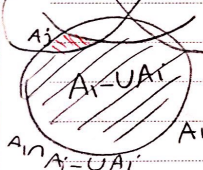
$$f^{-1}(B) = \begin{cases} A_1 & a_1 \in B, a_2 \dots a_n \notin B \\ A_2 & \\ \vdots & \\ A_n & a_n \in B, a_1 \dots a_{n-1} \notin B \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} a_1 & x \in A_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & x \in A_n \end{cases}$$

$\Rightarrow A_1 \in \mathcal{F}, \dots, A_n \in \mathcal{F}$

- اگر A_iها مجزا نباشند: قطع عضو A_1 ... عضو A_1 و A_j و ... عضو هیچ‌کدام

$$f(x) = \begin{cases} a_1 & x \in A_1 - \bigcup_{i \neq 1} A_i \in \mathcal{F} \\ a_1 + a_j & x \in A_1 \cap A_j - \bigcup_{i \neq 1, i \neq j} A_i \in \mathcal{F} \\ \vdots & \\ a_1 + a_2 + \dots + a_n & x \in A_1 \cap A_2 \dots \cap A_n \end{cases}$$



چون f اندازه‌پذیر است هریک از مجموعه‌ها سمت راست برابری با یک اندازه‌پذیرند

و چون هریک از A_1ها را می‌توان به کمک این مجموعه‌ها نوشت پس A_1ها اندازه‌پذیرند چرا

$$A_1 = (A_1 - \bigcup_{i \neq 1} A_i) \cup (A_1 \cap A_j - \bigcup_{i \neq 1, i \neq j} A_i) \cup \dots$$

A_1

همین ترتیب برای همه A_iها

PqPCO

Scanned with CamScanner

Date

مبحث سوم :

۱- فرض کنید A_n و A و B_n و B زیرمجموعه‌هایی از یک فضای نمونه باشند ثابت کنید

$$\limsup_{n\to\infty}(A_n \cup B_n) = \limsup_{n\to\infty} A_n \cup \limsup_{n\to\infty} B_n$$

$$\limsup_{n\to\infty}(A_n \cup B_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}(A_k \cup B_k) = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \cup \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} B_k\right)\right)$$

$$= \left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \cup \left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} B_k\right) = \overline{\lim} A_n \cup \overline{\lim} B_n$$

به همین ترتیب می‌توان نشان داد :

$$\liminf_{n\to\infty}(A_n \cup B_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}(A_k \cup B_k) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right) \cup \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} B_k\right)\right)$$

$$= \left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} B_k\right) = \underline{\lim} A_n \cup \underline{\lim} B_n$$

حال اگر $A_n \to A$ ، $B_n \to B$

$$\lim(A_n \cup B_n) = A \cup B$$

$A_n \cup B_n \to A \cup B$

۲- فرض کنید $A_n = \left\{\frac{m}{n} ,\ m \in N\right\}$ ، $n \in N$ ، $\overline{\lim}_n A_n$ ، $\underline{\lim} A_n$

$n=1$ $A_1 = \{1, 2, 3, \dots\}$

$n=2$ $A_2 = \{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots\}$ ..... $A_k = \{\frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \dots, 1, \frac{k+1}{k}, \dots\}$ $n=k$

$A_1 \subset A_2$ ، $A_1 \subset A_3$ ، ...

$$\underline{\lim} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_1 = A_1 = N$$

P4PCO

$\{1, 2, \dots\}$ $k=1$

$\{\frac{1}{2}, 1, \dots\}$ و $\{\frac{2}{3}, \dots\}$ $k=2$

$\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1, \frac{n+1}{n}, \dots\}$ $k=n$

$n \to \{1, 2, 3, \dots\}$

Scanned with CamScanner

Subject: (14)
Date

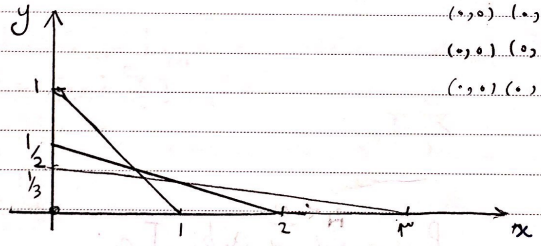
$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = Q^+$$

Q^+

۲-

۳- مجموعه نقاط داخل و روی اضلاع مثلث A_n به رئوس $(0,0)$ ، $(0,1/n)$ ، $(1/n,0)$

$\limsup A_n$ و A_n را در صفحه مختصات در تقاطع بدست آورید و حاصل



$(1,0)$ $(0,1)$ $(0,0)$

$(0,1/2)$ $(0,0)$

$(0,1/3)$ $(0,0)$

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

اجتماع مثلثها از وقت کنید محور x و $y \geq 0$

$\cap$

$\longrightarrow (x,0)$

$n=1$ $\quad \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \{(x,y) \mid x \geq 0, 0 \leq y \leq 1\}$

$n=2$ $\quad \bigcup_{k=2}^{\infty} A_k = \{(x,y) \mid x \geq 0, 0 \leq y \leq 1/2\}$

$n=n$ $\quad \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \{(x,y) \mid x \geq 0, 0 \leq y \leq 1/n\}$

$$\Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{(x,y) \mid x \geq 0, \ 0 \leq y \leq 1/n\} = \{(x,0) \mid x \geq 0\}$$

پس حاصل ترتیب $\limsup A_n = \{(x,0) \mid x \geq 0\}$

PAPCO

Scanned with CamScanner

Subject:
Date

۵- اگر f و g دو تابع ساده باشند آن گاه $f+g$ ، $f.g$ نیز ساده اند

$$f=\sum_{i=1}^{n} a_i I_{A_i} \qquad g=\sum_{j=1}^{m} b_j I_{B_j} \quad (A_i \text{ و } B_j \text{ کلکسیون})$$

$C_{ij}=A_i\cap B_j$ تعریف کنید

$$f=\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{m} I_{C_{ij}} \qquad g=\sum_{j=1}^{m} b_j \sum_{i=1}^{n} I_{C_{ij}}$$

$$\rightarrow f+g=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(a_i+b_j) I_{C_{ij}}$$

$$\underbrace{I_{A_i\cap B_1}}_{A_i\cap B_1}+\underbrace{I_{A_i\cap B_2}}_{A_i\cap B_2}+\dots+\underbrace{I_{A_i\cap B_m}}_{A_i\cap B_m}=I_{A_i}I_{B_1}+\dots+I_{A_i}I_{B_m}$$

$$=I_{A_i}[I_{B_1}+\dots+I_{B_m}]$$

$$=I_{A_i}\left[\sum_{j=1}^{m} I_{B_j}\right]=I_{A_i}\left[I_{\bigcup_{j=1}^{m} B_j}\right]=I_{A_i}$$

$$I_{\bigcup_{i=1}^{m} B_j}=\sum_{j=1}^{m} I_{B_j}$$

به همین ترتیب

$$f.g=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j I_{C_{ij}}$$

۶- فرض کنید $f:\Omega\rightarrow R$ ، نشان دهید $\mathcal{G}=\{f^{-1}(B);\ B\in\mathcal{B}(R)\}$ یک σ-میدان است

$\mathcal{G}$ یک σ-میدان است

$$f^{-1}(B)\in\mathcal{G}\Rightarrow (f^{-1}(B))^c=f^{-1}(B^c)\in\mathcal{G}$$

خواص متقابل و وجود

$$B\in\mathcal{B}(R)\rightarrow B^c\in\mathcal{B}(R)$$

نشان دهید $B_1,\dots\in\mathcal{B}(R)$ $\quad f^{-1}(B_1),\dots\in\mathcal{G}$

$$\Rightarrow \bigcup B_i\in\mathcal{B}(R) \qquad \bigcup_i f^{-1}(B_i)=f^{-1}\left(\bigcup_i B_i\right)\in\mathcal{G}$$

خواص متقابل — اجتماع

PAPCO

Scanned with CamScanner

Subject: ۱۷
Date

۷- فرض کنید $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک تابع از یک به یک باشد. نشان دهید

$$f^{-1}(G(C)) = G(f^{-1}(C))$$

صد ۷۳ رزنیک

۸- A, B دو مجموعه دلخواه و $\{A_n\}$ دنباله‌ای از آنها که

$$A_n = \begin{cases} A & n \text{ فرد} \\ B & n \text{ زوج} \end{cases}$$

$\underline{\lim} A_n = ?$ $\quad \overline{\lim} A_n = ?$

$$\overline{\lim} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

if $n=1$ $\quad \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cup A_2 \cdots = A \cup B$

$n=n$ $\quad \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = A_n \cup A_{n+1} \cdots = A \cup B$

$A \cup B$ این $\cap$

$$\underline{\lim} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

if $n=1$ $\quad \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cap A_2 \cap \cdots = A \cap B$

$n=n$ $\quad \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = A_n \cap A_{n+1} \cdots = A \cap B$

$A \cap B$ این $\cup$

PAPCO

Scanned with CamScanner

Subject:
Date

۹- ثابت کنید ماکسیمم مینیمم چند تابع ساده خود یک تابع ساده است به عبارت

دیگر فرض کنید $\phi_1 \dots \phi_n$ توابع ساده باشند

$$\phi(x) = \min\{\phi_1(x) \dots \phi_n(x)\}$$

A_i را برای

$$\psi(y) = \max\{\phi_1(x) \dots \phi_n(x)\}$$

ثابت کنید ϕ و ψ توابع ساده‌اند

$$\varphi_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i I_{A_i} = \sum_i a_i \sum_j I_{c_{ij}} \quad \varphi_2 = \sum_{j=1}^{m} b_j I_{A_j} = \sum_j b_j \sum_i I_{c_{ij}}$$

(راهنمایی:

$$\min(\varphi_1, \varphi_2) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \min(a_i, b_j) I_{c_{ij}}$$

$$c_{ij} = A_i \cap A_j$$

ماکسیمم هم به همین ترتیب.

$$\max(\varphi_1, \varphi_2) = \sum\sum \max(a_i, b_j) I_{c_{ij}}$$

19 ژانویه

۱۰- فرض کنید A و B دو مجموعه دلخواه و I_A و I_B به ترتیب توابع مشخصه آنها باشند

توابع $\max\{I_A, I_B\}$ و $\min\{I_A, I_B\}$ به صورت توابع

$$I_{A \cup B} \le I_A + I_B$$

مشخصه هستند.

$$\begin{cases} I_A = 1 & \omega \in A \\ I_B = 0 & \omega \notin B \end{cases} \rightarrow \max\{I_A, I_B\} = I_A = I_{A \cup B} = 1$$

$$\begin{cases} I_A = 0 & \omega \notin A \\ I_B = 1 & \omega \in B \end{cases} \rightarrow \max\{I_A, I_B\} = I_B = I_{A \cup B} = 1$$

$$\begin{cases} I_A = 0 & \omega \notin A \\ I_B = 0 & \omega \notin B \end{cases} \rightarrow \max\{I_A, I_B\} = I_A \text{ یا } I_B = I_{A \cup B} = 0 \quad (\omega \notin A \cup B)$$

$$\begin{cases} I_A = 1 & \omega \in A \\ I_B = 1 & \omega \in B \end{cases} \rightarrow \max\{I_A, I_B\} = I_A \text{ یا } I_B = I_{A \cup B} = 1$$

$\min\{I_A, I_B\} = I_{A \cap B}$ همچنین

Scanned with CamScanner

فضای احتمال
Probability space

فرض کنید Ω یک مجموعه دلخواه باشد Ω را فضای نمونه‌ای می‌نامیم که می‌تواند شامل زیرمجموعه‌هایی باشد که در حالت متناهی یا نامتناهی باشد. دیدیم اگر $\mathcal{F} \subseteq P(\Omega)$ ، یک σ-میدان باشد آن‌گاه $(\Omega, \mathcal{F})$ فضای اندازه‌پذیر می‌گویند.

اکنون مجموعه $A \subseteq \Omega$ را نسبت به $\mathcal{F}$ پیش‌مولد گوییم هرگاه $A \in \mathcal{F}$.

نکته ۱: Ω و ϕ نسبت به هر σ-میدان پیش‌مولد هستند و مجموعه‌ای مثل A همیشه نسبت به σ-میدان $\mathcal{F}_1$ پیش‌مولد است اما نسبت به $\mathcal{F}_2$ پیش‌مولد نباشد.

$$\mathcal{F}_1 = \sigma(A) = \{\phi, \Omega, A, A^c\}$$

$$\mathcal{F}_2 = \sigma(B) = \{\phi, \Omega, B, B^c\}$$

B نسبت به $\mathcal{F}_2$ پیش‌مولد است اما نسبت به $\mathcal{F}_1$ پیش‌مولد نیست همین طور برای A.

نکته ۲: در بحث احتمال معمولاً $\mathcal{F} = P(\Omega)$ را در نظر می‌گیریم و هر زیرمجموعه از فضای نمونه را پیش‌مولد می‌گیریم.

Scanned with CamScanner

Date

تعریف تابع احتمال. فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F})$ یک فضای اندازه‌پذیر باشد. تابع

$$P : (\Omega, \mathcal{F}) \to [0,1]$$

را یک تابع احتمال گوییم هرگاه ۲ خاصیت زیر را داشته باشد

۱) $P(\Omega) = 1$

۲) $P(\bigcup_i A_i) = \sum_i P(A_i)$: A_iها پیشامدهای مجزا باشند $A_i \cap A_j = \emptyset$; $i \neq j$

که ① و ② اصول احتمال یا اصول کلموگروف می‌نامیند. به سه‌تایی

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$

فضای احتمال می‌گوییم.

نتایج

① $P(\emptyset) = 0$ $\quad P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset) = 1 \Rightarrow P(\emptyset) = 0$

② $P(A^c) = 1 - P(A)$ $\quad P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) = 1 \Rightarrow P(A^c) = 1 - P(A)$

③ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = P(A - B) + P(A \cap B) + P(B - A) + P(A \cap B) - P(A \cap B)$

$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

④ $A \subseteq B \Rightarrow P(B - A) = P(B) - P(A) \geq 0 \Rightarrow P(B) \geq P(A)$

⑤ $P(A) = 0$ پیشامد A دیرچ است هرگاه

⑥ $P(A) = 1$ A ، حتمی (به تقریب سر) هرگاه almost sure

⑦ $P(B) = P(B - A) + P(A \cap B)$

P4PCO

Scanned with CamScanner

قضیه: الف) اگر $\{A_n\}$ دنباله‌ای صعودی از پیشامدها باشد در این صورت

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right)$$

ب) اگر $\{A_n\}$ دنباله‌ای نزولی از پیشامدها باشد

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right)$$

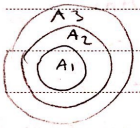
اثبات:

قبلاً دیدیم اگر $\{A_n\}$ دنباله‌ای صعودی باشد $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} A_n$

و با تعریف $B_n = A_n - A_{n-1}$ می‌توان نوشت $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ به طوری که $A_0 = \phi$

که $\{B_n\}$ دنباله‌ای از پیشامدهای ناسازگار هستند

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) \qquad B_i \cap B_j = \phi \ (i \neq j)$$



$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P(B_k) = \lim_{n\to\infty} P(B_1 \cup \cdots \cup B_n) \qquad A_n$$

$$= \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

ب) اگر A_n نزولی باشد A_n^c صعودی است

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1 - P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)$$

$$= 1 - \lim_{n\to\infty} P(A_n^c) = \lim_{n\to\infty} (1 - P(A_n^c))$$

$$= \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

Scanned with CamScanner

Subject:
Date

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$ قضیه ۲: نامساوی بول

برای ۲ تایی دستاوردهای برقرارست

$$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Rightarrow P(A\cup B) \le P(A)+P(B)$$

$$P(A_1\cup \dots A_n) \le \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

برای نامتناهی:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \dots$$

$B_1 = A_1 \quad B_2 = A_2 - A_1 \quad B_3 = A_3 - (A_1\cup A_2) \dots$

$A_0 = \Phi$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P(B_k) \le \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

$B_i \subset A_i$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

قضیه ۳ (لم فاتو) Fatou's lemma

فرض کنید $\{A_n\}$ دنباله‌ای دلخواه باشد. در این صورت

$$P(\liminf A_n) \le \liminf P(A_n) \le \limsup P(A_n) \le P(\limsup A_n)$$

اثبات: فرض کنید $\{A_n\}$ دنباله‌ای دلخواه باشد. در اینصورت

$$P(\liminf_{n\to\infty} A_n) = P\left(\bigcup_{n\ge 1}\bigcap_{k\ge n} A_k\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \quad (1)$$

($B_n = \bigcap_{k\ge n} A_k$)

مرور دوباره نی دهم

$B_1 = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \quad B_2 = \bigcap_{k=2}^{\infty} A_k \dots \Rightarrow B_1 \subset B_2 \dots \leftarrow$ طبیعی $\bigcap_{k\ge n} A_k = B_n$

P4PCO

Scanned with CamScanner

از طرفی هم چون B_n دنباله صعودی است پس $\lim_{n\to\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$

پس $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \lim_{n\to\infty} P(B_n)$

① $= \lim_{n\to\infty} P(B_n)$

از طرفین liminf: $P(B_n) = P(\bigcap_{k\geq n} A_k) \leq P(A_n)$

$\lim P(B_n) = \lim\inf P(B_n) \leq \lim\inf P(A_n)$

چون $\{B_n\}$ صعودی است وحدّ آن موجود است

پس $P(\lim\inf A_n) \leq \lim\inf P(A_n)$

و از طرفی می دانیم

$\lim\inf P(A_n) \leq \lim\sup P(A_n)$

و در نهایت می خواهیم ثابت کنیم $\lim\sup P(A_n) \leq P(\lim\sup A_n)$

$P(\lim\sup A_n) = P(\bigcap_{n\geq 1} \underbrace{\bigcup_{k\geq n} A_k}_{B_n}) = P(\bigcap_{n\geq 1} B_n) = \overset{*}{\lim} P(B_n)$

$\to$ نزولی $\{B_n\}$

$P(B_n) = P(\bigcup A_k) \geq P(A_n)$

از طرفین limsup

$\limsup_{n\to\infty} P(B_n) = \overset{*}{\lim_{n\to\infty}} P(B_n) \geq \limsup_{n\to\infty} P(A_n)$

$\Rightarrow P(\lim\sup A_n) \geq \limsup P(A_n)$

Scanned with CamScanner

Subject:
Date

قضیه پیوستگی: اگر $\{A_n\}$ دنباله صعودی $A_n \to A$ در این صورت

$$P(\lim A_n) = \lim P(A_n)$$

$$\Rightarrow P(A_n) \to P(A)$$

اثبات: طبق لم فاتو

$$P(A) \le \liminf P(A_n) \le \limsup P(A_n) \le P(A)$$

$$\Rightarrow \liminf P(A_n) = \limsup P(A_n) = P(A)$$

$$\Rightarrow \lim P(A_n) = P(A)$$

احتمال شرطی:

فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F})$ یک فضای اندازه پذیر و $P: (\Omega, \mathcal{F}) \to [0,1]$ و A یک پیشامد دلخواه و ثابت داخل $\mathcal{F}$ باشد یعنی $A \in \mathcal{F}$ تابع جدید $P_1: (\Omega, \mathcal{F}) \to [0,1]$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$P_1(B) = P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \quad B \in \mathcal{F}$$

تابع احتمال است چون:

① $P_1(\Omega) = P(\Omega|A) = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$

② $P_1(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n | A) = \frac{P((\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \cap A)}{P(A)}$

برای B_iهای مجزا

PAPCO

Scanned with CamScanner

$(B_1 \cap A) \cap (B_2 \cap A) = (B_1 \cap B_2) \cap A = \phi$ ← جدا اند

$$= \frac{P(\bigcup_{n=1}^{\infty}(B_n \cap A))}{P(A)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(B_n \cap A)}{P(A)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n \mid A) = \sum_{n=1}^{\infty} P_1(B_n)$$

بقیه خواص را نیز دارد شرط B_n ها صعودی

$$P_1(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \mid A) = \lim_{n \to \infty} P_1(B_n)$$

قضیه بیز: فرض می‌کنیم $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک افراز شمارشی باشد. حال دوم

$\Omega = \bigcup A_i$ $\quad P(E) = P(E \cap \Omega) = P(E \cap (\bigcup A_i)) = P(\bigcup (E \cap A_i))$ (اجتماع)



اصول اجتماع $\Rightarrow P(E) = \sum_{i \geq 1} P(E \cap A_i)$

احتمال شرطی $= \sum_{i \geq 1} P(A_i) P(E \mid A_i)$

قانون احتمال کل $\quad P(E) = \sum_{i \geq 1} P(A_i) P(E \mid A_i)$

$$P_1(A_i) = P(A_i \mid E) = \frac{P(E \cap A_i)}{P(E)} = \frac{P(A_i) P(E \mid A_i)}{\sum_{j \geq 1} P(A_j) P(E \mid A_j)}$$

قاعده بیز

استقلال: فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ را در نظر گیرید دو پیامد A و B

مستقلند هرگاه $P(A \cap B) = P(A) P(B)$

نتیجه: اگر A و B مستقل باشند آن‌گاه

هم ارزند

① A, B^c مستقل ② A^c, B مستقل ③ A^c, B^c مستقل

④ $P(B \mid A) = P(B)$ ⑤ $P(A \mid B) = P(A)$

P4PCO

Scanned with CamScanner

Subject:
Date

Borel cantelli lemma : لمم بورل کانتلی

فرض کنید $\{A_n\}$ دنباله‌ای از پیشامدها از فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ باشد

$P(A_n; i.o)=0$ آن‌گاه $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ الف) اگر بدین صورت

$P(A_n; i.o)=1$ آن‌گاه $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ و A_n مستقل ب) اگر

$$\limsup A_n = \{A_n; i.o\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$: تعریف داشتیم

$$\Rightarrow P(A_n; i.o) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i\right)$$

B_n

$$\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=n}^{\infty} P(A_i) \overset{\text{همگرا}}{=} 0 \Rightarrow P(A_n; i.o) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} a_k = 0 \Leftarrow \text{همگرا} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$P(A_n; i.o)^c = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c\right)$$

$B_n \uparrow$

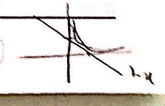
$$= \lim_{n\to\infty} P\left(\lim_{m\to\infty} \bigcap_{k=n}^{m} A_k^c\right) = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} P\left(\bigcap_{k=n}^{m} A_k^c\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \prod_{k=n}^{m} P(A_k^c) = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \prod_{k=n}^{m} (1-P(A_k))$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \prod_{k=n}^{m} e^{-P(A_k)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} e^{-\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k)} = 0$$

$1-x \leq e^{-x}$



PAPCO

Scanned with CamScanner

استقلال شرطی :

فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ یک فضا احتمال و $A \in \mathcal{F}$ پیشامدی با شرط $P(A) > 0$ باشد در این صورت دو پیشامد B و C را مستقل شرطی با شرط A گوییم هرگاه این دو پیشامد با اندازه احتمال $P(\cdot|A)$ مستقل باشند یعنی داشته باشیم

$$P(B \cap C | A) = P(B|A)\,P(C|A)$$

چند مثال :

۱- فرض کنید $A_1 \dots A_n$ پیشامدهایی از فضا احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ باشند در این صورت

(نابرابری بن فرونی) $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) \geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1)$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} P(A_i^c) = 1 - \sum_{i=1}^{n} (1 - P(A_i))$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1)$$

۲- فرض کنید $E_i = \{x \mid x < 1/i^2\}$ ، $x \in [0,1]$ مطلوبست محاسبه

$P(E_i ; i \circ) = ?$

$P(E_i) = P([0, \frac{1}{i^2}[) = \frac{1}{i^2}$

$\sum_{i=1}^{\infty} P(E_i) = \sum \frac{1}{i^2} < \infty$ $\quad i = 1, 2 \dots$

$\Rightarrow P(E_i ; i \circ) = 0$

Scanned with CamScanner

Subject:
Date

۲- در فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ فرض کنید A_i و B_i سیاهه‌های بی‌شمار از $\mathcal{F}$ هستند، $P(A_i)=1$ و $P(B_i)=0$ ثابت کنید $P(\cap A_i)=1$ و $P(\cup B_i)=0$

$P(B_i)=0 \rightarrow \sum P(B_i)=0$

$P(\cup B_i) \leq \sum P(B_i) \Rightarrow 0 \leq P(\cup B_i) \leq 0$ (مقایسه)

$\Rightarrow P(\cup B_i)=0$

$P(A_i)=1 \rightarrow P(A_i^c)=0 \Rightarrow P(\cup A_i^c)=0 \rightarrow 1-P(\cap A_i)=0$

$\Rightarrow P(\cap A_i)=1$

نابرابری بن فرونی: فرض کنید $A_1, \dots, A_n$ سیاهه‌هایی از فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ باشند داریم

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) \geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1)$$

$A_1, A_2 \in \mathcal{F}$ $\quad P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$

$\Rightarrow P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cup A_2)$

$\Rightarrow P(A_1 \cap A_2) \geq P(A_1) + P(A_2) - 1$

Scanned with CamScanner

Subject:
Date

۳- $\Omega = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ $\quad \mathcal{F} = P(\Omega)$

$$\forall A \in \mathcal{F} \rightarrow P(A) = \sum_{x \in A} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \qquad 0 < p < 1 \quad p+q=1$$

$$P(\Omega) = \sum_{x \in \Omega} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \binom{n}{0} q^n + \binom{n}{1} p q^{n-1} + \dots \binom{n}{n} p^n = (p+q)^n = 1$$

دوجمله‌ای نیوتن

A_i از هم جدا

$$P(\cup A_i) = \sum_{x \in A_1 \cup \dots} \binom{n}{x} p^x q^{n-1} = \sum_{x \in A_1} \binom{n}{x} p^x q^{n-1}$$

تعریف

$$+ \dots = P(A_1) + P(A_2) + \dots$$

۴- اگر $P(A_n) \rightarrow P(A)$ آنگاه $P(A_n \Delta A) \rightarrow 0$

$$P(A_n \Delta A) = P(A) + P(A_n) - 2P(A \cap A_n)$$

$$P(A) - P(A \cap A_n) = P(A - A_n)$$
$$P(A_n) - P(A \cap A_n) = P(A_n - A)$$

$$P(A_n \Delta A) = \underbrace{P(A - A_n)}_{\rightarrow 0} + \underbrace{P(A_n - A)}_{\rightarrow 0}$$

$$P(A) - P(A \cap A_n) \rightarrow 0$$
$$P(A_n) - P(A \cap A_n) \rightarrow 0 \Rightarrow P(A) \rightarrow P(A_n)$$

P4PCO

Scanned with CamScanner

Subject:
Date

۵- فرض کنید f تابعی نامنفی بر $[a,b]$ بوده و $\int_a^b f(\alpha)d\alpha = 1$

اگر برای هر $\alpha \in [a,b]$ ، P_α یک اندازه‌ی احتمال روی $(\Omega, \mathcal{F})$ بوده

ثابت کنید $P(A) = \int_a^b P_\alpha(A) f(\alpha) d\alpha$ یک اندازه‌ی احتمال است. (۱۵ نمره)

۱) $P(\Omega) = \int_a^b \underbrace{P_\alpha(\Omega)}_{1} f(\alpha)d\alpha = \int_a^b f(\alpha)d\alpha = 1$

۲) $P(\bigcup_i A_i) = \int_a^b P_\alpha(\bigcup A_i) f(\alpha)d\alpha = \int_a^b \sum_i P_\alpha(A_i) f(\alpha)d\alpha$ *

~~طبق~~ ~~$I_{A_i} = \begin{cases} 1 & \omega \in A_i \\ 0 & \omega \notin A_i \end{cases}$~~ ~~$P_\alpha(A_i) = I_{A_i}$~~

$* = \int_a^b (I_{A_1} + \dots) f(\alpha)d\alpha = \sum_i \int_a^b I_{A_i} f(\alpha)d\alpha$

$= \sum_i \int_a^b \underbrace{P_\alpha(A_i) f(\alpha)d\alpha}_{P(A_i)} = \sum_i P(A_i)$

۶- فرض کنید A و B دو پیشامد بوده به‌طوری که $P(A) > 0$. ثابت کنید

$P(A \cap B \mid A \cup B) \leq P(A \cap B \mid A)$

$P(A \cap B \mid A \cup B) = \frac{P((A\cap B) \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)}$ ①

$(A \cap B \cap A) \cup (A \cap B \cap B)$

$0 < P(A) \leq P(A \cup B)$ $\quad A \subset A \cup B$ ②

Scanned with CamScanner

Subject: (۴۳)
Date

$$P(A\cap B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} \quad (۳)$$ از طرفی

(۱)، (۲) و (۳) $\Rightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(A\cup B)} \le \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$

متغیر تصادفی: تابع X را به صورت

$$X:\Omega\to R \quad \text{یا} \quad X:(\Omega,\mathcal{F})\to(R,\mathcal{B}(R))$$

در نظر بگیرید اگر X نسبت به $\mathcal{F}$ اندازه‌پذیر باشد X متغیر تصادفی است

$$\forall B\in\mathcal{B}(R)\Rightarrow X^{-1}(B)\in\mathcal{F} \to X \text{ is R.V}$$

اگر برحسب $(R,\mathcal{B}(R))$ داشته باشیم $\mathcal{F}$ ولی آن‌گاه X یعنی تصادفی نامیده می‌شود

سه هم‌ضابطه برای توابع اندازه‌پذیر گفته شد برای متغیر تصادفی برقرار است.

مثال: تابع ثابت نسبت به $\mathcal{F}=\{\phi,\Omega\}$ متغیر تصادفی است

$$\forall\omega\in\Omega \quad X(\omega)=C \quad C\in R$$

$$\forall B\in\mathcal{B}(R) \quad X^{-1}(B)=\begin{cases}\Omega & C\in B\\ \phi & C\notin B\end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}=\{\phi,\Omega\}$$

مثال: فرض کنید $A\subset\Omega$ ، $X(\omega)=I_A(\omega)$

$$I_A^{-1}(\omega)=\begin{cases}\Omega & \cdot\in B,\ 1\in B\\ \phi & \cdot\notin B,\ 1\notin B\\ A^c & \cdot\in B,\ 1\notin B\\ A & \cdot\notin B,\ 1\in B\end{cases} \to \mathcal{F}=\{\phi,\Omega,A,A^c\}$$

پس X نسبت به این $\mathcal{F}$ اندازه‌پذیر است و X متغیر تصادفی است.

PAPCO

Scanned with CamScanner

Subject:
Date

- پس تمام توابع نسبت به $p(\Omega)$ اندازه پذیر هستند

- کوچکترین σ میدانی که توسط متغیر تصادفی X تولید می‌شود $\sigma(X)$ است مثلاً

فرض کنید X یک تابع ثابت به شکل $X = \underset{\Omega}{I_{\{\omega\}}}$ آنگاه $\sigma(X) = \{\phi, \Omega\}$

$$\sigma(X) = \{\phi, \Omega, A, A^c\}$$

به طور کلی $\sigma(X) = \{X^{-1}(B);\ B \in \mathcal{B}(R)\}$

مثال: فرض کنید X نسبت به $\mathcal{F}$ یک متغیر تصادفی در فضای اندازه پذیر $(\Omega, \mathcal{F})$ است. آیا $|X|$، X^2 و $\frac{1}{X}$ متغیر تصادفی در این فضا هستند.

(از قضیه ۹)

$$\forall t \in R \quad \{\omega, X^2(\omega) < t\} \longrightarrow \text{if } t<0 \Rightarrow \{\omega, X^2(\omega) < t\} = \phi$$

$$\text{if } t \geq 0 \rightarrow \{\omega, X^2(\omega) < t\} = \{\omega; -\sqrt{t} < X(\omega) < \sqrt{t}\} = \{\omega; X(\omega) < \sqrt{t}\} \cap \{\omega; X(\omega) > -\sqrt{t}\}$$

($\{\omega; X(\omega) < \sqrt{t}\} \in \mathcal{F}$, $\{\omega; X(\omega) > -\sqrt{t}\} \in \mathcal{F}$, $\mathcal{F} \ni$)

پس X^2 متغیر تصادفی است.

$$\left\{\frac{1}{X} \leq t\right\} = \begin{cases} X \geq \frac{1}{t} & t<0, x<0 \\ X \leq \frac{1}{t} & t>0, x<0 \\ X \geq \frac{1}{t} & t>0, x>0 \end{cases} \in \mathcal{F}$$

برای $|X|$ دقت کنید که عکس برقرار نیست یعنی $|X|$ متغیر تصادفی باشد X متغیر تصادفی نیست:

P4PCO

Scanned with CamScanner

$X(\omega) = \begin{cases} -1 & \omega \in A \\ 1 & \omega \notin A \end{cases}$ مثال نقض: $\sigma(X) = \{\phi, \Omega, A, A^c\}$

$|X(\omega)| = 1$ $\quad \sigma(|X|) = \{\phi, \Omega\}$

$\sigma(X) \neq \sigma(|X|)$

موضوع بحث: اگر $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی باشند و تعریف کنیم

$Y = \sup_{n \geq 1} X_n$ و $Z = \limsup X_n$ در اینصورت Y و Z متغیر تصادفی اند

$\forall t \in R \quad \{\omega; \sup X_n(\omega) \leq t\} = \{\omega; X_n(\omega) \leq a, \forall n\}$

$= \cap \{\omega; X_n(\omega) \leq a\} \in \mathcal{F}$ (متعلق به $\mathcal{F}$)

$Z = \limsup X_n = \inf (\sup X_n)$

Y_n متغیر تصادفی است پس $\inf$ آن متغیر تصادفی است

و همچنین X و Y متغیر تصادفی باشند $\max\{X, Y\}$ متغیر تصادفی است
$\min\{X, Y\}$

مثال. فرض کنید $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و

$X(1) = X(2) = 10 \quad X(5) = 20 \quad X(3) = X(4) = 15$

مجموعه $\sigma(X)$:

$X^{-1}(B) = \begin{cases} \phi & 10, 15, 20 \notin B \\ \Omega & 10, 15, 20 \in B \\ \{5\} & 20 \in B, 10, 15 \notin B \\ \{3,4\} & 15 \in B, 10, 20 \notin B \\ \{1,2\} & 10 \in B, 15, 20 \notin B \\ \{3,4,5\} & 15, 20 \in B, 10 \notin B \\ \{1,2,5\} & 10, 20 \in B, 15 \notin B \\ \{1,2,3,4\} & 10, 15 \in B, 20 \notin B \end{cases}$

P4PCO

Scanned with CamScanner

Subject:
Date

$$\sigma(X)=\{\phi,\Omega,\{5\},\{3,4\},\{1,2\},\{3,4,5\},\{1,2,5\},\{1,2,3,4\}\}$$

مثال: فرض کنید $X:\Omega\to R$ ، $f:R\to R$ اندازه‌پذیر بورل باشد آن‌گاه

$$\sigma(f(X))\subset\sigma(X)$$

$X:\Omega\to R \quad \forall B\in\mathcal{B}(R)\Rightarrow X^{-1}(B)\in\mathcal{F}$

$$\sigma(X)=X^{-1}(\mathcal{B}(R))\subseteq\mathcal{F}$$

$$\sigma(f(X))=\sigma(f\circ X)=X^{-1}(f^{-1}(\mathcal{B}(R)))\subset X^{-1}(\mathcal{B}(R))=\sigma(X)$$

چون f اندازه‌پذیر بورل است پس

$$f^{-1}(\mathcal{B}(R))\subseteq\mathcal{B}(R)$$

پس f اندازه‌پذیر بورل باشد

$$\sigma(f(X))\subseteq\sigma(X)$$

~~مثال: فرض کنید f و g دو تابع اندازه‌پذیر بورل، X و Y دو متغیر~~

نتیجه:

$$\sigma(X)\subset\sigma(X,Y)$$

(اثبات عکس مجموعه‌ای)

$$\sigma(Y)\subset\sigma(X,Y)$$

به طریق

$$\sigma(X,Y)=\sigma(\underbrace{X^{-1}(\mathcal{B}(R))}_{\sigma(X)}\cup\underbrace{Y^{-1}(\mathcal{B}(R))}_{\sigma(Y)})$$

PAPCO

Scanned with CamScanner

Subject
Date

قضیه: فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی باشند از $(\Omega, \mathcal{F}) \to (R, \mathcal{B}(R))$

آن‌گاه $F: R^2 \to R$ پیوسته (اندازه‌پذیر بورل)

$Z = F(X,Y)$ متغیر تصادفی است

نتیجه: اگر X و Y متغیر تصادفی باشند $X+Y$ ، $X-Y$ ، X/Y

$(\Omega, \mathcal{F}) \to (R, \mathcal{B}(R))$

و $X.Y$ متغیر تصادفی هستند.

نکته: اگر X متغیر تصادفی است آنگاه هر تابعی از X متغیر تصادفی ست هر تابع اندازه‌پذیر از متغیر تصادفی، متغیر تصادفی است.

قضیه: فرض کنید X یک شی تصادفی از $(\Omega, \mathcal{F})$ به $(R, \mathcal{B}(R))$ و $f: (\Omega, \mathcal{F}) \to (R, \mathcal{B}(R))$ تابع تعریف‌پذیر

f نیز تابعی اندازه‌پذیر از $(\Omega, \mathcal{F})$ باشد و $Z = f(X)$ در این صورت $Z = f(X): (\Omega, \mathcal{F}) \to (R, \mathcal{B}(R))$ متغیر تصادفی است.

$X^{-1}(f^{-1}) = G(X)$

باید ثابت کنیم $G(Z) = Z^{-1}(\mathcal{B}(R)) \subseteq \mathcal{F}$

$Z^{-1}(\mathcal{B}(R)) = (f(X))^{-1}(\mathcal{B}(R)) = X^{-1}(f^{-1}(\mathcal{B}(R)))$ پس $G(Z)$

چون f اندازه‌پذیر است $f^{-1}(\mathcal{B}(R)) \subseteq \mathcal{F}$

پس X^{-1}

PAPCO

Scanned with CamScanner

Subject
Date

$$\sigma(Z) = X^{-1}(f^{-1}(B(R))) \subseteq X^{-1}(\mathcal{F}') = \sigma(X) \subseteq \mathcal{F}$$

$\rightarrow$ ~~$\mathcal{F}$~~ ; $\sigma(Z) \subseteq \sigma(X) \subseteq \mathcal{F}$ ✓

عکس قضیه نیز برقرار است.

تعریف متغیر تصادفی برداری: فرض کنید

$$X, Y : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (R, B(R))$$

$$Z = (X, Y) : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (R^2, B(R^2))$$
Ω' $\mathcal{F}'$

Z را یک متغیر تصادفی برداری می‌نویسیم هرگاه

$$\sigma(Z) = Z^{-1}(B(R^2)) \subseteq \mathcal{F}$$

(متغیر تصادفی برداری حالت خاص از بُرد تصادفی است)

قضیه: اگر X و Y متغیر تصادفی $(\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (R, B(R))$ $\iff$ متغیر تصادفی برداری $Z = (X, Y)$

$$Z^{-1}(B(R^2)) \subseteq \mathcal{F} \; ; \; \{\omega; X(\omega) \leq a, Y(\omega) \leq b\} \in \mathcal{F}$$

فرض کنید X و Y متغیر تصادفی هستند

$$\{\omega; X(\omega) \leq a, Y(\omega) \leq b\} = \underbrace{\{\omega; X(\omega) \leq a\}}_{\in \mathcal{F}} \cap \underbrace{\{\omega; Y(\omega) \leq b\}}_{\in \mathcal{F}} \in \mathcal{F}$$

فرض کنید Z بردار تصادفی باشد

$$X = \{\omega : X(\omega) \leq a\} = \{\omega; X(\omega) \leq a, Y(\omega) < \infty\} \in \mathcal{F}$$

$$Y = \{\omega : Y(\omega) \leq b\} = \{\omega; X(\omega) < \infty, Y(\omega) < b\} \in \mathcal{F}$$

PAPCO

Scanned with CamScanner

این قضیه حالت تعمیم n تایی است.

- تابع توزیع

فرض کنید $P: \mathcal{F} \longrightarrow [0,1]$ و $\Omega = R, \mathcal{F} = \mathcal{B}(R_1)$

$$F_P : R \longrightarrow [0,1]$$

به ضابطه $F_P(x) = P((-\infty, x])\ x \in R$ را تابع توزیع متناظر با اندازه احتمال P می نامیم.

قضیه: فرض کنید F_P تابع توزیع متناظر با اندازه P باشد آن گاه F_P دارای خصوصیات زیر است:

$$F_P(-\infty) = 0 \ , \ F_P(+\infty) = 1$$

F_P از راست پیوسته است، F_P نا نزولی است.

اثبات: $F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim P((-\infty, x])$

$$\lim_{n \to \infty} P((-\infty, n]) = \lim_{n \to \infty} P(A_n) = P(\bigcup_{n \geq 1} A_n)$$

دنباله صعودی $\{A_n\}$

$$= P(\lim_{n \to \infty} A_n) = P(-\infty, \infty) = P(R) = 1$$

$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = P(\lim_{n \to \infty} (-\infty, n]) = P(-\infty, \infty) = \emptyset$$

دنباله نزولی

P4PCO

Scanned with CamScanner

Date

ثابت می‌کنیم F_p نانزولی است

$$F_p(x) \le F_p(y) \qquad x \le y$$

چون $x \le y \Rightarrow (-\infty, x] \subseteq (-\infty, y] \Rightarrow$

$$P((-\infty, x]) \le P((-\infty, y])$$

$$\Rightarrow F_p(x) \le F_p(y)$$

F از راست پیوسته است:

$$\lim_{x \to t^+} F_p(x) = F_p(t)$$

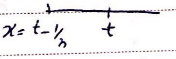
$$\lim_{n \to \infty} F_p(t + 1/n) = \lim_{n \to \infty} P(\underbrace{(-\infty, t + 1/n]}_{\text{دنباله نزولی}})$$

$$= P(\lim_{n \to \infty} (-\infty, t + 1/n])$$

$$= P((-\infty, t]) = F_p(t)$$

نتیجه: احتمال بازه‌های مختلف را می‌توان به صورت تابع توزیع بیان کرد:

$$P(-\infty, t) = P\left(\bigcup_{n \ge 1} (-\infty, t - \frac{1}{n}]\right)$$



$$= \lim_{n \to \infty} P(-\infty, t - 1/n] = \lim_{n \to \infty} F(t - 1/n) = F(t^-)$$

(باید حاصل شود)

Scanned with CamScanner

~~if $t - 1/n = x \Rightarrow$~~

بنابراین

نتایج می‌شود

$P(t,\infty) = 1 - F_p(t)$ نتیجه

$P(]t,\infty[) = 1 - F_p(t^+)$

$P([a,b]) = P((-\infty,b]) - P((-\infty,a]) = F_p(b) - F_p(a)$

$P((a,b)) = F_p(b^-) - F_p(a^+)$

$a < x < b \Rightarrow -\infty < a$

$P([a,b)) = F_p(b^-) - F_p(a^-)$

$P(a) = P([a,a]) = F_p(a) - F_p(a^-)$

$P((a,b]) = F_p(b) - F_p(a)$

نکته: F_p از راست پیوسته است ۳ حالت می‌تواند داشته باشد

F_p فقط از راست پیوسته باشد یک تابع پله‌ای است که

در این صورت اندازه احتمال متناظر با F را اندازه احتمال گسسته می‌گوییم و توزیع تقاطعی گسسته است

~~F_p پیوسته~~

F_p همیشه پیوسته است در این صورت توزیع تقاطعی پیوسته است.

تعریف: $F_p(x)$ را مطلقاً پیوسته می‌گوییم هرگاه

$\exists f \geq 0 \quad F_p(x) = \int_{-\infty}^{x} f_p(t)\,dt \quad \Rightarrow \quad F_p'(x) = f_p(x)$

PqPCO

Scanned with CamScanner

Subject
Date

که در اینصورت F_p را تابع چگالی احتمال P می نامیم.

نکته: در صورتی که F یک تابع توزیع باشد که ترکیبی از F_1 پیوسته و F_2 گسسته و F_3 مطلقاً پیوسته

$$F(x) = \alpha_1 F_1(x) + \alpha_2 F_2(x) + \alpha_3 F_3(x) \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \quad ; \quad 0 < \alpha_i < 1$$

آنگاه F را مختلط می نامیم.

قضیه: فرض کنید $F: R \to [0,1]$ که سه خاصیت نانزولی، راست پیوسته و $F(+\infty)=1$ و $F(-\infty)=0$ را داشته باشد در اینصورت

$$\exists! \; P_X : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to [0,1] \; ; \; P(-\infty, x] = F(x)$$

محض وجود

اکنون با توجه به قضیه بالا،

X متغیر تصادفی $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (R, \mathcal{B}(R))$

فضای احتمال P و $(\Omega, \mathcal{F}, P)$،

$$P : (\Omega, \mathcal{F}) \to [0,1]$$

تعریف کنیم

$$P_X : \mathcal{B}(R) \to [0,1]$$

$$B \in \mathcal{B}(R) \qquad P_X(B) = P(X \in B) = P(X^{-1}(B))$$

$$X : (\Omega, \mathcal{F}, P) \to (R, \mathcal{B}(R), P_X)$$

P_X تابع احتمال است و توزیع متغیر تصادفی X می نامیم

P_X تابع توزیع متغیر تصادفی X می نامیم

$$P_X(R) = P(X^{-1}(R)) = P(\Omega) = 1$$

$$P_X(\cup B_i) = P(X^{-1}(\cup B_i)) = P(\cup X^{-1}(B_i)) = \sum P_X(B_i)$$

Scanned with CamScanner

اکنون اگر تعریف کنیم $F_X(t) = P_X(-\infty, t)$ در این صورت

F_X کافی تعریف X را تعیین کند و کلیت است. (قضیه توسیع صفحه بعد اینجا قضیه نوشته شود)

(بنیادی‌ترین تعریف در تئوری احتمال و آمار)

تعریف ۱۳ بردار تصادفی

قضیه اگر $X : \Omega \to \Omega'$ یک $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\Omega', \mathcal{F}')$

تعریف آن‌گاه اگر $\mathcal{B}'$ یک جبر میدان از Ω' همیشه می‌توان نشان داد $X^{-1}(\mathcal{B}')$

یک σ میدان از Ω است.

اثبات قسمت اول

۱) چون $\Omega' \in \mathcal{B}' \Rightarrow X^{-1}(\Omega') = \Omega \in X^{-1}(\mathcal{B}')$

۲) if $A' \in \mathcal{B}' \Rightarrow (A')^c \in \mathcal{B}'$ and if $X^{-1}(A') \in X^{-1}(\mathcal{B})$

$\Rightarrow X^{-1}((A')^c) = (X^{-1}(A'))^c \in X^{-1}(\mathcal{B}')$

۳) if $X^{-1}(B'_n) \in X^{-1}(\mathcal{B}')$ then چون $\cup B'_n \in \mathcal{B}'$

$$\cup X^{-1}(B'_n) = X^{-1}(\cup B'_n) \in X^{-1}(\mathcal{B}')$$

تعریف ۱۴ بردار تصادفی

قضیه اگر $\mathcal{C}'$ گردایی از زیرمجموعه‌های Ω' آن‌گاه

تعریف

$$X^{-1}(\sigma(\mathcal{C}')) = \sigma(X^{-1}(\mathcal{C}'))$$

(یعنی تصویر معکوس یک σ میدان تولید شده توسط $\mathcal{C}'$ در Ω' همان

σ میدان تولید شده در Ω توسط تصویر معکوس‌هاست)

Scanned with CamScanner

Subject
Date

- ثابت کنید شرط لازم و کافی برای آن که A پیشامد باشد آن است که تابع شاخص I_A متغیر تصادفی باشد

$$I_A^{-1}(B) = \begin{cases} \Omega & 0,1 \in B \\ \phi & 0,1 \notin B \\ A & 0 \notin B, 1 \in B \\ A^c & 0 \in B, 1 \notin B \end{cases}$$

$$I_A^{-1}(B(R)) = \{\Omega, \phi, A, A^c\}$$

$A \in \mathcal{F}$ پیشامد است $\Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$ $\Rightarrow I_A^{-1}(B(R)) \in \mathcal{F}$

I_A متغیر تصادفی باشد $\rightarrow A \in \mathcal{F}$: اگر

- ثابت کنید اگر X و Y متغیر تصادفی $X+Y$ متغیر تصادفی است

$$\forall t \quad \{\omega : X(\omega) + Y(\omega) < t\} =$$

$$\{\omega : X(\omega) < t - Y(\omega)\} = \bigcup_{r \in Q} \{\omega ; X(\omega) < r < t - Y(\omega)\}$$

$$= \bigcup \{X(\omega) < r\} \cap \{\bigcup \{Y(\omega) < t - r\} \in \mathcal{F}$$

اگر A_1 و A_2 مجزا از اندازه‌پذیر باشند و تابع X به صورت $X(\omega) = \begin{cases} -1 & \omega \in A_2 \\ 1 & \omega \in A_1 \setminus A_2 \\ 0 & \omega \in A_1^c A_2^c \end{cases}$ تعریف شود ثابت کنید X متغیر تصادفی است

$$X^{-1}(B) = \begin{cases} \phi & -1,0,1 \notin B \\ A_2 & -1 \in B, 0,1 \notin B \\ A_1 \setminus A_2 & 0,-1 \notin B, 1 \in B \\ A_1^c A_2^c & 0 \in B, -1,1 \notin B \\ A_2 + A_1^c A_2 & -1,1 \in B, 0 \notin B \\ A_1^c A_2^c + A_1 \setminus A_2 & 0,1 \in B, -1 \notin B \\ A_2 + A_1^c A_2^c & -1,0 \in B, 1 \notin B \\ \Omega & -1,0,1 \in B \end{cases}$$

$X^{-1}(B(R)) = \{\phi, \ldots\}$ حاصل $\subseteq \mathcal{F}$ $\in \mathcal{F}$

$X(\omega) = -I_{A_2} + I_{A_1 \setminus A_2}$

Scanned with CamScanner

فرض کنید A و B دو پیشامد و X و Y دو متغیر تصادفی باشند، طوری که $C=A\cup B$

و به ازای هر $\omega \in A\cap B$ ثابت کنید $X(\omega)=Y(\omega)$

$$Z(\omega)=\begin{cases} X(\omega) & \omega\in A \\ Y(\omega) & \omega\in B \end{cases}$$

نیز متغیر تصادفی است.

$$Z(\omega)=X(\omega)\,I_A(\omega)+X(\omega)\,I_B(\omega)$$

چون مجموع دو متغیر تصادفی و حاصلضرب دو متغیر تصادفی متغیر تصادفی است

پس $Z(\omega)$ متغیر تصادفی است. (چون A و B پیشامدند I_A و I_B متغیر تصادفی)

قضیه توسیع کارائتودوری:

اگر F تابعی با ویژگیهای یک تابع توزیع، بر $\mathbb{R}$ باشد، آنگاه یک و تنها یک

اندازه مانند P^* روی $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ وجود دارد، بقسمی که به ازای هر t

$$F(t)=P^*((-\infty,t])$$

(وجود و یکتایی تابع توزیع) قضیه ۳۷ و قضیه ۳۸ کتابی را

ریشکین

نیز Pinkin اثبات کرده است.

Scanned with CamScanner

Subject

Date

استقلال:

دو متغیر تصادفی X و Y مستقلند هرگاه

$$\forall A,B \in \mathcal{B}(R) \quad P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

یا $P(X \in A, Y \in B) = P(X^{-1}(A) \cap Y^{-1}(B)) = P(X^{-1}(A))P(Y^{-1}(B))$

قضیه: فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل بر $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ باشند ثابت کنید شرط لازم و کافی برای آنکه X و Y مستقل باشند آن است که $\sigma(X)$ و $\sigma(Y)$ مستقلند.

(تعریف دو گیر میدان مستقل:)

$$\forall A \in \sigma(X) \quad \forall B \in \sigma(Y) \quad P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

اثبات قضیه: فرض کنید X و Y مستقل باشند طبق تعریف

$$\forall A, B \in \mathcal{B}(R) \rightarrow P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

$$= P(X^{-1}(A) \cap Y^{-1}(B)) = P(X^{-1}(A))\,P(Y^{-1}(B))$$

از طرفی چون X و Y متغیر تصادفی‌اند:

$B_1 = X^{-1}(A) \in \sigma(X)$

$B_2 = Y^{-1}(B) \in \sigma(Y)$

پس $P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P(B_2)$

و $\sigma(X)$ و $\sigma(Y)$ مستقلند

Scanned with CamScanner

Subject
Date

اگر پیشامدهای A و B مستقل باشند

$$P(X\in A, Y\in B) = P(\underbrace{X^{-1}(A)}_{\in \sigma(X)} \cap \underbrace{Y^{-1}(B)}_{\in \sigma(Y)})$$

$\sigma(X)$ و $\sigma(Y)$ مستقلند

$$= P(X^{-1}(A))\,P(Y^{-1}(B)) = P(X\in A)P(Y\in B)$$

پس X و Y مستقلند.

قضیه: دو متغیر تصادفی X و Y مستقلند اگر و تنها اگر

$$\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R},\ P(X\in(-\infty, t_1], Y\in(-\infty, t_2])$$

$$= P(X\in(-\infty, t_1])\,P(Y\in(-\infty, t_2])$$

$$\Rightarrow F_{X,Y}(t_1, t_2) = F_X(t_1)\,F_X(t_2)$$

قضیه صفر و یک کلموگروف:

تعریف: فرض کنید X_n دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی روی $(\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

اگر A_n به صورت $A_n = \sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \dots)$

در نظر بگیریم:

$$\mathcal{A} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} A_n$$

$\mathcal{A}$ میدان دنباله‌ای

آن‌گاه هر پیشامد دنباله‌ای در $\mathcal{A}$ یا $\bar{\mathcal{A}}$ احتمال صفر یا یک دارد.

PqPCO

Subject
Date

قضیه ۱-۰ کلموگروف: فرض کنید $X_1, X_2, \ldots$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل باشند در اینصورت برای هر $A \in \mathcal{A}$ که $\mathcal{A}$ یک σ میدان است

$$P(A) = 0 \quad \text{یا} \quad P(A) = 1$$

اثبات:

نکته: فرض کنید f و g دو تابع حقیقی مقدار بورل در $\mathbb{R}$ باشند X و Y نیز دو متغیر تصادفی مستقل ثابت کنید $f(X)$ و $g(Y)$ مستقلند

می‌دانیم $\sigma(f(X)) \subset \sigma(X)$ و $\sigma(g(Y)) \subset \sigma(Y)$ از طرفی X و Y مستقلند پس σ-میدانهای تولید شده نیز مستقلند

$$\forall A \in \sigma(f(X)) \rightarrow A \in \sigma(X)$$

$$\forall B \in \sigma(g(Y)) \rightarrow B \in \sigma(Y)$$

$$\rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Scanned with CamScanner

همگرایی ها

تعریف همگرایی تقریباً مطمئن a.s

almost surely

معمولاً با نماد $X_n \xrightarrow{a.s} X$ نشان می‌دهند و یعنی

$X_n \xrightarrow{a.s} X$ ~~$P(\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > 0) = 0$~~

$P(\omega : X_n(\omega) \not\to X(\omega)) = 0$ معنی:

$X_n \xrightarrow{a.s} X \iff \forall \varepsilon > 0 \quad P(\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon \text{ i.o}) = 0$ اثبات: تمرین کلاسی

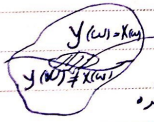
مثال: $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$ $\quad \mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{2,3,4,5\}, \{1\}\}$

P: $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ 0

$$X(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega = 2,3,4,5 \\ 1 & \omega = 1 \end{cases}$$

این متغیر تصادفی در تمام نقاط صفر است به جز $\omega = 1$ از نظر مفاهیم آنالیز می‌گوییم تابع صفر است اما حیطه احتمالاتی که در آن تفاوتی نمی‌توانیم بگوییم این تابع برابر صفر است اما حیطه احتمالاتی که در آن تفاوتی تابع صفر نیست صفر است می‌گوییم $X = 0$ a.s

مثال: فرض کنید X یک متغیر تصادفی در فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ است و داریم $X = Y$ a.s که Y یک تابع بروی Ω است آیا می‌توان نتیجه گرفت Y هم متغیر تصادفی بر این فضا است.



$\{Y(\omega) \le t\} \in \mathcal{F}$

$\forall t \in \mathbb{R} \quad \{\omega ; Y(\omega) \le t\} \in \mathcal{F}$?

Scanned with CamScanner

حال $X \overset{a.s.}{=} Y$ یعنی

$$\{\omega; X(\omega) \neq Y(\omega)\} \in \mathcal{F} \quad , \quad P(\{\omega; Y(\omega) \neq X(\omega)\}) = 0$$

$$P\{\omega; X(\omega) = Y(\omega)\} = 1 \quad , \quad \{X(\omega) = Y(\omega)\} \in \mathcal{F}$$ ← همچنین

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \{\omega; Y(\omega) \leq t\} = \{\omega; Y(\omega) \leq t, X(\omega) = Y(\omega)\}$$

$$\cup \{\omega; Y(\omega) \leq t, X(\omega) \neq Y(\omega)\}$$

① $\{\omega; \underbrace{X(\omega) \leq t}_{\in \mathcal{F}}\} \cap \underbrace{\{X(\omega) = Y(\omega)\}}_{\in \mathcal{F}} \in \mathcal{F}$

② $\{\omega; Y(\omega) \leq t\} \cup \{\omega; X(\omega) \neq Y(\omega)\}$

$$\subseteq \{\omega; Y(\omega) \neq X(\omega)\} \in \mathcal{F}$$

- نکته همارزی a.s. اهمارزی قوی می‌دهند.

Scanned with CamScanner

همگرایی در احتمال

X_n را برای از متغیر تصادفی

$$X_n \xrightarrow{P} X$$

تعریف:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$$

or $$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| < \varepsilon) = 1$$

(همگرایی ضعیف)

$$X_n \xrightarrow{a.s} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X$$

عکس همیشه برقرار نیست.

همگرایی در توزیع

فرض کنید F_n تابع توزیع X_n و F تابع توزیع X.

$$F_n \to F \quad \text{یعنی} \quad \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(t) = F_X(t)$$

یا $X_n \xrightarrow{d} X$

مثال. همگرایی در احتمال و همگرایی a.s را بررسی کنید.

$X_n \xrightarrow{a.s} 0$ $\quad$ $X_n \xrightarrow{P} 0$

$X_n(\omega)$	1	0
$P(X_n(\omega))$	$1/n$	$1-1/n$

$$P(\underbrace{|X_n - X| > \varepsilon}_{A_n}; i.o) = P(|X_n| > \varepsilon) \underset{\varepsilon>0}{=} P(X_n = 1) = \frac{1}{n}$$

($X_n = 1$ یا $X_n = 0$)

$$\sum P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \Rightarrow P(A_n; i.o) \neq 0$$

سری واگرا

$$\Rightarrow X_n \not\xrightarrow{a.s} 0$$

PqPCO

Scanned with CamScanner

Subject
Date

$$P(|X_n - 0| > \varepsilon) = 1/n$$

$$\lim_{n \to \infty} P(|X_n| > \varepsilon) = 0 \longrightarrow X_n \xrightarrow{P} 0$$

مثال ۲.

$X_n(\omega)$	0	1
$P(X_n(\omega))$	$1 - 1/n^2$	$1/n^2$

$X_n \xrightarrow{a.s.} 0$

$X_n \xrightarrow{P} 0$

$$P(|X_n(\omega) - 0| > \varepsilon; i.o) = P\{X_n = 1\} = 1/n^2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 < \infty \Rightarrow P(A_n; i.o) = 0$$

(همگرا — بورل کانتلی)

$1/n^p$ $p > 1$ → همگرا $\Rightarrow X_n \xrightarrow{a.s.} 0 \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} 0$

$1/n$ $p \le 1$ → واگرا

مثال ۳. ثابت کنید $Z_n \xrightarrow{d} \omega$ و $Y_n \xrightarrow{d} \omega$ آنگاه $Z_n \le X_n \le Y_n$

ثابت کنید $X_n \xrightarrow{d} \omega$

$$Z_n \le X_n \le Y_n \Rightarrow P(Y_n \le t) \le P(X_n \le t) \le P(Z_n \le t)$$

(حد چپ از راست بزرگتر نباشد)

$$\lim_{n \to \infty} F_{Y_n}(t) \le \lim_{n \to \infty} F_{X_n}(t) \le \lim_{n \to \infty} F_{Z_n}(t)$$

ω ω

$$\Rightarrow \lim F_{X_n}(t) = \omega \rightarrow X_n \xrightarrow{d} \omega$$

PAPCO

Scanned with CamScanner

Subject ۱۲۵
Date

شرط کنید $X_n \xrightarrow{d} c$ ثابت کنید $X_n \xrightarrow{p} c$

$$P(|X_n - c| > \varepsilon) = P(X_n < c-\varepsilon) + P(X_n > c+\varepsilon)$$

$$= F_{X_n}(c-\varepsilon) + 1 - F_{X_n}(c+\varepsilon)$$

$$X_n \xrightarrow{d} c = F_c(c-\varepsilon) + 1 - F_c(c+\varepsilon) = 0$$

$P(c \le (c-\varepsilon)) = 0$, $P(c \le (c+\varepsilon)) = 1$

$$\Rightarrow P(|X_n - c| > \varepsilon) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \Rightarrow X_n \xrightarrow{p} X$$

همگرایی ثابت کنید

$$X_n \xrightarrow{a.s} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{p} X$$

$$X_n \xrightarrow{a.s} X \; ; \; P(\omega ; X_n(\omega) \not\to X(\omega)\}) = 0$$

$$P(\omega ; \exists k \ge 1, \forall N, \exists n \ge N ; \underbrace{|X_n(\omega) - X(\omega)| \ge 1/k}_{E_{n,k}}) = 0$$

$$= P(\bigcup_k \bigcap_N \bigcup_{n \ge N} E_{n,k}) = 0$$

$$0 = P(\cup \cap \cup E_{n,k}) \ge P(\cap \cup E_{n,k}) \ge 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{P(\cap \cup E_{n,k}) = 0}_{(1)}$$

$$0 = 0 = \lim P(\bigcup_{n \ge N} E_{n,\varepsilon}) \ge \lim P(E_{n,\varepsilon}) \ge 0$$

$$\forall \varepsilon \quad \lim_{n \to \infty} P(E_{n,\varepsilon}) = 0 \to \lim_{n \to 0} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$$

$X_n \xrightarrow{P} X$

P4PCO

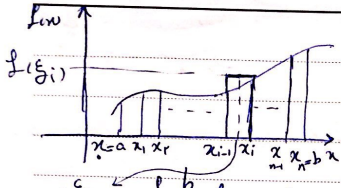
Scanned with CamScanner

Subject
Date

Expectation امید ریاضی

(مفصل و ریشه‌ای)

انتگرال ریمان



افرازی از بازه $[a,b]$ را در نظر بگیرید

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

$x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$

$x_i \longrightarrow x_n$

$\max \Delta x_i \longrightarrow 0$

انتگرال ریمان استیل-س

صعودی

$$\int_{A\subseteq R} f(x)\,dg(x)$$

امید ریاضی: در صورت وجود، انتگرال زیر با حد مجموع بالا برابر است و امید تعریف می‌شود

$$E(X) = \int_{\Omega} X\,dp = \lim \sum_i X(\omega_i)\,p(A_i)$$

انتگرال لبگ

$(\Omega, \mathcal{F}, p)$

که A_i افرازی از Ω به صورت $A_i \in \mathcal{F}$ (ظریف‌ترین افراز)

و X متغیر تصادفی روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ و $\omega_i \in A_i$

مثال. فرض کنید $\Omega = \{1,2,3,4\}$ و $\mathcal{F} = p(\Omega)$ و

(می‌دانیم مجموعه توانی ظریف‌ترین جبر روی یک مجموعه است)

$\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) = \omega$ $\quad E(X) = ?$

$$E(X) = \int_{\Omega} X\,dp = \sum_i \underbrace{X(\omega_i)}_{\omega_i}\, p(\{i\}) = \sum_{i=1}^{4} i\,p(\{i\})$$

PqPCO

Scanned with CamScanner

Subject
Date

ویژگی‌های امید ریاضی :

① if $X \geq 0 \Rightarrow E(X) \geq 0$ $\quad E(X) = \lim \sum X(\omega_i) P(A_i) > 0$ ($X(\omega_i) \geq 0$, $P(A_i) < 1$)

② $a, b \in R$; $E(aX+bY) = aE(X) + bE(Y)$ (X و Y متغیرهای تصادفی)

$E(aX+bY) = \lim \sum (aX(\omega_i) + bY(\omega_i)) P(A_i) = a \lim \sum X(\omega_i) P_{A_i} + b \lim \sum Y(\omega_i) P(A_i)$

③ if $X = C \Rightarrow E(X) = C$

$E(X) = \lim \sum C\, P(A_i) = C \lim \sum P(A_i) = C \lim P(\cup A_i) = C$ ($\cup A_i = \Omega$ اندازه‌ی فضای نمونه)

④ if $X \leq Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y)$

$X \leq Y \rightarrow Y - X \geq 0 \xrightarrow{①} E(Y-X) \geq 0 \xrightarrow{②} E(Y) - E(X) \geq 0$

در حالت پیوسته، $E(X) = \int_{\Omega} X \, dP$ ، برعبارت دیگر امید ریاضی یک انتگرال است و برای ویژگی‌های بیشتر امید ریاضی با دو $E(X)$ مرحله تعریف می‌کنیم :

مرحله اول : X تابع ساده باشد (ص ۱۱۹-۱۲ رزنیک)

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^{n} a_i I_{A_i}(\omega)$$

(a_i ها اعدادی از Ω)

امید ریاضی را امید I_{A_i} تعریف می‌کنیم $E(I_{A_i}) = P(A_i)$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} a_i P(A_i)$$

تعریف می‌شود و بسادگی ویژگی‌های بالا ثابت می‌شود.

① if $X \geq 0$, $E(X) \geq 0$ ② X و Y ساده $\rightarrow E(aX+bY)$

تابع ساده‌ای مجموع دو تابع ساده‌ای =

Scanned with CamScanner

Subject

Date

② $E(aX+bY)=?$

$$X=\sum_{i=1}^{n} a_i I_{A_i} \qquad Y=\sum_{j=1}^{m} b_j I_{B_j}$$

$C_{ij}=A_i\cap B_j$: متقدیر می‌کنیم

$$aX+bY=\sum_i\sum_j (aa_i+bb_j) I_{C_{ij}}$$

$$E(aX+bY)=\sum_i\sum_j (aa_i+bb_j) P(C_{ij})$$ پس از تعریف

$$=\sum_i\sum_j a a_i P(A_i\cap B_j)+\sum_i\sum_j b b_j (P(A_i\cap B_j))$$

$$=a\sum_i a_i \underbrace{\sum_j P(A_i\cap B_j)}_{\text{بنابراین } P(A_i)}+b\sum_j b_j \underbrace{\sum_i P(A_i\cap B_j)}_{\text{بنابراین } P(B_j)}$$

$$=a\sum_i a_i P(A_i)+b\sum_j b_j P(B_j)=aE(X)+bE(Y)$$

③ $X=C \to X=C I_{\Omega} \to E(X)=C P(\Omega)+0\cdot P(\phi)=C$

$\quad\quad\quad

مرحله دوم: فرض کنید X تابع نامنفی

یک قضیه داریم: قضیه ۱: فرض کنید X یک متغیر تصادفی نامنفی در $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ باشد و X_n ها دنباله‌ای صعودی از متغیرهای تصادفی ساده نامنفی که $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ وجود دارد به صورتی که X_n (اثبات: رضا ۲۱۰ یا ص ۱۱۸ رزتیک)

سپس مرحله دوم:

$\exists X_n \geq 0$ ساده، $X \geq 0$، $X_n \uparrow X$

$$E(X) = \lim_{n\to\infty} E(X_n)$$

در حالت تعریف امید ریاضی X_n ساده و مثل مرحله اول

برای بررسی خوش تعریفی امید ریاضی در این مرحله یعنی برابری با حد اول این مطلب:

$\exists X_n \uparrow X \rightarrow E(X) = \lim_{n\to\infty} E(X_n)$

if $\exists Y_n \uparrow X \rightarrow E(X) = \lim_{n\to\infty} E(Y_n)$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} E(X_n) = \lim_{n\to\infty} E(Y_n)$

قضیه زیر را داریم:

قضیه ۲: فرض کنید X یک متغیر تصادفی نامنفی در $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ باشد و X_n ها دنباله‌ای صعودی از متغیرهای تصادفی ساده نامنفی که

Scanned with CamScanner

X صدق می‌کند و Y یک متغیر تصادفی ساده است به طوری که $Y \le X$

آن‌گاه $E(Y) \le \lim_{n\to\infty} E(X_n)$

$X_n \uparrow X$, $X_n \ge 0$ $X \ge 0$
$Y \le X$ (Y ساده)
$\Rightarrow E(Y) \le \lim_{n\to\infty} E(X_n)$ (خاصیت مقعر)

اثبات: A_n را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$\forall \varepsilon > 0 \quad A_n = \{\omega ; X_n(\omega) \ge Y(\omega) - \varepsilon\}$

$A_n = \{X_n \ge Y - \varepsilon\}$ افرازی از A_n

$X_n \uparrow \Rightarrow A_n \uparrow \Rightarrow \lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup A_n = \Omega$

$\lim_{n\to\infty} A_n^c = \phi$

از طرفی می‌توان تعریف کرد:

$X_n \ge (\underbrace{Y}_{\text{ساده}} - \underbrace{\varepsilon}_{>0}) \underbrace{I_{A_n}}_{\text{ساده}}$

$\Rightarrow E(X_n) \ge E(Y-\varepsilon, I_{A_n})$ (طبق مرحله اول)

$= E(Y I_{A_n}) - E(\varepsilon I_{A_n})$ (خطی در مرحله اول)

$= E(Y I_{A_n}) - \varepsilon P(A_n)$ ($E E(I_A) = P(A_n)$)

$\Rightarrow E(X_n) \ge E(Y I_{A_n}) - \varepsilon P(A_n)$

Scanned with CamScanner

Subject
Date

از طرفی هر متغیر تصادفی را می‌توان به صورت

$$Y = Y I_{A_n} + Y I_{A_n^c} \longrightarrow Y I_{A_n} = Y - Y I_{A_n^c}$$

بنابراین

$$E(X_n) \geq E(Y) - E(Y I_{A_n^c}) - \varepsilon$$

فرض کنید $M = \sup Y$

$$\geq E(Y) - E(M I_{A_n^c}) - \varepsilon \qquad Y \leq M \Rightarrow E(Y) \leq E(M)$$

$$= E(Y) - M P(A_n^c) - \varepsilon$$

$$\Rightarrow E(X_n) \geq E(Y) - M P(A_n^c) - \varepsilon$$

$$\xrightarrow{\text{از طرفین لیم}} \lim E(X_n) \geq E(Y) - M \lim_{n\to\infty} P(A_n^c) - \varepsilon$$

(A_n صعودی $\to A_n^c$ نزولی $\to \lim P(A_n^c) = P(\lim A_n^c) = P(\phi) = 0$)

$A_n \uparrow \Omega \to A_n^c \downarrow \phi$ ($n \to \infty$)

$\cup A_n = \Omega \quad \cap A_n^c = \phi$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} E(X_n) \geq E(Y) - \underbrace{\varepsilon}_{>0} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} E(X_n) \geq E(Y)$$

نتیجه: هرچند تا از توابع ساده پیدا کنیم که X حد یکنواخت آن‌ها باشد

هم ارند

$X_n \uparrow X$, ساده, ≥ 0

$Y_n \uparrow X$, ساده, ≥ 0

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} E(X_n) = \lim_{n\to\infty} E(Y_n)$

Scanned with CamScanner

Subject
Date

$X_n \le X$, $Y_n \uparrow X$ $\Rightarrow$ طبق قضیه $\Rightarrow E(X_n) \le \lim_{n\to\infty} E(Y_n)$

$(\lim E(X_n) \le \lim E(Y_n))$

$Y_n \le X$, $X_n \uparrow X$ $\Rightarrow$ طبق قضیه $\Rightarrow E(Y_n) \le \lim_{n\to\infty} E(X_n)$

$\lim E(Y_n) \le \lim E(X_n)$

حیله

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} E(X_n) = \lim_{n\to\infty} E(Y_n)$$

(خوش تعریفی امید ریاضی)

- پس از اثبات خوش تعریفی امید ریاضی در مرحله دوم و بررسی دو ویژگی به تعریف امید ریاضی می‌پردازیم:

اگر X یک متغیر تصادفی نامنفی باشد و $\{X_n\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی ساده و نامنفی باشد که $X_n \uparrow X$ آنگاه

$$E(X) = \lim_{n\to\infty} E(X_n)$$

که در آن X_n دنباله‌ای صعودی از متغیرهای تصادفی ساده و نامنفی است که X را تقریب می‌کند.

- ویژگی‌های امید ریاضی:

Scanned with CamScanner

Subject
Date

فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی نامنفی باشند که گام‌ها

۱) $X \geq 0 \quad E(X) \geq 0$

۲) $E(aX+bY) = aE(X)+bE(Y) \quad a,b \in R, a,b \geq 0$

۳) $X = c \rightarrow E(X) = c$

۴) $X \leq Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y)$ (۱ و ۲ و ۳ به عهده دانشجو)

اثبات ۲) فرض کنید X نامنفی است پس دنباله صعودی X_n وجود دارد که X_n ساده

X نامنفی $\quad X_n \uparrow X \Rightarrow E(X) = \lim_{n\to\infty} E(X_n)$

Y نامنفی $\quad Y_n \uparrow Y \Rightarrow E(Y) = \lim_{n\to\infty} E(Y_n)$

$\Big\}$ نامنفی $\rightarrow aX_n + bY_n \uparrow aX+bY$

$$E(aX+bY) = \lim_{n\to\infty} E(aX_n+bY_n)$$

(Y_n, X_n ساده اند پس جمله دوم جمله اول)

$$\lim_{n\to\infty}(aE(X_n)+bE(Y_n)) = a\lim_{n\to\infty} E(X_n) + b\lim_{n\to\infty} E(Y_n)$$

$$= aE(X)+bE(Y)$$

اثبات ۴) $X \leq Y \Rightarrow Y-X \geq 0$ ($Y-X$ نامنفی)

$\exists$ متغیر $Y_n - X_n \uparrow Y-X$ ($Y_n - X_n$ ساده و ≥ 0)

$\Rightarrow Y_n - X_n \geq 0 \Rightarrow Y_n \geq X_n$

$0 \leq \lim E(Y_n - X_n) = E(Y-X)$ (≥ 0)

(تعریف $\lim$ و خاصیت ۲ و جمله اول)

$0 \leq \lim E(Y_n) - \lim E(X_n)$

$\Rightarrow E(Y) \geq E(X)$ (مرتب)

PQPCO

Scanned with CamScanner

مرحله سوم: در این مرحله X دلخواه است پس هر تابع بورل دلخواه را می توان در

صورت تفاضلی از دو تابع نامنفی نوشت:

$$X = X^+ - X^- \quad ; \quad X^+ = \max\{X, 0\}$$
$$X^- = \max\{-X, 0\}$$

مثبت X با علامت +

$X = \begin{cases} -2 & X^+ = 0\ 1\ 2 \\ -1 & X^- = 2\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{cases}$

تعریف: $E(X) = E(X^+) - E(X^-)$

اگر $E(X^+)$ و $E(X^-)$ موجود نباشد $\Leftarrow$ $E(X)$ مبهم

پس $E(X)$ در صورتی وجود دارد که $E(|X|) < \infty$ یعنی

$$|X| = X^+ + X^-$$

پس زمانی $E(X^-) < \infty$ ، $E(X^+) < \infty \subset E(|X|) < \infty$

و هنگامی که $E(|X|) < \infty$ می گوییم X انتگرال پذیر است.

اثبات در کتاب برزیک صفحه ۱۲۶ تا ۱۳۰

لم فاتو: فرض کنید $\{X_n\}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی نامنفی باشد $X_n \geq 0$

حال می گوییم دنباله در این صورت

$$E(X) \leq \liminf E(X_n)$$

یعنی $E(\liminf X_n) \leq \liminf E(X_n)$

PqPCO

Scanned with CamScanner

Subject
Date

نتیجه: اگر $\{X_n\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی محدود به یک متغیر تصادفی باشد

با استفاده از شرط کران لبگ داریم

$$E(\underline{\lim} X_n) \le \underline{\lim} E(X_n) \le \overline{\lim} E(X_n) \le E(\overline{\lim} X_n)$$

(اثبات قضیه همگرایی تحدیدی)

اثبات هم ارز: فرض کنید $X \le Y$ یک متغیر تصادفی ساده نامنفی باشد و

تعریف کنیم $Y_n = \inf_{m \ge n} X_m$ سپس Y_n صعودی و به X میل می‌کند

یعنی $Y_n \uparrow X$ دنباله ای از متغیرهای صعودی نامنفی است پس

$Y_1 = \inf\{X_1, X_2, \dots\}$ $Y_2 = \inf\{X_2, X_3, \dots\}$ $\lim_{n\to\infty} Y_n = \lim_{n} \inf_{m \ge n} X_m = \lim_{m\to\infty} X_m = X$

$\dots$ $Y_n = \inf\{X_n, X_{n+1}, \dots\}$

$\forall \varepsilon > 0$ $X_n \ge Y_n \ge (Y - \varepsilon)\, I_{(Y_n \ge Y - \varepsilon)}$

$Y_n \uparrow X$, $Y \le X$

$\lim A_n$

$\lim$

بالاستفاده از خاصیت :

$$\Rightarrow E(X_n) \ge E(Y_n) \ge E\{(Y-\varepsilon) I_{\{Y_n \ge Y-\varepsilon\}}\}$$

$$= E(Y I_{\{Y_n \ge Y-\varepsilon\}}) - \varepsilon \underbrace{P(Y_n \ge Y-\varepsilon)}_{\le 1}$$

$Y = Y I_{A_n} + Y I_{A_n^c}$ $\quad A_n = \{\omega ; Y_n(\omega) \ge Y - \varepsilon\}$

$\lim A_n = \bigcup A_n = \Omega$

$\lim A_n^c = \phi$

$$\ge E(Y) - E(Y I_{\{Y_n < Y-\varepsilon\}}) - \varepsilon$$

$$\ge E(Y) - M P(Y_n < Y - \varepsilon) - \varepsilon \qquad M = \sup Y$$

PAPCO

Scanned with CamScanner

(۴۱)

Subject

Date

$$\Rightarrow E(X_n) \geq E(Y) - MP(Y_n < Y - \varepsilon) - \varepsilon$$

Y_n کوچکتر از Y

$$\lim E(X_n) \geq E(Y) - MP(\lim\{Y_n < Y - \varepsilon\}) - \varepsilon$$

نزولی ← صفر

$$\Rightarrow \lim E(X_n) \geq E(Y) - \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon > 0}$$

$$E(Y) \leq \lim E(X_n)$$

سمت تابع جاودید یک

$$\text{if } Y \leq X \xrightarrow{X_n \to X} E(Y) \leq \lim E(X_n) \quad (I)$$

ساده و نامنفی

وجود دارد دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی ساده نامنفی که X صدق می‌کند (قضیه)

$$Z_m \uparrow X \xrightarrow{\forall m} Z_m \leq X \longrightarrow \forall m \; E(Z_m) \leq \lim E(X_n)$$

ساده و نامنفی

از طرفین سمت m حدگیری

$$\lim_{m \to \infty} E(Z_m) \leq \lim E(X_n)$$

$$E(X) \leq \lim E(X_n)$$

نتیجه: اگر X_n دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی نامنفی باشد در $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$$E(\lim X_n) \leq \lim E(X_n)$$

Scanned with CamScanner

Subject
Date

$X_n \geq 0$ $\quad \liminf X_n = \sup_{n\geq 1} \inf_{k\geq n} X_k$

مرادی دهم $\quad \{y_n\}$ دنباله از متغیرهای تصادفی نامنفی $\quad y_n = \inf_{k} X_k$

$\sup y_n = \lim y_n$ وصعودی است پس

$\Rightarrow \liminf X_n = \lim y_n$

~~$E(X) \leq \liminf E(X_n)$~~ $X_n \uparrow X$ داریم نامنفی اگر

لم فاتو

$E(\liminf X_n) = E(\lim y_n) \leq \liminf E(y_n) \leq \liminf E(X_n)$

$y_n \leq X_n$

قضیه MCT : (برای جابجایی حد و انتگرال ریمانی یا حد و انتگرال)

فرض کنید $\{X_n\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی صعودی و نامنفی باشد.

$\lim_{n\to\infty} E(X_n) = E(\lim_{n\to\infty} X_n)$ در آن صورت (وجود دارد)

خلاصه $\quad (X_n \geq 0,\ X_n \uparrow X \Rightarrow E(X) = \lim_{n\to\infty} E(X_n))$

$\liminf X_n = \lim X_n$ ، $\lim X_n = X$ صعودی پس حد وجود دارد و

$X_n \leq \liminf X_n$ $\quad$ چون X_n صعودی است پس $\quad \inf_{k\geq n} X_k = \sup X_n$

$\rightarrow E(X_n) \leq E(\liminf X_n) \xrightarrow{\text{از طرفین حد}} \liminf E(X_n) \leq E(X)$ ①

از طرفی طبق لم فاتو چون X_n نامنفی اند داریم

$E(\liminf X_n) \leq \liminf E(X_n)$

PdPCO

Scanned with CamScanner

Subject
Date

$E(\lim_{n\to\infty} X_n) \le \lim_{n\to\infty} E(X_n)$ میدونستیم X_n حد داره پس

$E(X) \le \lim E(X_n)$ ②

①, ② $\lim E(X_n) \le \overline{\lim} E(X_n) \le E(X) \le \underline{\lim} E(X_n) \le \lim E(X_n)$

$\Rightarrow E(X) = \lim_{n\to\infty} E(X_n)$

قضیه DCT: فرض کنید X_n متغیری تقاضی باشند و $X_n \to X$ آنگاه $|X_n| \le Y$ که $EY < \infty$

$E(X_n) \to E(X)$ یا $\lim_{n\to\infty} E(X_n) = E(\lim_{n\to\infty} X_n) = E(X)$

اثبات: $(X_n + Y \ge 0 \; , \; Y - X_n \ge 0)$ یعنی $-Y \le X_n \le Y$

~~$\overline{\lim} X_n = \sup_n \inf_{k\ge n} X_k = \sup_n Y_n$~~

$E(X) = E(\lim_{n\to\infty} X_n) = E(\overline{\lim} X_n) \overset{\text{فتو}}{\ge} \overline{\lim} E(X_n) \overset{②}{\ge}$

$\overline{\lim} E(X_n) \overset{①}{\ge} E(\overline{\lim} X_n) = E(X)$

① $E(X) \le \underline{\lim} E(X_n)$
② $E(X) \ge \overline{\lim} E(X_n)$
$\Big\} E(X) = \lim E(X_n)$

$\Rightarrow$

$E(X) \le \overline{\lim} E(X_n)$
$E(X) \ge \underline{\lim} E(X_n)$
$\Big\} E(X) = \lim E(X_n)$

PAPCO

$E(X) = \overline{\lim} E(X_n) = \underline{\lim} E(X_n) = \lim E(X_n)$

Scanned with CamScanner

Subject
Date

قضیه. X متغیر تصادفی بر $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ آنگاه $E(X)<\infty$

$$P_X : B(R) \to [0,1] \qquad E(X) = \int_R x \, dP_X(x)$$

که در آن P_X اندازه احتمالی است که بر مجموعه X و P روی Ω عمل می‌کند.
بورل بدون وجود آمد:

اثبات. قضیه را در حالت کلی ثابت می‌کنیم یعنی فرض کنید $h : R \to R$

$$E(h(X)) = \int_R h(x) \, dP_X(h(x)) \quad \Leftarrow \quad E(h(X)) < \infty$$

در سه حالت بررسی می‌کنیم (به عهده دانشجو)

① h تابع ساده ② h تابع نامنفی ③ h تابع دلخواه

فرض کنید h تابعی ساده و به صورت $h(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i I_{B_i}(x)$ باشد

$$E(h(X)) = \int_\Omega h(x) \, dP = \int_\Omega \sum_i a_i I_{B_i}(x) \, dP$$

$$= \sum_i a_i E(I_{B_i}(X)) = \sum_i a_i P(X \in B_i)$$

$$= \sum a_i P(X^{-1}(B_i)) = \sum a_i P_X(B_i) = \int_R \sum a_i I_{B_i}(x) \, dP_X(x)$$

(R, B(R)) تعریف می‌شود P_X اندازه‌ای است که روی

② فرض کنیم h تابع نامنفی باشد. دنباله‌ای از توابع ساده و نامنفی h_n موجود است که $h_n \to h$

$$\int_\Omega h(x) \, dP = \int_\Omega \lim h_n(x) \, dP \overset{MCT}{=} \lim \int_\Omega h_n(x) \, dP$$

$$\overset{\text{تابع ساده}}{=} \lim \int_R h_n(x) \, dP_X(x) \overset{MCT}{=} \int \lim h_n(x) \, dP_X(x)$$

$$= \int_R h(x) \, dP_X(x)$$

③ فرض کنیم h تابع دلخواه باشد. $h = h^+ - h^-$ که $h^+, h^- \geq 0$

$$\int_\Omega h(x) \, dP = \int_\Omega h^+(x) \, dP - \int_\Omega h^-(x) \, dP \overset{②}{=} \int_R h^+(x) \, dP_X(x) - \int_R h^-(x) \, dP_X(x)$$

$$= \int (h^+(x) - h^-(x)) \, dP_X(x) = \int h(x) \, dP_X(x)$$

P4PCO

Scanned with CamScanner

Subject
Date

قضیه. X متغیر تصادفی در فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$،

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \, dF_X(x)$$

اثبات. فرض کنید $g: R \to R$ تابع اندازه‌پذیر بورل باشد،

$$E(g(X)) < \infty$$

ثابت می‌کنیم

$$\int_R g(x) \, dP_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \, dF_X(x)$$

① ابتدا فرض کنیم g تابع ساده باشد $g(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i I_{A_i}(x)$ پس داریم

$$\int g(x) \, dP_X(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \int I_{A_i}(x) \, dP_X(x)$$

$$= \sum a_i \, P(X \in A_i) = \sum a_i P_X(A_i)$$

$$= \sum a_i \int_{A_i} dF_X(x) = \sum a_i \int I_{A_i} \, dF_X(x)$$

$$= \int g(x) \, dF_X(x)$$

② اگر g تابع نامنفی باشد پس طبق قضیه دنباله صعودی توابع ساده نامنفی g_n هست که $g_n \to g$ پس داریم

$$\int g(x) \, dP_X(x) = \int \lim_{n \to \infty} g_n(x) \, dP_X(x) \overset{MCT}{=}$$

$$\lim_{n \to \infty} \int g_n(x) \, dP_X(x) = \lim_{n \to \infty} \int g_n(x) \, dF_X(x)$$

$$\overset{MCT}{=} \int \lim_{n \to \infty} g_n(x) \, dF_X(x) = \int g(x) \, dF_X(x)$$

P4PCO

Scanned with CamScanner

Subject
Date

به همین ترتیب g تابع دلخواه با شرط حکم برقرار است $g = g^+ - g^-$

فضای L^p: $E(|X|^p) < \infty$ در رابطه صدق کند $d(X,Y) = (E|X-Y|^p)^{1/p}$

$d(X,Y) \geq 0$, $d(X,Y) = 0 \Rightarrow X = Y$

$d(X,Y) = d(Y,X)$ و $d(X,Z) = d(X,Y) + d(Y,Z)$

$L^p = \{X ; E|X|^p < \infty\}$: L^p فضای

$X \in L^p, Y \in L^p \Rightarrow X+Y \in L^p$ فضای خطی

فضای نرمدار ← فضای نرم دار

$X, Y \in L^p$.

تعریف همگرایی L^p: $X_n \xrightarrow{L^p} X \Rightarrow E(|X_n - X|^p) \to 0$

$\|X\|_p = (E|X|^p)^{1/p}$ با شرط صدق کند

$\lim E(|X_n - X|^p) = 0$

$\|X\|_p \geq 0$, $\|X\|_p = 0 \Rightarrow X = 0$

$\|X+Y\|_p \leq \|X\|_p + \|Y\|_p$

$\|\lambda X\|_p = |\lambda| \|X\|_p$

قضیه: ثابت کنید اگر $X_n \xrightarrow{L^p} X$ آنگاه $X_n \xrightarrow{P} X$

نامساوی مارکف: اگر X یک متغیر نامنفی باشد

$\forall g \uparrow 0 \quad a > 0$

$$P(g(X) > a) \leq \frac{E(g(X))}{a}$$

$X_n \xrightarrow{L^p} X \Rightarrow \lim_{n \to \infty} E(|X_n - X|^p) = 0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$

با توجه به نامساوی مارکف

$$P(|X_n - X| > \varepsilon) = P(|X_n - X|^p > \varepsilon^p) \leq \frac{E(|X_n - X|^p)}{\varepsilon^p}$$

$$0 \leq \lim_{n \to \infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) \leq \lim_{n \to \infty} E\left(\frac{|X_n - X|^p}{\varepsilon^p}\right) = 0$$

Scanned with CamScanner

$X_n \xrightarrow{a.s} X$, $Y_n \xrightarrow{a.s} X$ $\Big\} \rightarrow X_n + Y_n \xrightarrow{a.s} X+Y$, $X_n Y_n \xrightarrow{a.s} XY$, $\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{a.s} \frac{X}{Y}$

$$X_n \xrightarrow{a.s} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X$$

$$X_n \xrightarrow{L^p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X$$

$$X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X$$

$$X_n \xrightarrow{d} c \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} c$$

$X_n \xrightarrow{a.s} X$, $a.s \rightarrow P$, $L^p \rightarrow P$

~~$E(X_n) \to E(X)$~~

اگر $|X_n| < y$, $E|Y| < \infty$, $X_n \xrightarrow{a.s} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{L^1} X$

$X_n \xrightarrow{a.s} X \not\Rightarrow X_n \xrightarrow{L^p} X$ (نزدیک)

$X_n \xrightarrow{P} X$ وجود دارد $\Rightarrow X_{n'} \xrightarrow{a.s} X$ (زیردنباله)

تمرین:

$X_n \uparrow$ (صعودی) (X_n دنباله‌ای صعودی) $X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{a.s} X$ (اثبات)

$X_n \xrightarrow{P} X \rightarrow X_{n'} \xrightarrow{a.s} X$

$X_n \uparrow$ یعنی X_n صعودیات و هر زیردنباله‌ای یکبار خدا می‌خواهد همگرا شود

$X_n \xrightarrow{P} X$

$X_n \uparrow$ $\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$

$X_n \uparrow \Rightarrow P(\lim |X_n - X| > \varepsilon) = 0 \Rightarrow P(\lim_{n\to\infty} |X_n - X| > \varepsilon) = 0$

$\{X_n\} \uparrow \Rightarrow \{|X_n - X|\} \downarrow$ $\Sigma P(|X_n - X| < \infty)$

$X_n \xrightarrow{a.s}$ مستقل می‌کند

اولین باب حدیث که گفتیم رفت.

$X_n \xrightarrow{L^p} X$, $X_n \xrightarrow{L^p} Y \Rightarrow X = Y$ (تمرین: اول ثابت شود)

$$E(|X-Y|^p) = E(|X - X_n + X_n - Y|^p)$$

(نامساوی مینکوفسکی صفحه ۱۰۵)

$$\leq (E|X_n - X|^p + E|Y_n - Y|^p)^{\frac{1}{p}}$$

$\to 0$ $\to 0$

$$\Rightarrow 0 \leq E(|X-Y|^p) \leq 0 \Rightarrow \|X-Y\| = 0$$

$$\Rightarrow X = Y \text{ a.s}$$

Scanned with CamScanner

Subject
Date

$\sup E(X_n) = k < \infty$ ، $0 \le X_n \to X$ ... $0 \le X_n$

$X \in L^1$ ، $E(X) \le k$

$0 \le X_n \Rightarrow E(\liminf X_n) \le \liminf E(X_n)$ ...

$\Rightarrow E(\lim_{n\to\infty} X_n) \le \liminf E(X_n) \le \limsup E(X_n)$ ... X_n

$\Rightarrow E(X) \le \inf_k \sup_{n>k} E(X_n) \le \sup_{n>k} E(X_n)$

$\Rightarrow E(X) \le \sup E(X_n) = k < \infty \Rightarrow E(X) < \infty$

$X \in L^1$ ، $E(|X|) < \infty$ ... X ...

$X \overset{a.s}{=} Y$ ... $X_n \xrightarrow{P} X$ ... $X_n \xrightarrow{P} Y$

$P(X \neq Y) = P(|X-Y| > \varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0$

$|X - X_n + X_n - Y| \le |X - X_n| + |Y - X_n|$

$\Rightarrow P(|X - X_n + X_n - Y| > \varepsilon) \le P(|X - X_n| > \varepsilon/2)$

$[|X - X_n| + |Y - X_n| > \varepsilon] \subset [|X - X_n| > \varepsilon/2] \cup [|X_n - Y| > \varepsilon/2]$

$+ P(|Y - X_n| > \varepsilon/2)$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(X \neq Y) \le \lim_{n\to\infty} P(|X - X_n| > \varepsilon/2) + \lim_{n\to\infty} P(|Y - X_n| > \varepsilon/2)$

$0 \le \quad \cdots \quad \le 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(X \neq Y) = 0$

$P(X \neq Y) = 0 \Rightarrow P(X = Y) = 1 \Rightarrow X \overset{a.s}{=} Y$

P4PCO

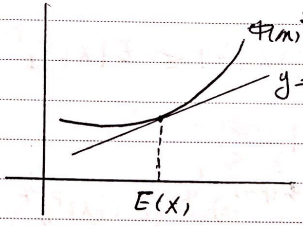
Scanned with CamScanner

Subject
Date

نامساوی جنسن (Jensen)

$$\Phi(E(X)) \le E(\Phi(X))$$

Φ تابع محدب باشد:



$$\Phi(E(X)) = aEX + b \quad (1)$$

$$\Phi(X) \ge aX + b$$

$$E(\Phi(X)) \ge aEX + b \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow E(\Phi(X)) \ge \Phi(E(X))$$

نامساوی هولدر:

$$E|XY| \le (E|X|^p)^{1/p} (E|Y|^q)^{1/q} \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

برای اثبات از نامساوی یانگ استفاده می‌کنیم

$a, b > 0$ $\quad ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$

$$a = \frac{|X|}{(E|X|^p)^{1/p}} \qquad b = \frac{|Y|}{(E|Y|^q)^{1/q}}$$

$$ab = \frac{|XY|}{E(|X|^p)^{1/p}\, E(|Y|^q)^{1/q}}$$

$$\le \frac{|X|^p}{p E|X|^p} + \frac{|Y|^q}{q E|Y|^q}$$

$$\Rightarrow \frac{E|XY|}{(E|X|^p)^{1/p}(E|Y|^q)^{1/q}} \le \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

PqPCO

نامساوی هولدر ⇐

Scanned with CamScanner

Subject
Date

۲۵-۱

۱- نامساوی مینکوفسکی

$$E(|X+Y|^p)^{1/p} \le (E|X|^p)^{1/p} + (E|Y|^p)^{1/p}$$

$$E|X+Y|^p = E|X+Y|^{p-1}|X+Y| \le E|X+Y|^{p-1}|X|$$

$$+ E|X+Y|^{p-1}|Y| \qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \Rightarrow p+q=pq$$

$$\le (E(|X+Y|^{q(p-1)})^{1/q} (E(|X|^p))^{1/p}$$

$$+ (E(|X+Y|^{q(p-1)})^{1/q} (E(|Y|^p)^{1/p}$$

$$= (E|X+Y|^p)^{1/q} [(E|X|^p)^{1/p} + (E|Y|^p)^{1/p}]$$

$$1-1/q = 1/p$$

$$\Rightarrow (E(|X+Y|^p)^{1/p} \le (E|X|^p)^{1/p} + (E|Y|^p)^{1/p}$$

تمرین ثابت کنید:

$$|a+b|^p \le 2^p(|a|^p + |b|^p)$$

$$|a+b| \le |a|+|b| \le 2c \qquad c = \max\{|a|,|b|\}$$

$$|a+b|^p \le 2^p c^p \qquad c^p = |a|^p \text{ یا } |b|^p$$

$$\Rightarrow c^p \le |a|^p + |b|^p$$

Scanned with CamScanner

Subject

Date

- مطلقاً پیوستگی و رادون نیکودیم

تعریف کنید

$$\mu^*(A) = P^*(A) = \int_A X \, dP$$

μ^* یک اندازه است به ازای هر $A \in \mathcal{F}$

μ^* مطلقاً پیوسته نسبت به P است هرگاه

$$\forall A \in \mathcal{F} \quad P(A) = 0 \iff \mu^*(A) = 0$$

μ^* نسبت به P مطلقاً پیوسته: $\mu^* \ll P$

قضیه رادون نیکودیم:

فرض کنید در فضای $(\Omega, \mathcal{F})$ دو اندازه P_1 و P_2 داریم، P_2 نسبت به P_1 مطلقاً پیوسته است یعنی $P_2 \ll P_1$ آن گاه متغیر تصادفی نامنفی و یکتای Z وجود دارد (a.s) به طوری که

$$\forall A \in \mathcal{F} \quad P_2(A) = \int_A Z \, dP_1$$

مشتق رادون - نیکودیم

$$\frac{dP_2}{dP_1} = Z$$

مثال: $X: (\Omega, \mathcal{F}, P) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_X)$

$P_X(A) = P(X^{-1}(A))$ ،

$F_X(t) = P_X(-\infty, t]$ if $P_X \ll \lambda$

تابع توزیع متغیر تصادفی پیوسته نسبت به اندازه لبگ ← $P_X = 0$ ← طول بازه

P4PCO

Scanned with CamScanner

Subject
Date

$$P_X(-\infty, t] = F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\, d\underbrace{\lambda(x)}_{\lambda} = \int_{-\infty}^{t} f(x)\, dx$$

$$\frac{dF_X(t)}{dx} = f(x) \longrightarrow \text{تابع چگالی}$$

و بعد متغیر تصادفی پیوسته تعریف می‌شود: متغیری است که اندازه‌ای برای

روی کلاس میدان $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ دست می‌کند نسبت به اندازه لبگ مطلقاً پیوسته

باشد مشتق رادون نیکودیم همان تابع چگالی است.

مثال: فرض کنید $P_i \ll P$ ، $i = 1, 2, \dots$ دنباله ثابت

کنید اگر $\alpha_i \geq 0$ ، $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ و به‌ازای $\sum \alpha_i P_i \ll P$

$$\frac{d(\sum \alpha_i P_i)}{dP} = \sum \alpha_i \frac{dP_i}{dP}$$

اثبات: فرض کنید $\forall A \in \mathcal{F}; P(A) = 0$ چون $P_i \ll P$ پس $P_i(A) = 0$

و در نتیجه $\sum \alpha_i P_i(A) = 0$ پس $\sum \alpha_i P_i(A) \ll P$.

$$P_i \ll P \rightarrow \exists X \geq 0 \;\; P_i(A) = \int_A X\, dP \quad \forall A \in \mathcal{F} \qquad (1)$$

طبق قضیه رادون نیکودیم داریم $X = \frac{dP_i}{dP}$ (2) رابطه 1 را در α_i ضرب

و سپس می‌گیریم (3) $\sum \alpha_i P_i(A) = \int_A \sum \alpha_i X\, dP$

اکنون طبق قضیه رادون نیکودیم در رابطه (3):

$$\sum \alpha_i X = \frac{d \sum \alpha_i P_i}{dP}$$

$$\Rightarrow \sum \alpha_i \frac{dP_i}{dP} = \frac{d(\sum \alpha_i P_i)}{dP}$$

PAPCO

Scanned with CamScanner

Subject
Date

حال نگاهی از راه دور بیندازیم:

امید ریاضی شرطی.

$$X:(\Omega,\mathcal{F},P)\to(R,\mathcal{B}(R),P_X)$$

$$E(|X|)<\infty \qquad \mathcal{G}\subset\mathcal{F}$$

$$E(X|\mathcal{G})\ \searrow$$

متغیر تصادفی باید تکه‌ای زیر است.

① نسبت به پیشامدهای $\mathcal{G}$ است

$$\forall A\in\mathcal{G}\ ;\ \int_A X\,dP=\int_A \underbrace{E(X|\mathcal{G})}_{Z}\,dP \quad ②$$

$$E(XI_A)=E(ZI_A) \quad ③$$

$$A\in\mathcal{G}\quad Q(A)=\int_A X\,dP \qquad Q\ll P$$

$$\frac{dQ}{dP}=Z \qquad Q(A)=\int_A Z\,dP=\int_A X\,dP$$

پس $E(X|\mathcal{G})$ مشتق رادون نیکودیم است

Scanned with CamScanner