توزیع های پیوسته :

در این مبحث برخی از توزیع های استاندارد پیوسته که بیشتر مورد استفاده قرار می گیرند، بیان می شود

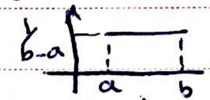
توزیع یکنواخت پیوسته

فرض کنید a و b ، $a<b$ دو عدد حقیقی ثابت و نامعلوم باشند آن گاه X دارای توزیع یکنواخت پیوسته است اگر دارای تابع چگالی احتمال

احتمال اینکه x در بازه a و b چقدر است؟ $= \frac{1}{b-a}$

متقارن است
فاقد چولگی است
میانه، میانگین و مد برابرند

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \qquad a<x<b$$

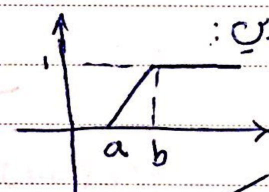


باشد و با نماد $X \sim U(a,b)$ یا $X \sim \text{uniform}$ نشان می دهند. تابع توزیع این متغیر :

$$F_X(x) = P(X \le x) = \int_a^x \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}[x]_a^x = \frac{x-a}{b-a}$$

بنابراین :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x<a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \le x < b \\ 1 & b \le x \end{cases}$$



در حالتی که $a=0$ و $b=1$ باشد می گویند X دارای توزیع یکنواخت استاندارد است

مثال : اگر $X \sim U(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ مقادیر $P(X>0)$ و $P(|X|<\frac{1}{8})$ را به دست آورید

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} = 1$$

$$P(X>0) = \int_0^{3/4} 1\,dx = 3/4$$

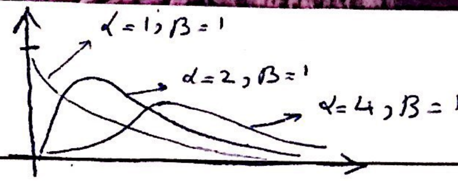
$$P(|X|<1/8) = P(-\tfrac{1}{8}<X<\tfrac{1}{8}) = \int_{-1/8}^{1/8} 1\,dx = \tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8}$$

$$E(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{1}{b-a}\left[\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}\right] = \frac{a+b}{2}$$

$V(X) = ?$ $$EX^2 = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_a^b = \frac{1}{b-a}\left[\frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3}\right] = \frac{a^2+b^2+ab}{3}$$

$$V(X) = EX^2 - E^2X = (b-a)^2/12$$

Subject
Date



توزیع گاما:

فرض کنید α و β مقادیر حقیقی مثبت معلوم باشند آن گاه اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی

$$f_X(x)=\frac{\cancel{\beta^\alpha}}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}\qquad x>0$$

در بعضی کتب به صورت

در این درس $$\boxed{f_X(x)=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-x\beta}}\qquad x>0$$

هم نشان می دهند

و با نماد $\Gamma(\alpha,\beta)$ یا $G(\alpha,\beta)$ نمایش می دهند. برای تابع توزیع X نمی توان شکل بسته ای به دست آورد.

- نکته ۱: $\Gamma(\alpha)$ به صورت

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty y^{\alpha-1}e^{-y}dy$$

است که به آن تابع گاما می گویند و دارای خواص زیر است:

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)\qquad \Gamma(n+1)=n!\qquad \Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$$

از این خواص

$$\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)\rightarrow \Gamma(\alpha-1)=(\alpha-2)\Gamma(\alpha-2)$$

می توان

$$\Gamma(3/2)=\Gamma(1+1/2)=\frac{1}{2}\Gamma(1/2)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

بقیه گاما را به دست آورد

$$\Gamma(1)=1$$

- نکته ۲: در توزیع گاما اگر $\alpha=n/2$ و $\beta=1/2$ ، $n\in N$ آن گاه به این توزیع می گویند توزیع کای-دو با n درجه آزادی و به صورت

توزیع خی دو
کای دو

$$X\sim\chi^2_n$$

نشان می دهند یعنی

$$X\sim G(n/2,1/2)\Rightarrow X\sim\chi^2_n$$

توزیع کای دو یکی از پرکاربردترین توزیع های آماری است به همین منظور جداولی برای این توزیع با درجات آزادی مختلف در کتب آماری تهیه شده است.

PAPCO

Subject
Date

- امید ریاضی و واریانس

اگر $X \sim \Gamma(\alpha,\beta)$ ، $E(X^r)$ را بدست آورید :

$$E(X^r) = \int_0^\infty x^r \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x\beta}\, dx$$

$$= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+r)}{\beta^{\alpha+r}} \underbrace{\int_0^\infty \frac{\beta^{\alpha+r}}{\Gamma(\alpha+r)} \cdot x^{\alpha+r-1} e^{-x\beta} dx}_{1}$$

$\Gamma(\alpha+r, \beta)$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+r)}{\Gamma(\alpha)} \cdot \beta^{-r}$$

بنابراین :

$$E(X) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} \cdot \beta^{-1} = \frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \cdot \beta^{-1}$$

$$\Longrightarrow E(X) = \alpha/\beta$$

$$E(X^2) = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha)} \cdot \beta^{-2} = \frac{(\alpha+1)\overbrace{\Gamma(\alpha+1)}^{\alpha\Gamma(\alpha)}}{\Gamma(\alpha)} \beta^{-2}$$

$$= \alpha(\alpha+1)/\beta^2$$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2}$$

$$= \frac{\alpha^2+\alpha-\alpha^2}{\beta^2} = \alpha/\beta^2 \quad \checkmark$$

- تابع مولد گشتاور :

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int e^{tx} \cdot \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} e^{-x\beta} dx$$

Subject
Date

$$\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-(\beta-t)x} dx$$

$$(\beta-t)x = u \longrightarrow (\beta-t)dx = du$$

$$M_X(t) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \left(\frac{u}{\beta-t}\right)^{\alpha-1} e^{-u} \cdot \frac{1}{\beta-t} du$$

$$= \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{1}{(\beta-t)^{\alpha}} \int_0^{\infty} u^{\alpha-1} e^{-u} du$$

$$= \frac{\beta^{\alpha}}{\cancel{\Gamma(\alpha)}} \cdot \frac{1}{(\beta-t)^{\alpha}} \cancel{\Gamma(\alpha)} = \left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^{\alpha}$$

- اگر تابع چگالی گاما به صورت زیر باشد

$$f_X(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} e^{-x/\beta}$$

آنگاه

$$M_X(t) = (1-\beta t)^{-\alpha}$$

خواهد شد.

$$E(X) = \alpha\beta \qquad V(X) = \alpha\beta^2$$

- نشان دهید $\int f_X(x)dx = 1$

$$\int_0^{\infty} \frac{\beta^{\alpha}}{\underbrace{\Gamma(\alpha)}_{(\alpha-1)!}} x^{\alpha-1} e^{-x\beta} dx = \frac{\beta^{\alpha}}{(\alpha-1)!} \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x\beta} dx$$

از تغییر متغیر $y = \beta x$ استفاده کنید $dy = \beta dx$

$$\cancel{f_X(x)} = \frac{\beta^{\alpha}}{(\alpha-1)!} \int_0^{\infty} \left(\frac{y}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-y} \left(\frac{1}{\beta}\right) dy = \frac{\cancel{\beta^{\alpha}}}{(\alpha-1)!} \int_0^{\infty} \cancel{\beta^{-\alpha}} y^{\alpha-1} e^{-y}$$

$$= \frac{1}{(\alpha-1)!} \underbrace{\int_0^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy}_{\Gamma(\alpha)} = \frac{(\alpha-1)!}{(\alpha-1)!} = 1$$

Subject
Date

- نکته ۳ : اگر در توزیع گاما $\alpha = 1$ در نظر گرفته شود آن گاه :

$$f_X(x) = \beta e^{-\beta x}$$

$G(1,\beta) \Rightarrow \mathcal{E}(\beta)$ در این صورت به این توزیع، توزیع نمایی می گویند

$E(\beta)$

Exp

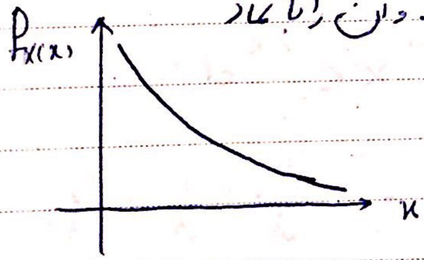
توزیع نمایی :

اگر X شاخص زمان انتظار برای وقوع اولین پیشامد مورد نظر با پارامتر λ بیانگر متوسط تعداد موفقیت ها در واحد زمان و $E(X) = 1/\lambda$ میانگین زمان انتظار بین دو موفقیت یا متوسط زمان برای وقوع اولین پیشامد باشد آن گاه می گوییم X دارای توزیع نمایی است. به عبارت دیگر توزیع نمایی، توزیع زمان لازم برای وقوع پیشامد مورد نظر است. معمولاً برای محاسبه طول عمر کاربرد دارد.

فرض کنید λ یک عدد حقیقی مثبت معلوم باشد آن گاه اگر X دارای تابع چگالی احتمال

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad x \geq 0$$

باشد می گویند X دارای توزیع نمایی با پارامتر λ است و آن را با نماد



$$X \sim E(\lambda)$$

نشان می دهند. تابع توزیع این متغیر :

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \cancel{\lambda}\left(-\frac{1}{\cancel{\lambda}} e^{-\lambda x}\right)$$

$$= -e^{-\lambda x}\Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$

دیدیم در توزیع گاما $EX = \alpha/\beta$ و $V(X) = \alpha/\beta^2$ پس $E(X) = 1/\lambda$

PAPCO

$Var(X) = 1/\lambda^2$

Subject
Date

$$E(X)=\int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}\,dx=\lambda\cdot\int xe^{-\lambda x}\,dx$$

از جزء به جزء حل کنید.

$$E(X)=1/\lambda$$

$$\begin{cases} u=x \rightarrow dx=du \\ \lambda e^{-\lambda x}dx=dv \rightarrow v=-e^{-\lambda x}\end{cases}$$

$$E(X)=-xe^{-\lambda x}\Big|_0^\infty+\int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx=0-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty$$
$$=1/\lambda$$

به همین ترتیب

$$E(X^2)=\int_0^\infty x^2\lambda e^{-\lambda x}\,dx$$

$$x^2=u\rightarrow 2xdx=du$$
$$\lambda e^{-\lambda x}dx=dv\rightarrow v=-e^{-\lambda x}$$

$$E(X^2)=-x^2e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty+2\int_0^\infty xe^{-\lambda x}\,dx$$

$$=2\underbrace{\int_0^\infty xe^{-\lambda x}\,dx}_{E(X)/\lambda}=\frac{2}{\lambda}\cdot\frac{1}{\lambda}=2/\lambda^2$$

$$V(X)=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}$$

- تابع مولد گشتاور:

$$M_X(t)=E(e^{tX})=\int_0^\infty e^{tx}\lambda e^{-\lambda x}\,dx$$

$$=\lambda\int_0^\infty e^{-x(\lambda-t)}\,dx=-\frac{\lambda}{\lambda-t}e^{-x(\lambda-t)}\Big|_0^\infty$$

P4PCO

Scanned with CamScanner

$$= \frac{\lambda}{\lambda - t} = \lambda(\lambda - t)^{-1}$$

- تمرین: از تابع مولد گشتاور استفاده کنید و امید ریاضی و واریانس توزیع نمایی را محاسبه کنید

خواص توزیع نمایی:

* در یک فرآیند پواسن تعداد دفعاتی که یک پیشامد مورد نظر در فاصله $(0, t)$ وقوع می‌یابد متغیر تصادفی پواسن با پارامتر λt است و زمان لازم برای وقوع همان پیشامد برای اولین بار دارای توزیع نمایی با پارامتر λ است

* توزیع نمایی حالت خاص از توزیع گاما است $\alpha = 1$ و $\beta = \lambda$

* توزیع نمایی دارای خاصیت فقدان حافظه یا بی حافظگی است یعنی در این توزیع احتمال وقوع پیشامد مورد نظر بعد از گذشت زمان t به اینکه زمان گذشته بستگی ندارد

به عبارت دیگر

$$P(X > t+s \mid X > t) = P(X > s) \quad (*)$$

فرض کنید X نشان دهنده عمر مفید یک دستگاه الکترونیکی باشد و این دستگاه تاکنون برای مدت زمان t سال کار کرده است. اکنون می‌خواهیم بدانیم آیا دستگاه می‌تواند برای حداقل s سال دیگر کار کند یعنی احتمال این که طول عمر این وسیله از $s+t$ بیشتر باشد به شرط آن که بدانیم حداقل t سال کار کرده است (می‌دانیم بیشتر از t سال کار می‌کند)

رابطه $(*)$ نشان می‌دهد احتمال کار کردن دستگاه برای مدت زمان $s+t$ سال در حالی که تاکنون به مدت t سال کار کرده است با احتمال کار کردن دستگاه برای حداقل s سال برابر است

به عبارت دیگر دستگاه دارای خاصیت بی حافظگی است چون دستگاه در زمان t سالم است و فرض می‌کنیم مانند یک دستگاه نو است برای s سال دیگر کار کند

Subject
Date

قضیه: اگر X دارای توزیع نمایی با پارامتر λ باشد آن گاه

$$\underbrace{P(X>t+s \mid X>t)}\ = P(X>s)$$

اثبات:

$$\frac{P(X\geq t+s,\ X\geq t)}{P(X\geq t)} = \frac{P(X\geq t+s)}{P(X\geq t)}$$

$$P(X\geq t+s) = 1-P(X<t+s) = 1-\int_0^{t+s} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = e^{-(t+s)\lambda}$$

$$P(X\geq t) = 1-P(X<t) = 1-\int_0^{t} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = e^{-\lambda t}$$

$$\Rightarrow \frac{e^{-(t+s)\lambda}}{e^{-\lambda t}} = e^{-s\lambda} = P(X>s)$$

توزیع لاپلاس (نمایی دوطرفه) (۱۷۷۴) توسط لاپلاس معرفی شد.

اگر X به طور هم شانس مقادیر مثبت و منفی اختیار کند به X می گویند دارای توزیع لاپلاس یا نمایی دو طرفه است

و قدر مطلق X دارای توزیع نمایی است

$$f_X(x) = \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|x|} \qquad -\infty<x<\infty$$

در این صورت

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{\lambda x} & x<0 \\ 1-\frac{1}{2}e^{-\lambda x} & x\geq 0 \end{cases}$$

به صورت روبرو هم تعریف می شود: $\frac{1}{2\beta}\exp\left\{-\frac{|X-\mu|}{\beta}\right\}$

PAPCO

$E(X)=\mu \qquad var(X)=2\beta^2$

5
Subject
Date

$$f_X(x)=\frac{1}{2b}\exp\{|\frac{x-\mu}{b}|\} \quad \mu=0$$

$$\rightarrow F_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\exp\{-\frac{\mu-x}{\beta}\} & x<\mu \\ 1-\frac{1}{2}\exp(-\frac{x-\mu}{\beta}) & x\geq\mu\end{cases}$$

$\beta>0 \quad x\in(-\infty,\infty)$

توزیع بتا: اگر کمیت تصادفی X مقادیر خود را در فاصله $[0,1]$ اختیار کند تابع چگالی آن به صورت زیر باشد

$$f_X(x)=\frac{1}{B(\alpha,\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \quad 0\leq x\leq 1$$
$$\alpha,\beta>0$$

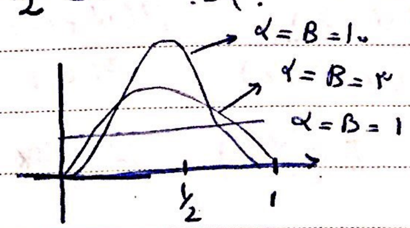
آن گاه می گویند $X\sim\beta(\alpha,\beta)$ است که در آن $\beta(\alpha,\beta)$ تابع بتا است و به صورت

$$\beta(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$
تعریف می شود.
$$=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx$$

- می توان نشان داد $\beta(\alpha,\beta)=\beta(\beta,\alpha)$

- اگر $\alpha=\beta=1$ آن گاه توزیع بتا به توزیع یکنواخت $U(0,1)$ تبدیل می شود

- اگر $\alpha=\beta$ در آن صورت تابع چگالی حول $x=\frac{1}{2}$ متقارن است



Scanned with CamScanner

Subject
Date

ـ گشتاور مرتبه kام :

$$E(X^k)=\int_0^1 x^k f_X(x)\,dx$$

$$=\frac{1}{B(\alpha,\beta)}\int_0^1 x^k x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx$$

$$=\frac{1}{B(\alpha,\beta)}\int_0^1 \underbrace{x^{\alpha+k-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx}\cdot\frac{B(\alpha+k,\beta)}{B(\alpha+k,\beta)}$$

$$=\frac{B(\alpha+k,\beta)}{B(\alpha,\beta)}$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha+k)\cancel{\Gamma(\beta)}}{\Gamma(\alpha+k+\beta)}\cdot\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cancel{\Gamma(\beta)}}=\frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha+k+\beta)}\cdot\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)}$$

از خواص تابع گاما :

$$\Gamma(\alpha+k)=\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k-1)\Gamma(\alpha)$$

$$\Gamma(\alpha+\beta+k)=(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)\cdots(\alpha+\beta+k-1)\Gamma(\alpha+\beta)$$

با جایگذاری :

$$\Rightarrow E(X^k)=\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)\cdots(\alpha+\beta+k-1)}$$

بنابراین

$$E(X)=\frac{\overbrace{\Gamma(\alpha+1)}^{\alpha\cancel{\Gamma(\alpha)}}\ \cancel{\Gamma(\alpha+\beta)}}{\underbrace{\Gamma(\alpha+\beta+1)}_{(\alpha+\beta)\cancel{\Gamma(\alpha+\beta)}}\ \cancel{\Gamma(\alpha)}}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

$$E(X^2)=\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}\cdot\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)}=\frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}$$

$$\mathrm{var}(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

تمرین : مد توزیع بتا را بدست آورید $f'(x)=0\Rightarrow x=M_o$

Subject
Date

توزیع کوشی

فرض کنید θ یک عدد حقیقی نامعلوم باشد. اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد

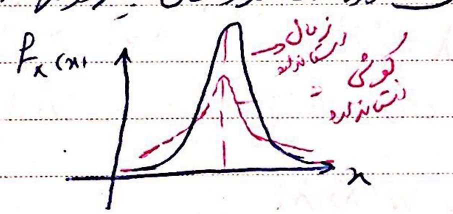
$$f_X(x)=\frac{1}{\pi[1+(x-\theta)^2]} \qquad -\infty<x<\infty$$

می گویند X دارای توزیع کوشی با پارامتر θ است و با $X\sim C(\theta,1)$ نشان می دهند

اگر $\theta=0$ ، $f_X(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$ و به این توزیع ، توزیع کوشی استاندارد می گویند

توزیع کوشی نسبت به θ متقارن است و ماکزیمم مقدار خود را در $x=\theta$ می گیرد

این توزیع به توزیع نرمال شباهت دارد اما مقدار احتمال بیشتر در دم های آن توزیع بیشتر است.



توزیع نرمال دو متغیره :

اگر بردار تصادفی $\underset{\sim}{X}=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}$ دارای تابع چگالی زیر باشد به طوری که μ_1 و μ_2 دو عدد حقیقی و σ_1 و σ_2 دو عدد حقیقی مثبت و ρ یک عدد حقیقی بین ۱- و ۱ باشد آنگاه :

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 -2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\} \qquad -\infty<x_i<\infty \quad i=1,2$$

آن گاه می‌نویسیم $\underline{X}=(X_1, X_2)$ دارای توزیع نرمال ~~[illegible]~~ دو متغیره است

$$(X_1, X_2) \sim N_2(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$$

اگر $\mu_1=\mu_2=0$ و $\sigma_1^2=\sigma_2^2=1$ آن گاه $X=(X_1, X_2)$ توزیع نرمال استاندارد دو متغیره دارد.

$$E(X_1)=\mu_1 \qquad E(X_2)=\mu_2 \qquad V(X_1)=\sigma_1^2$$
$$V(X_2)=\sigma_2^2$$

$$\rho(X_1, X_2)=\rho$$

توزیع وایبل: فرض کنید α و λ مقادیر حقیقی مثبت نامعلوم باشند. اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f_X(x)=\alpha\lambda x^{\alpha-1}e^{-\lambda x^{\alpha}} \qquad x\geq 0$$

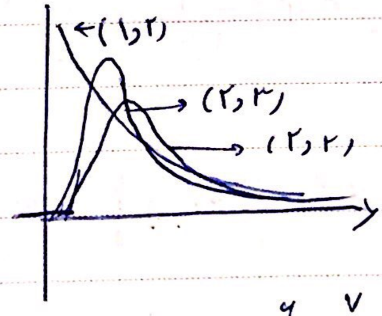
آن گاه می‌گویند X دارای توزیع وایبل با پارامترهای α و λ است

$$X \sim W(\alpha, \lambda)$$

$$F_X(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 1-e^{-\lambda x^{\alpha}} & x\geq 0 \end{cases}$$

توزیع وایبل شبیه به نمایی و گاما به توزیع طول عمر معروف هستند و در مسائل [illegible] کاربرد زیادی دارند

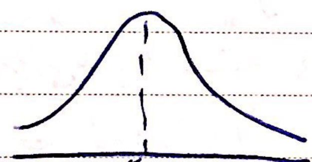
در حالت خاص $\alpha=1$، توزیع وایبل همان توزیع نمایی است.



توزیع نرمال :

مهمترین توزیع پیوسته آماری، توزیع نرمال است. این توزیع در سال 1733 توسط موآور A.De Moivre معرفی گردید و توسط گاوس به طور مفصل‌تر به این توزیع پرداخت و به همین دلیل نام دیگر این توزیع، توزیع گاوسی است. این توزیع دارای خواص خوبی است برای مثال یک توزیع متقارن است یعنی میانگین، میانه و مد آن برابرند و نسبت به حاشیه‌سازی و شرطی کردن و خطی‌سازی بسته است (یعنی اگر (X, Y) نرمال باشد آن‌گاه $X|Y$ ، Y و X و $aX+b$ همه نرمال‌اند)

اغلب در مسائل کاربردی فرض بر نرمال بودن متغیر تصادفی مورد بررسی است. شکل این توزیع به صورت زیر است

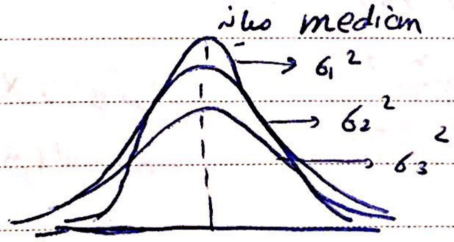


میانگین Mean
مد mode
میانه median

← نسبت به μ متقارن است

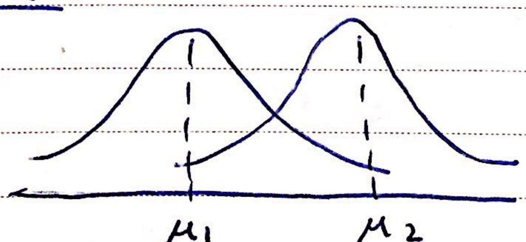
توزیع به دو پارامتر معادل (μ) و مقیاس (σ^2) بستگی دارد

شکل منحنی به μ (میانگین) و σ^2 (واریانس) وابسته است.



$\sigma_1^2 < \sigma_2^2 < \sigma_3^2$

همه میانگین یکسان دارند اما واریانس فرق می‌کند



پس پارامتر مکان (میانگین) منحنی توزیع را جابه‌جا می‌کند و پارامتر مقیاس ~~پراکندگی~~ (اندازه منحنی) توزیع را کنترل می‌کند به عبارت دیگر شکل نمودار را تغییر می‌دهد به همین دلیل به آن پارامتر شکل یا مقیاس هم می‌گویند (σ^2 در اینجا)

Subject
Date

- اگر متغیر تصادفی X مقادیر خود را از $(-\infty, \infty)$ اختیار کند و تابع چگالی آن به صورت

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\{-(x-\mu)^2/2\sigma^2\} \quad -\infty < x < \infty$$

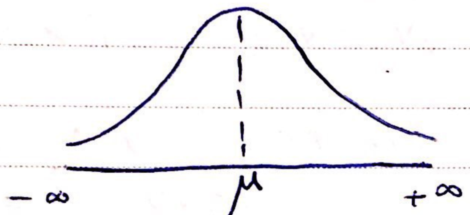
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

$\pi = ۳,۱۴$

$e = ۲,۷۱۸۲۸$

باشد آنگاه می گویند X دارای توزیع نرمال است و با نماد $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ نشان می دهند

منحنی نرمال که به منحنی زنگی شکل معروف است

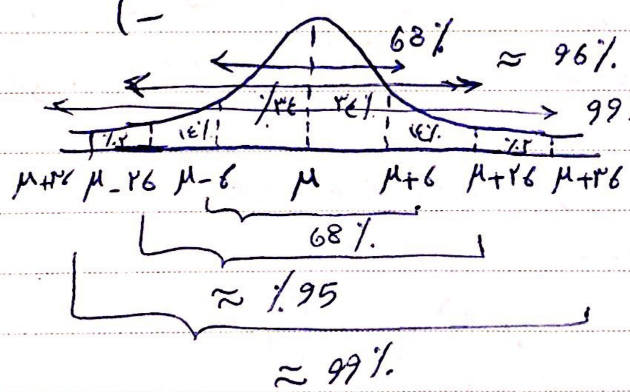


با توجه به خواص تابع چگالی

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$$

پس چون سطح زیر منحنی یک است پس اندازه سطح سمت چپ و راست هرکدام برابر ۰٫۵ است

اگر X دارای توزیع نرمال با پارامتر μ و σ^2 باشد آنگاه که توزیع مساحت زیر منحنی نرمال به صورت زیر است:



یعنی اگر X دارای توزیع نرمال

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

آنگاه

$P(\mu-3\sigma < X < \mu+3\sigma) = ۰,۹۹$

$P(\mu-2\sigma < X < \mu+2\sigma) = ۰,۹۵$

$P(\mu-\sigma < X < \mu+\sigma) = ۰,۶۸$

- نشان می دهیم $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx$$

از روش تغییر متغیر $\frac{x-\mu}{\sigma}=z$ آن گاه $dx=\sigma dz$

$$S=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cancel{\sigma}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2}\,\cancel{\sigma}\,dz=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-z^2/2}\,dz \quad (\star)$$

از تابع گامای داریم $\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty y^{\alpha-1}e^{-y}\,dy,\ \alpha>0$ پس اگر

$$y=z^2/2 \longrightarrow dy=z\,dz$$

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty \left(\frac{z^2}{2}\right)^{\alpha-1}e^{-z^2/2}\,z\,dz=2^{1-\alpha}\int_0^\infty z^{2\alpha-1}e^{-z^2/2}\,dz$$

به ازای $\alpha=1/2$

$$\Rightarrow \underbrace{\Gamma(1/2)}_{\sqrt{\pi}}=\underbrace{2^{1-1/2}}_{\sqrt{2}}\int_0^\infty \underbrace{z^0}_{1}\,e^{-z^2/2}\,dz$$

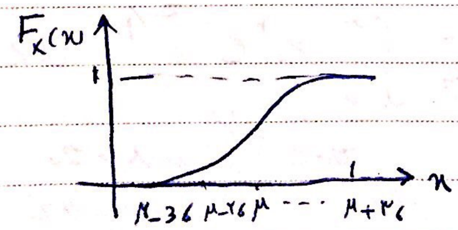
$$\sqrt{\pi}=\sqrt{2}\int_0^\infty e^{-z^2/2}\,dz \Rightarrow \int_0^\infty e^{-z^2/2}\,dz=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

با جایگذاری در $(\star)$:

$$S=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}}=\frac{2\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\pi}}=1$$

— تابع توزیع:

$$F_X(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\,dx$$



Subject
Date

امید ریاضی و واریانس : طبق تعریف :

$$E(X) = \int x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx$$

از تغییر متغیر :
$$\frac{x-\mu}{\sigma} = z \Rightarrow dx = \sigma dz$$

$$E(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\mu + z\sigma) e^{-z^2/2} dz$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mu \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} dz}_{2\sqrt{\pi/2}}}_{\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}}\mu} + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} z e^{-z^2/2} dz}_{\underbrace{\int_{-\infty}^{0} z e^{-z^2/2} + \int_{0}^{\infty} z e^{-z^2/2}}_{-1+1 = 0}}$$

$$= \mu$$

$$v(X) = E(X-\mu)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \cdot \frac{e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma} dx$$

$$\frac{x-\mu}{\sigma} = z \rightarrow dx = \sigma dz$$

$$\Rightarrow var(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2 z^2 . e^{-z^2/2} dz$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-z^2/2} dz$$

از جزء به جزء : $u = z$ و $z e^{-z^2/2} dz = dv$

$du = dz$
$$\Rightarrow v = -e^{-z^2/2}$$

PAPCO

۸

Subject
Date

$$\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\Big[\underbrace{-ze^{-z^2/2}\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{0}+\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2/2}\,dz}_{2\sqrt{\pi/2}}\Big]=\sigma^2$$

$$\int_0^{\infty}e^{-z^2/2}\,dz=\sqrt{\pi/2}\rightarrow\underbrace{\frac{2\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2\pi}}}$$

تابع مولد گشتاور:
$$M_X(t)=E(e^{tX})=\int_{-\infty}^{\infty}e^{tx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{tx-(x-\mu)^2/2\sigma^2}dx \quad ★$$

با ساده کردن توان:
$$tx-\frac{x^2+\mu^2-2x\mu}{2\sigma^2}=\frac{2\sigma^2tx-x^2-\mu^2+2x\mu}{2\sigma^2}$$

$$=-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2+\mu^2-2\mu x-2tx\sigma^2)$$

به داخل پرانتز $t^2\sigma^4$ و $2\mu\sigma^2t$ را اضافه و کم کنید

$$=-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2+\mu^2-2\mu x-2tx\sigma^2+t^2\sigma^4-t^2\sigma^4+2\mu\sigma^2t-2\mu\sigma^2t)$$

$$=-\frac{1}{2\sigma^2}\left[(x-\mu-t\sigma^2)^2-(2\mu\sigma^2t+t^2\sigma^4)\right]$$

$$=-\frac{(x-\mu-t\sigma^2)^2}{2\sigma^2}+\left(\mu t+\frac{\sigma^2t^2}{2}\right)$$

با جایگذاری در ★ :
$$M_X(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu-t\sigma^2)^2}{2\sigma^2}}\cdot\exp\left(\mu t+\frac{\sigma^2t^2}{2}\right)$$

$$=e^{\mu t+\frac{\sigma^2t^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu-\sigma^2t)^2}{2\sigma^2}}$$

PAPCO

از تغییر متغیر $Z = \frac{x-\mu-t\sigma^2}{\sigma}$ استفاده کنید

$$dx = \sigma\, dz$$

$$M_X(t) = e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\, dz}_{1}$$

$$= e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2}$$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2}\, dz}_{\sqrt{2\pi}}$$

- از تابع مولد گشتاور استفاده کنید و $E(X)$ و $V(X)$ ، $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ را بدست آورید.

- توزیع نرمال استاندارد

در توزیع نرمال اگر $\mu=0$ و $\sigma^2=1$ آن گاه می‌گوییم توزیع X یک توزیع

$X \sim N(\mu,\sigma^2)$

نرمال استاندارد است. همچنین اگر $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ آن گاه می‌توان با تغییر متغیر $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ نشان داد Z دارای توزیع نرمال استاندارد است.

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

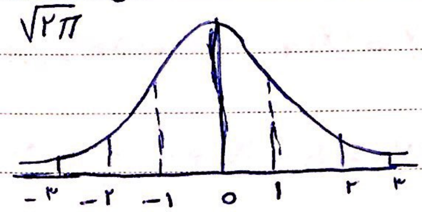
$$X \sim N(\mu,\sigma^2) \underset{Z=\frac{X-\mu}{\sigma}}{\Longrightarrow} Z \sim N(0,1)$$

$$\begin{cases} E(Z) = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{\mu-\mu}{\sigma} = 0 \\ V(Z) = V\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2} V(X) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1 \end{cases}$$

پس تابع چگالی یک متغیر استاندارد به صورت زیر است:

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \, dz = \Phi(z)$$

$$\underbrace{\Phi(z)}_{p(Z\le z)} = \int_{-\infty}^{z} \underbrace{f_Z(z)}_{\varphi(z)} dz$$



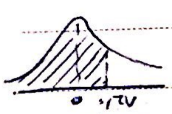
$(\mu \mp 3\sigma) \longrightarrow$ اعداد بین $(-3,3)$ ٪۹۹

نکته: برای توزیع نرمال استاندارد جداول احتمال تهیه شده است و بنابراین برای محاسبه احتمال اینکه یک متغیر نرمال مثل X در یک بازه مثل (a,b) قرار بگیرد بهتر است ابتدا آن را نرمال استاندارد کنیم و سپس به جداول احتمال این توزیع مراجعه کنیم.

مثال: فرض کنید $X \sim N(2,9)$ مطلوبست $P(X<3)$ و $P(-5<X<4)$

$$P(X<3) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{3-2}{3}\right) = P(Z<\underbrace{1/3}_{0.33}) = \Phi(0.33) = 0.6293$$

$$P(-5<X<4) = P\left(\frac{-5-2}{3} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{4-2}{3}\right) = P(-2.33<Z<0.67)$$



$$= P(Z<0.67) - P(Z<-2.33)$$

$$= \underbrace{\Phi(0.67)}_{0.7486} - \underbrace{\Phi(-2.33)}_{1-0.9901} =$$

$$\Phi(-z) = 1-\Phi(z) = 1-\Phi(2.33) = 1-0.9901$$

- در جدول نرمال استاندارد:

$\Phi(0) = 0.5$ $\quad \Phi(1.64) \cong 0.95$

$\Phi(1.96) = 0.975$

Subject: واریانس - توزیع‌های نرمال - ۱۴۰۰/۱۴۰۱
Date

$$U \sim N(0,1),\quad V \sim \chi^2_n \rightarrow T = \frac{U}{\sqrt{V/n}} \sim t_n$$

$\sigma^2 = \frac{n}{n-2}$

نکته: اگر $X_1 \dots X_n$ ، n متغیر مستقل هر کدام دارای توزیع $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$

آن گاه می توان نشان داد: $X_1 \dots X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$

$$Y = (X_1 + \dots + X_n)/n = \bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$$

$$\begin{cases} E(Y) = E\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) = 1/n\,[E(X_1) + \dots E(X_n)] = n\mu/n = \mu \\ V(Y) = \frac{1}{n^2} V(X_1) + \dots + \frac{1}{n^2} V(X_n) = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \sigma^2/n \end{cases}$$

قضیه حد مرکزی: فرض کنید $X_1, \dots X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیعی با میانگین μ و واریانس متناهی σ^2 باشد ~~به طوری که~~ آن گاه اگر n به اندازه کافی بزرگ باشد آن گاه $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$

$$X_1 \dots X_n \overset{\text{هر توزیعی}}{\sim} (\mu, \sigma^2) \Longrightarrow \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(\mu, \sigma^2/n)$$

n به اندازه کافی بزرگ

σ^2 متناهی

یا $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$

و یا $\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$ به عبارت دیگر

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le z\right) = \Phi(z)$$

مثلاً فرض کنید $Y_1 \dots Y_n$ نمونه تصادفی از $ber(p)$ باشد

$$X = \sum_{i=1}^{n} Y_i \sim Bin(n, p) \quad \mu = np,\ \sigma^2 = npq$$

و اگر n بزرگ باشد طبق قضیه حد مرکزی

$$\frac{X - np}{\sqrt{npq}} \sim N(0,1)$$

PAPCO

Subject
Date

مثال ۱: درآمد روزانه شخصی از سه محل تأمین می‌گردد. از محل اول مقدار ثابت ۱۲۰ تومان، از محل دوم مقدار تصادفی $X_1 \sim N(100, 64)$ و از محل سوم مقدار تصادفی $X_2 \sim N(80, 36)$ است. با فرض مستقل بودن X_1 و X_2 احتمال اینکه درآمد روزانه شخص بیش از ۳۱۰ تومان شود چقدر است.

$$\text{درآمد شخص}\ Y = \underbrace{120}_{\text{عدد ثابت}} + \underbrace{X_1}_{\sim N} + \underbrace{X_2}_{\sim N} \rightarrow E(Y) = 120 + 100 + 80 = 300$$

$$V(Y) = V(X_1) + V(X_2) = 64 + 36 = 100$$

$$Y \sim N(300, 100)$$

$$P(Y > 310) = P\left(\frac{Y-\mu}{\sigma} > \frac{310-300}{10}\right) = P(Z > 1)$$

$$= 1 - P(Z \le 1) = 1 - \Phi(1) = 0.1587$$

مثال ۲: در شهری ۵۶ درصد از رأی دهندگان زن هستند. احتمال اینکه از ۵۰ نفر رأی دهنده حداقل ۳۰ نفر زن باشند چقدر است.

تعداد زنان در میان ۵۰ نفر $X \sim Bin(50, 0.56)$ $\quad n > 30$

می توان از قضیه حد مرکزی استفاده کرد.

$$E(X) = np = 50 \times 0.56 = 28$$
$$V(X) = npq = 50 \times 0.56 \times 0.44 = 12.32$$

$$P(X \geq 30) = P\left(\frac{X-np}{\sqrt{npq}} \geq \frac{30-28}{\sqrt{12.32}}\right) = P(Z \geq 0.57)$$

$$= 1 - P(Z \le 0.57)$$

مثال ۳: درجه حرارت شهری دارای توزیع نرمال با میانگین ۶۸ درجه فارنهایت و انحراف معیار ۴ درجه

Subject
Date

فارنهایت می‌باشد احتمال اینکه دو درجه حرارت بیش از ۷۰ درجه فارنهایت باشد چقدر است

$X \sim N(68, 16) \quad P(X \geq 70) = P(Z \geq \frac{70-68}{4})$

$= P(Z \geq 0.5) = 1 - P(Z \leq 0.5) = P(Z \leq -0.5)$

$= \Phi(-0.5) = 0.3085$

$\Phi(0) = 0.5 \quad \Phi(1.96) = P(Z \leq 1.96) = 0.975$

$\Phi(-Z) = 1 - \Phi(Z)$

$X \sim N(60, 16), \quad P(55 \leq X \leq 63) = ?$

$\Rightarrow P(\frac{55-60}{4} \leq Z \leq \frac{63-60}{4}) = P(-1.25 \leq Z \leq 0.75)$

$= P(Z \leq 0.75) - P(Z \leq -1.25) = \Phi(0.75) - \Phi(-1.25)$

مثال ۴ فرض کنید $X_1 \ldots X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع $N(\mu, \sigma^2)$ باشد

X_i ها هم توزیع و مستقل

آنگاه نشان دهید $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$

$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{n}[X_1 + \cdots + X_n]$

ترکیب خطی از X_i ها. طبق خواص توزیع نرمال، نرمال است

$E(\bar{X}) = \frac{1}{n}[E X_1 + \cdots + E(X_n)] = \frac{n\mu}{n} = \mu$

$V(\bar{X}) = \frac{1}{n^2}[V X_1 + \cdots V X_n] = \frac{1}{n^2}[n\sigma^2] = \sigma^2/n$

Subject
Date

با استفاده از جدول z احتمال های زیر را بیابید:

$$P(0 \leq Z \leq 1)$$

$$P(Z \leq 1.23) \qquad P(Z \geq 0.67)$$

مثال: تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی X به صورت زیر بیان شده است ضریب تغییرات آن را محاسبه کنید

$$M_X(t) = e^{5t+2t^2} \qquad e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2}$$

$$\rightarrow \mu = 5 \ , \ \frac{\sigma^2}{2} = 2 \Rightarrow \sigma^2 = 4 \rightarrow \sigma = 2$$

$$CV = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{2}{5} = 0.4$$

مثال: اگر متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال با میانگین μ و انحراف معیار σ باشد تابع مولد گشتاور متغیر $Y = X - c$ را تعیین کنید (c ثابت)

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2}$$

$$M_Y(t) = M_{X-c}(t) = E(e^{(X-c)t}) = e^{-ct} E(e^{tX})$$

$$= e^{-ct} \cdot e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2} = e^{(\mu - c)t + \sigma^2 t^2/2}$$

مثال: اگر $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ تابع مولد گشتاور $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ را بدست آورید

$$M_Z(t) = E(e^{Zt}) = E(e^{(\frac{X-\mu}{\sigma})t}) = e^{-\mu t/\sigma} E(e^{Xt/\sigma})$$

$$= e^{-\mu t/\sigma} M_X\left(\frac{t}{\sigma}\right) = e^{-\mu t/\sigma} \cdot e^{\mu t/\sigma + \sigma^2 t^2/2\sigma^2}$$

$$= e^{t^2/2}$$

نکته ۱: اگر $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ آنگاه داریم $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$ می‌توان نشان داد

$$Z^2\sim\chi^2_1$$

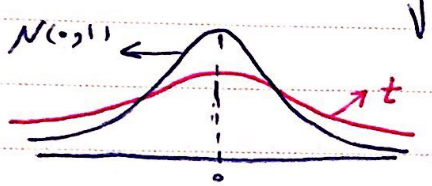
اگر $Z_1\sim N(0,1)$ و ... و $Z_n\sim N(0,1)$ ،

$$Y=Z_1^2+\dots+Z_n^2\sim\chi^2_n$$

برای توزیع χ^2 نیز جداول آماری تهیه شده

نکته ۲: اگر $U\sim N(0,1)$ و $V\sim\chi^2_n$ آنگاه

$$T=\frac{U}{\sqrt{V/n}}\sim t_n$$



می‌گویند T دارای توزیع استیودنت با n درجه آزادی است.

$n\to\infty \Rightarrow t_n\to N(0,1)$

$E(T)=0$ $\qquad$ $V(T)=\frac{n}{n-2}$

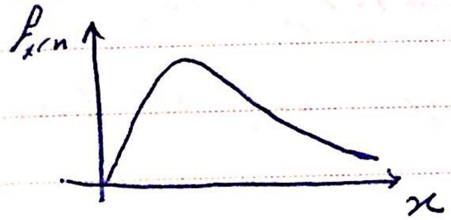
برای توزیع t استیودنت نیز جداول آماری تهیه شده است

نکته ۳: اگر $V_1\sim\chi^2_{n_1}$ و $V_2\sim\chi^2_{n_2}$ آنگاه

$$F=\frac{V_1/n_1}{V_2/n_2}\sim F_{n_1,n_2} \qquad E(F)=\frac{n_2}{n_2-2}$$

می‌گویند F دارای توزیع فیشر با n_1 و n_2 درجه آزادی است

برای توزیع فیشر نیز جداول آماری تهیه شده است



Subject
Date

نامساوی‌های احتمال و قضایای حدی

یکی از مباحث مهم در تئوری احتمال قضایای حدی و نامساوی‌های احتمالی می‌باشد. قضایایی مثل قانون اعداد بزرگ، قضایای حد مرکزی و ... و نامساوی‌هایی مثل نامساوی مارکوف، چبیشف و ... از مهمترین آنها است.

- نامساوی مارکف

Markov's Inequality

فرض کنید X یک متغیر تصادفی باشد که فقط مقادیر نامنفی اختیار می‌کند آنگاه برای هر مقدار $a>0$ داریم

$$P(X \geqslant a) \leqslant \frac{E(X)}{a}$$

در حالت پیوسته

$$E(X) = \int_0^\infty x f_X(x)\,dx = \underbrace{\int_0^a x f_X(x)\,dx}_{\geqslant 0} + \int_a^\infty x f_X(x)\,dx$$

$$\geqslant \int_a^\infty x f_X(x)\,dx \geqslant \int_a^\infty a f_X(x)\,dx$$

$$= a \underbrace{\int_a^\infty f_X(x)\,dx}_{} = a P(X \geqslant a)$$

نامساوی چبیشف Chebyshev's Inequality

فرض کنید X متغیر تصادفی دلخواه با میانگین متناهی μ و واریانس σ^2 باشد آنگاه برای هر $k>0$ داریم:

$$P(|X-\mu| \geqslant k\sqrt{Var(X)}) \leqslant \frac{1}{k^2}$$

یا $P(|X-\mu| \geqslant k) \leqslant \frac{Var(X)}{k^2}$

اثبات: با توجه به نامساوی مارکف

$$P\left((X-\mu)^2 \geq k^2\right) \leq \frac{E(X-\mu)^2}{k^2}$$

$$(X-\mu)^2 \geq k^2 \iff |X-\mu| \geq k$$

$$\Rightarrow P(|X-\mu| \geq k) \leq \frac{\sigma^2 = Var(X)}{k^2}$$

- از نامساوی مارکف و چبیشف می‌توان برای به دست آوردن کران احتمال‌ها استفاده کرد. البته اگر توزیع متغیر X در دست باشد به طور دقیق می‌توان احتمالات را محاسبه کرد ولی اگر تنها میانگین و واریانس توزیع احتمال معلوم باشد می‌توان از این نامساوی‌ها برای تعیین حدود احتمال استفاده کرد.

- فرض کنید X تابع چگالی $f_X(x) = \frac{1}{10}$ ، $0<x<10$ باشد احتمال $P(|X-5|>4)$ را به طور دقیق و از نامساوی چبیشف به دست آورید.

$$P(|X-\mu|>4) \leq \frac{\sigma^2}{16}$$

$$\mu = E(X) = \int x/10 \, dx = \frac{x^2}{20}\Big|_0^{10} = \frac{100}{20} = 5$$

$$E(X^2) = \int x^2/10 \, dx = \frac{x^3}{30}\Big|_0^{10} = \frac{1000}{30} = \frac{100}{3}$$

$$V(X) = \frac{100}{3} - 25 = \frac{25}{3}$$

$$P(|X-5|>4) \leq \frac{25/3}{16} = 0.52$$

$$\int_0^1 \frac{1}{10} + \int_9^{10} \frac{1}{10} = \frac{1}{10} + \frac{x}{10}\Big|_9^{10}$$

$\cancel{P((X-5)^2 \geq 16)}$

$$P(\pm(X-\mu) \geq 4) \to P(X \geq 9) + \underbrace{P(-X \geq -1)}_{P(X<1)} = \frac{1}{10} + \frac{10}{10} - \frac{9}{10} = \frac{2}{10}$$

$-x+\mu \geq 4$ $\quad x<1,\ x>9$

- از نامساوی چبیشف اگر X یک متغیر تصادفی با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد

$$P(|X-\mu| \geq 2\sigma) \leq \frac{1}{4}$$

قانون ضعیف اعداد بزرگ

فرض کنید $X_1, X_2, \ldots$ دنباله ای از متغیرهای مستقل و هم توزیع باشند که هر یک دارای میانگین متناهی $E(X_1)=\mu$ است در این صورت برای هر $\varepsilon>0$

$$P\left\{\left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}-\mu\right| \geq \varepsilon\right\} \to 0 \qquad n\to\infty$$

به عبارت دیگر

$$\lim_{n\to\infty} P(|\bar{X}-\mu| \geq \varepsilon)=0$$

و یا

$$\lim_{n\to\infty} P(|\bar{X}-\mu| < \varepsilon)=1$$

اثبات:

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right) = \frac{\mu+\cdots\mu}{n} = \mu$$

$$var(\bar{X}) = var\left(\frac{X_1+\cdots X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\sigma^2+\cdots+\frac{1}{n^2}\sigma^2$$

$$= \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$P(|\bar{X}-\mu| < \varepsilon) \geq 1-\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

$$\underbrace{1-\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}}_{n\to\infty} \leq P(|\bar{X}-\mu| < \varepsilon) \leq 1$$

از متناهی بودن σ^2 و قضیه فشار حکم برقرار است.

Chernoff $\quad P(X\geq a)\leq e^{-ta}M_X(t) \quad$ if $t\geq 0$

$P(X\leq a)\leq e^{-ta}M_X(t) \quad$ if $t\leq 0$

Subject
Date

- بر اساس قانون ضعیف اعداد بزرگ این امکان به وجود می‌آید تا در صورت مجهول بودن μ یعنی میانگین جامعه، با استفاده از $\bar{X}$ یعنی میانگین n نمونه از جامعه برای جامعه استنباط انجام دهیم. در واقع $\bar{X}$ کار μ را انجام می‌دهد.

$$\bar{X} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu$$

چند نامساوی معروف دیگر

- نامساوی چبیشف یکطرفه: اگر X یک متغیر تصادفی با میانگین صفر و واریانس متناهی σ^2 باشد آنگاه

$$\forall a>0 \qquad P(X>a)\leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2+a^2}$$

$P(X>\mu+a)\leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2+a^2}$

$P(X<\mu-a)\leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2+a^2}$

- نامساوی کوشی شوارتز: اگر X و Y دو متغیر دلخواه

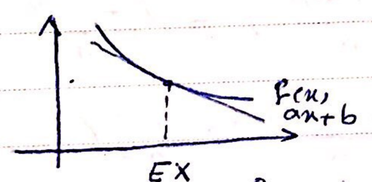
$$[E(XY)]^2\leq E(X^2)E(Y^2)$$

- نامساوی جنسن

اگر $f(x)$ یک تابع محدب ($f''(x)>0$) باشد آنگاه

$$E(f(X))\geq f(E(X))$$

(به شرط وجود و متناهی بودن امید ریاضی)



$\rightarrow f(E(X)) = aEX+b$

$$f(x)\geq ax+b \Rightarrow E(f(X))\geq \underbrace{aE(X)+b}_{f(E(X))}$$

مثال: اگر X تعداد کالاهای تولید شده در یک کارخانه در روز باشد به طوری که $EX=50$،

الف) یک کران بالا برای احتمال آنکه میزان تولید در یک روز معین از ۷۵ تا بیشتر شود را پیدا کنید.

ب) اگر بدانیم واریانس تولید در روز ۲۵ است یک کران پایین برای $P(40<X<60)$ بیابید.

$$P(X>75)\leq \frac{E(X)}{a}=\frac{50}{75}=\frac{2}{3}$$

PAPCO

می‌دانیم $\quad P(40<X<60) \Leftarrow P(|X-50|\geq 10)\leq \frac{25}{100}$

$-10<X-50<10 \qquad P(|X-50|<10)\geq 3/4$