Subject : Date

فصل سوم "فضاهای برداری"

تعریف: یک مجموعه مانند V یک فضای برداری نامیده می‌شود هرگاه اعضای آن بردار نامیده شوند و شرایط زیر را اعضای آن هستند و

الف) عمل جمع برداری $\oplus$ وجود داشته باشد و ویژگی‌های زیر را داشته باشد بنابراین:

① مجموعه V تحت عمل جمع برداری بسته باشد

$$\forall \underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y} \in V \quad , \quad \underset{\sim}{x} \oplus \underset{\sim}{y} \in V \qquad \underset{\sim}{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \underset{\sim}{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \rightarrow \underset{\sim}{x} \oplus \underset{\sim}{y} = \begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{bmatrix} \in V$$

② خاصیت جابجایی داشته باشد

$$\forall \underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y} \in V, \quad \underset{\sim}{x} \oplus \underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{y} \oplus \underset{\sim}{x} \qquad \underset{\sim}{x} \oplus \underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{y} \oplus \underset{\sim}{x}$$

③ خاصیت شرکت‌پذیری داشته باشد

$$\forall \underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}, \underset{\sim}{z} \in V, \quad (\underset{\sim}{x} \oplus \underset{\sim}{y}) \oplus \underset{\sim}{z} = \underset{\sim}{x} \oplus (\underset{\sim}{y} \oplus \underset{\sim}{z})$$

④ دارای عضو خنثی برای جمع باشد یعنی $\underset{\sim}{\theta}$ ای وجود داشته باشد که

$$\forall \underset{\sim}{x} \in V \ \exists \underset{\sim}{\theta} \in V \ \text{st} \ \underset{\sim}{x} \oplus \underset{\sim}{\theta} = \underset{\sim}{x} \qquad \underset{\sim}{\theta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underset{\sim}{x} \oplus \underset{\sim}{\theta} = \underset{\sim}{x}$$

⑤ دارای عضو قرینه باشد

$$\forall \underset{\sim}{x} \in V \quad \exists \underset{\sim}{y} \in V \quad \text{st} \quad \underset{\sim}{x} \oplus \underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{\theta} \Rightarrow \underset{\sim}{y} = -\underset{\sim}{x}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ب) عمل ضرب اسکالر $\odot$ بین اعداد حقیقی و اعضای V با ویژگی‌های زیر تعریف شود:

① مجموعه V تحت عمل ضرب برداری $\odot$ بسته باشد

$$\forall \underset{\sim}{x} \in V, \ \forall c \in R \ : \ c \odot \underset{\sim}{x} \in V \qquad c \odot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cx_1 \\ cx_2 \end{bmatrix} \in V$$

② دارای خاصیت شرکت‌پذیری باشد یعنی

$$\forall c, d \in R, \forall \underset{\sim}{x} \in V \ : \ c \odot (d \odot \underset{\sim}{x}) = (cd) \odot \underset{\sim}{x}$$

③ خاصیت توزیعی اسکالر داشته باشد

$$\forall \ c, d \in R, \forall \underset{\sim}{x} \in V \ : \ (c+d) \odot \underset{\sim}{x} = (c \odot \underset{\sim}{x}) \oplus (d \odot \underset{\sim}{x})$$

④ خاصیت توزیعی برداری داشته باشد

$$\forall \ c \in R, \forall \underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y} \in V \quad c \odot (\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{y}) = (c \odot \underset{\sim}{x}) \oplus (c \odot \underset{\sim}{y})$$

©MICRO®

⑤ دارای عضو خنثی ۱ باشد یعنی

$$\forall \underset{\sim}{x} \in V, \quad 1 \odot \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{x}$$

Subject : Date

مثال ۱: مجموعه تمام بردارهای ستونی n بعدی فضای برداری است

$$\underset{\sim}{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad V = \{ \underset{\sim}{x} \in R^n \mid \underset{\sim}{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_n \end{bmatrix}, x_i \in R, i = 1 \dots n \}$$

تمام موارد بررسی شود

مثال ۲: اگر $V = \{ \underset{\sim}{x} \in R^3 \mid \underset{\sim}{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 1 \\ x_3 \end{bmatrix}, x_1, x_3 \in R \}$ فضای برداری است

$$\underset{\sim}{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 1 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \underset{\sim}{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ 1 \\ y_2 \end{bmatrix} \rightarrow \underset{\sim}{x} \oplus \underset{\sim}{y} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ 2 \\ x_3 + y_3 \end{bmatrix} \notin V$$

مثال ۳: $V = \{ \underset{\sim}{x} \in R^3 \mid \underset{\sim}{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix}, x_1, x_2 \in R \}$ فضای برداری است

(تمام خواص را بررسی کنید)

مثال ۴: مجموعه توابع پیوسته در بازه $[0, 1]$ یک فضای برداری است چون مجموع هر دو تابع پیوسته و ضرب هر تابع پیوسته در تابعی پیوسته است

$$F(x) = x^2$$

مثال ۵: مجموعه تمام توابع چندجمله‌ای از درجه n فضای برداری است

$$f_1(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n \in V$$

$$f_2(x) = a_0 + a_1 x + \dots - a_{n-1} x^{n-1} - a_n x^n \in V$$

$$f_1(x) + f_2(x) = 2a_0 + 2a_1 x + \dots + 2a_{n-2} x^{n-2} \rightarrow \notin V$$

چندجمله‌ای از درجه n نیست

مثال ۶: مجموعه تمام چندجمله‌ای‌های از درجه n و کمتر فضای برداری است

نکته: در این درس مجموعه ماتریس‌های مربعی با n سطر را با R^n و مجموعه ماتریس‌های m سطر و n ستون را با R_{mn} و ماتریس‌های $n \times m$ را با R^n_m نمایش می‌دهیم.

©MICRO

Subject : Date

قضیه ۱: هر عضو فضای برداری دارای قرینه‌ای یکتاست

اثبات فرض کنیم $\underset{\sim}{y}$ و $\underset{\sim}{z}$ دارای دو عضو قرینه $\underset{\sim}{x}$ باشند می‌توان نوشت

$$\underset{\sim}{x} \oplus \underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{\theta} \quad (1) \qquad \underset{\sim}{x} \oplus \underset{\sim}{z} = \underset{\sim}{\theta} \quad (2)$$

از تعریف عضو خنثی $\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{y} \oplus \underset{\sim}{\theta}$

$$\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{y} \oplus (\underset{\sim}{x} \oplus \underset{\sim}{z}) \qquad \underset{\sim}{\theta} = \underset{\sim}{x} \oplus \underset{\sim}{z}$$

$$= (\underset{\sim}{y} \oplus \underset{\sim}{x}) \oplus \underset{\sim}{z} \qquad = \underset{\sim}{\theta} \oplus \underset{\sim}{z} = \underset{\sim}{z}$$

(خواص شرکت‌پذیری) $\underset{\sim}{\theta}$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{z}$$

قضیه ۲: عضو خنثی در عمل جمع در فضای برداری یکتاست

فرض کنیم در فضای برداری V دو عضو خنثی مثل $\underset{\sim}{\theta}$ و $\underset{\sim}{\theta}'$ وجود داشته باشند

$$\begin{cases} \underset{\sim}{\theta} + \underset{\sim}{\theta}' = \underset{\sim}{\theta}' \\ \underset{\sim}{\theta} + \underset{\sim}{\theta}' = \underset{\sim}{\theta} \end{cases} \Rightarrow \underset{\sim}{\theta} = \underset{\sim}{\theta}'$$

قضیه ۳: اگر $\underset{\sim}{x}$، $\underset{\sim}{y}$، $\underset{\sim}{z}$ اعضای فضای برداری باشند به طوری که $\underset{\sim}{z} \oplus \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{y} \oplus \underset{\sim}{x}$ آن‌گاه $\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{z}$ (قاعده حذف)

می‌دانیم $\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{y} \oplus \underset{\sim}{\theta} = \underset{\sim}{y} \oplus (\underset{\sim}{x} \oplus (-\underset{\sim}{x}))$

$= (\underset{\sim}{y} \oplus \underset{\sim}{x}) \oplus (-\underset{\sim}{x})$ (شرکت‌پذیری) $= (\underset{\sim}{x} \oplus \underset{\sim}{y}) \oplus (-\underset{\sim}{x})$ (جابجایی)

$= (\underset{\sim}{z} \oplus \underset{\sim}{x}) \oplus (-\underset{\sim}{x}) = (\underset{\sim}{x} \oplus \underset{\sim}{z}) \oplus (-\underset{\sim}{x})$ (از فرض)

$= \underset{\sim}{z} \oplus (\underset{\sim}{x} \oplus (-\underset{\sim}{x})) = \underset{\sim}{z} \oplus \underset{\sim}{\theta} = \underset{\sim}{z}$ ($\underset{\sim}{x} \oplus (-\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{\theta}$)

$$\Rightarrow \underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{z}$$

©MICRO

Subject : Date

نتیجه: اگر $x \oplus y = x \oplus \theta \Rightarrow y = \theta$ آن‌گاه $x \oplus y = x$

قضیه ۴: اگر V فضای برداری باشد آن‌گاه

$$\forall x \in V \; ; \; 0 \odot x = \theta$$

$$\theta \oplus (0 \odot x) = 0 \odot x$$

از تعریف عضو خنثی

$$= (0+0) \odot x = (0 \odot x) \oplus (0 \odot x)$$

توزیعی اسکالر

$$\xrightarrow{\text{قاعده حذف}} \theta = 0 \odot x$$

نتیجه: بین عضو خنثی عمل جمع در هر فضای برداری رابطه توان با ضرب صفر در هر عضو برقرار است.

قضیه ۵: اگر θ عضو خنثی یک فضای برداری باشد آن‌گاه $c \odot \theta = \theta$

$$\forall c \in R$$

از خاصیت توزیعی بردار داریم:

$$(c \odot \theta) \oplus (c \odot \theta) \overset{\text{توزیعی بردار}}{=} c \odot (\theta \oplus \theta)$$

چون θ عضو خنثی $\theta = \theta \oplus \theta$

$$= c \odot \theta$$

$$\xrightarrow{\text{از قاعده حذف}} c \odot \theta = \theta \oplus (c \odot \theta) \overset{\text{از تعریف عضو خنثی}}{=} (c \odot \theta)$$

قضیه ۶: اگر V یک فضای برداری باشد آن‌گاه قرینه هر عضو V برابر است با حاصلضرب اسکالر عدد -1 در آن عضو: $\forall x \in V \; ; \; -x = (-1) \odot x$

$$x \oplus (-x) = \theta \overset{\text{قضیه ۴}}{=} 0 \odot x = (1 + (-1)) \odot x$$

طبق تعریف قرینه

$$= (1 \odot x) \oplus ((-1) \odot x) = x \oplus ((-1) \odot x)$$

طبق تعریف ضرب اسکالر، $1 = 1 \cdot 1$

$$\Rightarrow -x = (-1) \odot x$$

Scanned with CamScanner

Subject : Date

نکته : پس برای قرینه اعضای یک فضای برداری کافیست از $x \odot -1$ استفاده شود

قضیه : اگر V فضای برداری باشد آن گاه $x \oplus x = 2 \odot x$

$$x \oplus x = (1 \odot x) \oplus (1 \odot x) \overset{\text{توزیع}}{=} (1+1) \odot x = 2 \odot x$$

(1 ⊙ x) ⊕ (1 ⊙ x) = x ⊕ x (اسکالر)

$$= (1 \oplus 1) \odot x$$

زیرفضا بردار :

هر زیرمجموعه غیرتهی مثل W از فضای برداری مثل V را زیرفضا آن می نامیم اگر W نسبت به جمع برداری و ضرب اسکالر حاکم بر V، خود یک فضای برداری باشد (یعنی تمام ویژگیهای لازم را داشته باشد)

قضیه ۸ : اگر V یک فضای برداری و W زیرمجموعه غیرتهی از V باشد آن گاه شرط لازم و کافی برای اینکه W زیرفضای V باشد این است که W نسبت عمل جمع برداری و ضرب اسکالر حاکم بر V بسته باشد

$$\forall c \in R,\ \forall x, y \in W,\quad x \oplus y \in W,\ c \odot x \in W$$

(توضیح کتاب)

برقرار است ← اضافه میکنیم ← طبق تعریف ← W زیرفضای V

(یعنی به جای ده خاصیت کافیست همین دو خاصیت بررسی شود برای زیرفضا بودن)

نکته : هر فضای برداری دو زیرفضای خاص دارد یکی خود فضای برداری V یعنی $W = V$ و دیگری مجموعه که تنها عضو آن بردار صفر (θ) است یعنی $W = \{\theta\}$ که به فضا صفر نیز معروف است.

مثال : فرض کنید $V = \left\{ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mid x_1, x_2, x_3 \in R \right\}$ نشان دهید

$W_1 = \left\{ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ x_1 \in R \right\}$ ← زیرفضا برداری است

$W_2 = \left\{ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ x_1 \in Z \right\}$ ← زیرفضا برداری نیست

©MICRO®

$\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y} \in W_1 \Rightarrow \underset{\sim}{x} \oplus \underset{\sim}{y} = \begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ \circ \\ \circ \end{bmatrix} \in W_1$ ← پس زیرفضا بردار است

$\forall c \in \mathbb{R}, \underset{\sim}{x} \in W_1 \Rightarrow c \odot \underset{\sim}{x} = \begin{bmatrix} cx_1 \\ \circ \\ \circ \end{bmatrix} \in W_1$

if $c = \sqrt{2}$ and $x_1 = 1 \Rightarrow c \odot \underset{\sim}{x} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \circ \\ \circ \end{bmatrix} \notin W_2$ ← $\notin \mathbb{Z}$

ترکیب خطی از بردارها :

مجموعه $X = \{\underset{\sim}{x}_1, \dots, \underset{\sim}{x}_k\}$ از اعضای بردار مثل V انتخاب شده اند در نظر بگیرید آن گاه برای اسکالرهای $c_1, \dots, c_k$ ترکیب زیر را یک ترکیب خطی از مجموعه X می نامند.

$c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R} \quad \underset{\sim}{y} = c_1 \underset{\sim}{x}_1 + \dots + c_k \underset{\sim}{x}_k$

$\underset{\sim}{x}_1, \dots, \underset{\sim}{x}_k \in V$

طبق خواص فضای بردار $\underset{\sim}{y} \in V$ است (چون جمع بسته است)

مثال ۱ به عنوان مثال فرض کنید $X = \left\{ \underset{\sim}{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}, \underset{\sim}{x}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \underset{\sim}{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$

آن گاه $\underset{\sim}{y} = 2\underset{\sim}{x}_1 + 3\underset{\sim}{x}_2 - 4\underset{\sim}{x}_3$ یک ترکیب خطی از X است

$$\underset{\sim}{y} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -2 \\ 11 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 29 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 11 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}}^{X} \overbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}}^{\underset{\sim}{c}}$$

دقت کنید ترکیب خطی از بردارها یک بردار است.

$(2 \quad 3 \quad -4)\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}'$

مثال ۲ : فرض کنید $D = \{f, g\}$ یک زیرفضا بردار متشکل از دو عضو f و g از مجموعه توابع حقیقی مقدار با دامنه حقیقی

$f = t^2 - 1 \qquad g = t + 4 \qquad c_1 = -2 \qquad c_2 = 1$

$u = -2(t^2 - 1) + (t + 4) = -2t^2 + t + 6$

← ترکیب خطی از f و g که عضو فضا بردار است.

©MICRO®

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال ۳: بررسی کنید که آیا $Y=\begin{bmatrix}3\\2\\5\end{bmatrix}$ ترکیب خطی از $X=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$ است یا خیر؟ یعنی c_1, c_2 وجود دارد که

$$c_1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}c_1+c_2\\c_2\\-c_1+2c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases}c_1+c_2=3\\c_2=2\\-c_1+2c_2=5\end{cases}$$

$\Rightarrow c_2=2 \rightarrow c_1=1 \Rightarrow$ اما در معادله سوم صدق نمی‌کند پس دستگاه جواب ندارد و Y را نمی‌توان به صورت ترکیب خطی از اعضای X نوشت.

$$\begin{bmatrix}1&1&3\\0&1&2\\-1&2&5\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&3\\0&1&2\\0&3&8\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&3\\0&1&2\\0&0&2\end{bmatrix}$$ دستگاه جواب ندارد

مثال ۴:

اما Y را می‌توان به صورت ترکیب خطی از $X=\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ نوشت $=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$

$$c_1\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}2c_1+c_2+2c_3=-2\\c_1+2c_2=0\\3c_1+c_3=1\end{cases}$$

دستگاه را از روش گاوس حل کنید

$$\begin{bmatrix}2&1&2&|&-2\\1&2&0&|&0\\3&0&1&|&1\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{عوض کنیم}]{\text{سطر ۲ با سطر ۱}}\begin{bmatrix}1&2&0&|&0\\2&1&2&|&-2\\3&0&1&|&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{-۳ برابر سطر اول با سطر سوم جمع کنیم}]{\text{-۲ برابر سطر اول با سطر دوم جمع کنیم}}\begin{bmatrix}1&2&0&|&0\\0&-3&2&|&-2\\0&-6&1&|&1\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{و با برابر کنیم}]{\text{سطر ۲ را در } -\frac{1}{3}}\begin{bmatrix}1&2&0&|&0\\0&1&-\frac{2}{3}&|&\frac{2}{3}\\0&0&-3&|&5\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1&2&0&|&0\\0&1&-\frac{2}{3}&|&\frac{2}{3}\\0&0&1&|&-\frac{5}{3}\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1+2x_2=0\\x_2-\frac{2}{3}x_3=\frac{2}{3}\\x_3=-\frac{5}{3}\end{cases}$$

جواب یکتا دارد

همه ستون‌ها در ستون آخر دارای پیشرو دارد

PdPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$c_3 = -\frac{5}{3} \qquad c_2 = -\frac{4}{9} \qquad c_1 = \frac{8}{9}$$

پس y ترکیب خطی به صورت زیر از X است:

$$\frac{8}{9}\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} - \frac{4}{9}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} - \frac{5}{3}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$$

تعریف گستره (span): فرض کنید V یک فضای برداری و X زیرمجموعه‌ای متناهی از آن باشد. در این صورت مجموعه کلیه ترکیبات خطی از اعضای X را گستره X می‌نامیم و با $sp(X)$ نشان می‌دهیم.

$$X = \{x_1, \dots, x_k\} \subset V$$

$$sp(X) = \{x \in V \mid x = c_1x_1 + \dots + c_kx_k,\ c_1 \dots c_k \in \mathbb{R}\}$$

قضیه: اگر V یک فضای برداری و $X = \{x_1 \dots x_k\} \subset V$ باشند و تعریف کنیم $W = sp(X)$ آن‌گاه W یک زیرفضای V است.

برهان: کافیست نشان دهیم W نسبت به جمع بردارها و ضرب اسکالر بسته است.

فرض کنید $x, y \in W$: برای راحتی $\oplus$ به جای $+$ و $\odot$ به جای $\cdot$.

$$x = c_1x_1 + \dots + c_kx_k \qquad c_1 \dots c_k \in \mathbb{R}$$

$$y = d_1x_1 + \dots + d_kx_k \qquad d_1 \dots d_k \in \mathbb{R}$$

آن‌گاه

$$x + y = \underbrace{(c_1 + d_1)}_{a_1}x_1 + \dots + \underbrace{(c_k + d_k)}_{a_k}x_k$$

$$= a_1x_1 + \dots + a_kx_k \in W$$

یک ترکیب خطی از X

P4PCO

Subject :

Year. Month. Date. ( )

$\alpha \underset{\sim}{x} = c_1 \underset{\sim}{x_1} + \cdots + c_k \underset{\sim}{x_k} \in W$

ترکیب خطی از x

$\Rightarrow a\underset{\sim}{x} = \underbrace{ac_1}_{b_1}\underset{\sim}{x_1} + \cdots + \underbrace{ac_k}_{b_k}\underset{\sim}{x_k} = b_1\underset{\sim}{x_1} + \cdots + b_k\underset{\sim}{x_k}$

$\in W$

تعریف مولد: اگر X یک زیرمجموعه متناهی از V باشد به طوری که $W = Sp(X)$، در این صورت X را مولد W می‌نامند (به عبارت دیگر X زیرفضا مثل W از فضای برداری V به وجود آورده است)

مثال ۱: فرض کنید $X = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cdot \\ -2 \\ \cdot \end{pmatrix} \right\}$ آن‌گاه

$$W = Sp(X) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \cdot \\ -2 \\ \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1 \\ -2c_2 \\ \cdot \end{pmatrix} , \forall c_1, c_2 \in R \right\}$$

مثال ۲: اگر مجموعه $D = \{P, g\}$ از چندجمله‌ای‌های از درجه n و کمتر با شرط برای مثال فرض کنید

$g = t+1$ و $P = t-1$ مثلاً g و P درجه ۲ و کمتر با شرط

آن‌گاه D مولد زیرفضای P_2 است، مجموعه چندجمله‌ای‌ها درجه یک و یا کمتر است.

$$Sp(D) = \{ c_1(t+1) + c_2(t-1) \; ; \; c_1, c_2 \in R \}$$

$$= \{ (c_1+c_2)t + (c_1-c_2) \} \rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = a_1 & c_1 = \frac{a_1 - a_2}{2} \\ c_1 - c_2 = a_2 & c_2 = \frac{a_1 + a_2}{2} \end{cases}$$

به ازای هر a_1 و a_2 دستگاه جواب دارد پس D مولد P_1 است.

پس D مولد زیرفضای P_1 است (چندجمله‌ای درجه ۱ و یا کمتر)

مثال ۳: $D = \{P, g, h\}$ ، $P = t+1$ ، $g = t^2 - 1$

$h = 2t - 1$ مثال دهید D مولد زیرفضای P_2 است

(چندجمله‌ای درجه ۲ و یا کمتر)

P4PCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$Sp(D) = \{ c_1(t+1) + c_2(t^2-1) + c_3(2t-1) \;,\; c_1,c_2,c_3 \in R \}$$

$$= \{ \underbrace{c_2}_{a_1} t^2 + (\underbrace{c_1 + 2c_3}_{a_2}) t + (\underbrace{c_1 - c_2 - c_3}_{a_3}) \;,\; c_1,c_2,c_3 \in R \}$$

$$= \{ a_1 t^2 + a_2 t + a_3 \;,\; a_1,a_2,a_3 \in R \}$$

$$\begin{cases} c_2 = a_1 \\ c_1 + 2c_3 = a_2 \\ c_1 - c_2 - c_3 = a_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{1}{3}(2a_1 + a_2 + 2a_3) \\ c_2 = a_1 \\ c_3 = \frac{1}{3}(a_2 - a_3 - a_1) \end{cases}$$

پس برای a_1, a_2, a_3 دستگاه فوق جواب دارد پس P_2 مولد است.

مثال ۴: آیا مجموعه‌ی زیر یک مولد R^2 است.

$$X_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \qquad X_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$Sp(X_1) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \;;\; c_1, c_2 \in R \right\}$$

بیایم c_1 و c_2 رو حساب کنیم: یعنی باید

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = a_1 \\ c_1 + 2c_2 = a_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} c_1 = 2a_1 - a_2 \\ c_2 = a_2 - a_1 \end{matrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & a_1 \\ 1 & 2 & a_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 - a_1 \end{bmatrix}$$

پس به ازای a_1, a_2 دستگاه جواب دارد $\Rightarrow X_1$ مولد R^2 است

$$Sp(X_2) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \;,\; c_1, c_2 \in R \right\}$$

$$\begin{cases} -2c_1 + c_2 = a_1 \\ 4c_1 - 2c_2 = a_2 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} -2 & 1 & a_1 \\ 4 & -2 & a_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -a_1/2 \\ 0 & 0 & 2a_1 + a_2 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow c_2 = a_1 + 2c_1 \rightarrow 4c_1 - 2(a_1 + 2c_1) = a_2$

$\Rightarrow -2a_1 = a_2$ دستگاه جواب ندارد. $\rightarrow c_1, c_2$ جوابدار

P4PCO

• **قضیه ۱۰:** فرض کنید $X = \{x_1, \dots, x_{k-1}, x_k\}$ یک زیرمجموعه متناهی از بردارهای فضای برداری V باشد و $X' = \{x_1, \dots, x_{k-1}\}$ باشد در این صورت

$$Sp(X) = Sp(X') \iff x_k \text{ ترکیب خطی از } x_1, \dots, x_{k-1} \text{ باشد}$$

اثبات: فرض کنید x_k ترکیب خطی از $x_1, \dots, x_{k-1}$ باشد ثابت می‌کنیم $Sp(X) = Sp(X')$

اولا چون $X' \subseteq X$ بدیهی است $Sp(X') \subseteq Sp(X)$ (*)

$$X = \{x_1, \dots, x_k\}$$

$$Sp(X) = \{x \in V \mid x = c_1 x_1 + \dots + c_k x_k \quad c_1, \dots, c_k \in R\}$$

$$Sp(X') = \{x \in V \mid x = c_1 x_1 + \dots + c_{k-1} x_{k-1}, \quad c_1, \dots, c_{k-1} \in R\}$$

با برهان خلف ثابت کنیم $Sp(X') \supseteq Sp(X)$ یعنی هر بردار $x \in Sp(X)$ باید در $Sp(X')$ هم باشد یعنی $x \in Sp(X')$ است.

$$x \in Sp(X) \Rightarrow x = c_1 x_1 + \dots + c_k x_k \quad (1)$$

طبق فرض x_k ترکیب خطی از $x_1, \dots, x_{k-1}$ است پس

$$x_k = d_1 x_1 + \dots + d_{k-1} x_{k-1} \quad (2)$$

از (1) و (2) پس داریم:

$$x = c_1 x_1 + \dots + c_k (d_1 x_1 + \dots + d_{k-1} x_{k-1})$$

$$= \underbrace{(c_1 + c_k d_1)}_{a_1} x_1 + \dots + \underbrace{(c_{k-1} + c_k d_{k-1})}_{a_{k-1}} x_{k-1}$$

$$\Rightarrow x = a_1 x_1 + \dots + a_{k-1} x_{k-1} \Rightarrow x \in Sp(X')$$

$$\Rightarrow Sp(X) \subseteq Sp(X') \quad (**)$$

$$*, ** \Rightarrow Sp(X) = Sp(X')$$

$Sp(X) = \{ \underset{\sim}{x} \in V \mid \underset{\sim}{x} = c_1 \underset{\sim}{x}_1 + \cdots + c_k \underset{\sim}{x}_k \}$ $\quad c_1 = 0 \cdots c_{k-1} = 0$, $c_k = 1$

$\Rightarrow \underset{\sim}{x}_k \in Sp(X)$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

ب) فرض کنیم $Sp(X) = Sp(X')$ بدیهی است که $\underset{\sim}{x}_k$ ترکیب خطی از $\underset{\sim}{x}_1 \cdots \underset{\sim}{x}_{k-1}$ است حال چون $\underset{\sim}{x}_k \in Sp(X)$ است پس بنابر فرض $\underset{\sim}{x}_k \in Sp(X')$ است پس می‌توان آن را به صورت ترکیب خطی از اعضای X' نوشت یعنی

$$\underset{\sim}{x}_k \in Sp(X') \Rightarrow \underset{\sim}{x}_k = c_1 \underset{\sim}{x}_1 + \cdots + c_{k-1} \underset{\sim}{x}_{k-1}$$

پس $\underset{\sim}{x}_k$ ترکیب خطی از $\underset{\sim}{x}_1 \cdots \underset{\sim}{x}_{k-1}$ است.

(هر عضو یک فضا عضو اسپن آن هم است چون می‌توان به صورت ترکیب خطی نوشت) span

نکته: پس حذف یک بردار از یک مجموعه گسترده آن مجموعه را تغییر نمی‌دهد اگر و تنها اگر آن بردار یک ترکیب خطی از بقیه بردارهای آن مجموعه باشد.

استقلال خطی: (LIN)

linear ← (LIN) → independent

تعریف

مجموعه X یک زیرمجموعه متناهی از یک فضای برداری V و اعضای آن $X = \{\underset{\sim}{x}_1, \cdots, \underset{\sim}{x}_k\}$ می‌نویسیم

اعضای X مستقل خطی اند اگر

$$c_1 \underset{\sim}{x}_1 + \cdots + c_k \underset{\sim}{x}_k = \underset{\sim}{\theta} \Rightarrow c_1 = \cdots = c_k = 0$$

وابسته خطی

مجموعه $X = \{\underset{\sim}{x}_1 \cdots \underset{\sim}{x}_k\}$ زیرمجموعه متناهی از V را وابسته خطی می‌نویسیم اگر ضرایب $c_1 \cdots c_k$ که همگی صفر نیستند وجود داشته باشند به طوری که $c_1 \underset{\sim}{x}_1 + \cdots + c_k \underset{\sim}{x}_k = \underset{\sim}{\theta}$

پس می‌توان گفت هر مجموعه تک عضوی که تک عضو آن بردار ناصفر نباشد مستقل خطی است

$X = \{\underset{\sim}{x}_1\} \quad c_1 \underset{\sim}{x}_1 = \underset{\sim}{\theta} \Rightarrow c_1 = 0$ ($\underset{\sim}{x}_1 \neq \underset{\sim}{\theta}$)

Subject :

Year. Month. Date. ( )

وهر مجموعه متناهی از بردارها که یکی از اعضای آن بردار صفر است وابسته خطی است.

$X = \{\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{0}\} \rightarrow c_1\underset{\sim}{x}_1 + c_2\underset{\sim}{0} = \underset{\sim}{0} \not\Rightarrow c_2 = 0$

مستقل نیست پس وابسته است.

مثال: کدامیک از زیر مجموعه‌های زیر مستقل خطی است

$$X = \left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\} \qquad X' = \left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}\right\}$$

$$c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 + c_3 = 0 \\ c_3 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow c_1 = 0 \quad c_2 = 0$ پس X مستقل خطی است

X': $c_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ 2c_1 + 2c_3 = 0 \\ 3c_1 + c_2 + 2c_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 2 & 0\\ 3 & 1 & 2 & 0\end{bmatrix} \xrightarrow[\text{سطر سوم} + (-3)\times\text{سطر اول}]{\text{سطر دوم} + (-2)\times\text{سطر اول}} \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 2 & 0\\ 0 & -2 & 2 & 0\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{سطر دوم تقسیم بر } -2} \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -2 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{سطر سوم} + 2\times\text{سطر دوم}]{2\times 2} \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_2 - c_3 = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow c_1 = -t$

$c_2 = t$

$c_3 = t$

ستون سوم مدام پیدا میشود از اینجا جواب داریم.

مثلاً $c_1 = -1 \quad c_2 = 1 \quad c_3 = 1$

$\exists\, c_1, c_2, c_3 \neq 0 \Rightarrow c_1\underset{\sim}{x}_1 + c_2\underset{\sim}{x}_2 + c_3\underset{\sim}{x}_3 = \underset{\sim}{0}$

پس وابسته خطی است.

P4PCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

مثال ۲: زیرمجموعه‌ای از فضای $D = \{\overbrace{2t^2+t-1}^{f}, \overbrace{2t-t^2}^{g}, \overbrace{2-3t}^{h}\}$ بردارهای چندجمله‌ای درجه ۲ و کمتر را تشکیل می‌دهند مستقل خطی است.

$$c_1 f + c_2 g + c_3 h = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

$$2c_1 t^2 + c_1 t - c_1 + 2c_2 t - c_2 t^2 + 2c_3 - 3c_3 t = 0$$

$$\Rightarrow (2c_1 - c_2)t^2 + (c_1 + 2c_2 - 3c_3)t + 2c_3 - c_1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2c_1 - c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 2c_1 \\ c_1 + 2c_2 - 3c_3 = 0 \\ 2c_3 - c_1 = 0 \Rightarrow c_3 = c_1/2 \end{cases} \Rightarrow c_1 + 4c_1 - \frac{3}{2}c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = c_3 = 0$$

حضور ۱۱: اگر مجموعه $X = \{\underset{\sim}{x_1}, \dots, \underset{\sim}{x_k}\}$ یک مجموعه مستقل خطی از بردارها باشد آن‌گاه هر زیرمجموعه از X نیز مستقل خطی است.

برهان خلف:

اثبات: فرض کنید $X' = \{\underset{\sim}{x_1}, \dots, \underset{\sim}{x_r}\}$, $r \le k$, $X' \subset X$ مستقل خطی نباشد

پس ضرایب $c_1, \dots, c_r$ وجود دارد که همگی صفر نیستند به طوری که

$$c_1 \underset{\sim}{x_1} + \dots + c_r \underset{\sim}{x_r} = \underset{\sim}{0}$$

دو طرف معادل می‌توانیم بنویسیم:

$$c_1 \underset{\sim}{x_1} + \dots + c_r \underset{\sim}{x_r} + 0\,\underset{\sim}{x_{r+1}} + \dots + 0\,\underset{\sim}{x_k} = \underset{\sim}{0}$$

که با مستقل خطی بودن X تناقض دارد

P4PCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

قضیه ۱۲: فرض کنید $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ مجموعه‌ای از بردارهای غیرصفر از فضای برداری V باشد. آن‌گاه X وابسته خطی است اگر و تنها اگر یکی از اعضای آن یک ترکیب خطی از سایر اعضای X باشد.

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

اثبات شرط کافی: فرض کنید یکی از اعضای X مثلاً x_j $(j>1)$ یک ترکیب خطی از بقیه (بردارهای قبل از خود) باشد:

$$x_j = c_1 x_1 + \dots + c_{j-1} x_{j-1} + c_{j+1} x_{j+1} + \dots + c_k x_k$$

$$\Rightarrow c_1 x_1 + \dots + c_{j-1} x_{j-1} - x_j + c_{j+1} x_{j+1} + \dots + c_k x_k = 0$$

اگر x_j برابر صفر باشد، رابطه خطی بدون x_j برقرار است.

$$\Rightarrow c_1 x_1 + \dots + c_{j-1} x_{j-1} + c_{j+1} x_{j+1} + \dots + c_k x_k = 0$$

$X = \{x_1, \dots, x_k\}$

به هر حال فرضی مخالف صفر وجود دارد که رابطه با بردار برابر شد $(c_j = -1)$ پس طبق تعریف وابسته خطی است.

شرط لازم: فرض کنید X وابسته خطی است. نشان می‌دهیم یکی از اعضای آن را می‌توان به شکل یک ترکیب خطی از بقیه نوشت. چون X وابسته خطی است ضرایب $c_1, \dots, c_k$ که همگی صفر نیستند وجود دارند، طوری که

$$c_1 x_1 + \dots + c_{j-1} x_{j-1} + c_j x_j + c_{j+1} x_{j+1} + \dots + c_k x_k = 0$$

فرض کنید $c_j \neq 0$ پس داریم:

$$x_j = -\frac{c_1}{c_j} x_1 + \dots - \frac{c_{j-1}}{c_j} x_{j-1} - \frac{c_{j+1}}{c_j} x_{j+1} - \dots - \frac{c_k}{c_j} x_k$$

$$= a_1 x_1 + \dots + a_{j-1} x_{j-1} + a_{j+1} x_{j+1} + \dots + a_k x_k$$

پس x_j یک ترکیب خطی از بقیه است.

PqPCO

Subject :

Year . Month . Date . ( )

پایه : اگر مجموعه مستقل خطی X مولد زیرفضا W از فضا برداری V باشد آن گاه X را یک پایه برای W می نامیم. بنابراین برای اثبات این که مجموعه متناهی X یک پایه برای W است لازم و کافیست که نشان دهیم :

۱) X مستقل خطی است ، ۲) X مولد W است

(اگر پایه X به راحتی و بدون حل معادله اعضای زیرفضا را تولید کنند ، X پایه صلبی می گویند)

مثال : مجموعه $X = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \right\}$ را در نظر بگیرید. آیا X یک پایه برای R^3 است

① استقلال خطی

$$c_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1+c_2+c_3=0 \\ c_1+2c_2+c_3=0 \\ c_1+c_2+2c_3=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_2+2c_2=0 \Rightarrow c_2=0 \\ c_1+c_3=2c_2 \end{cases} \quad \begin{matrix} c_1=0 \\ c_3=0 \end{matrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \begin{matrix} c_1=0 \\ c_2=0 \\ c_3=0 \end{matrix}$$

پس X مستقل خطی است

② اکنون نشان می دهیم X مولد R^3 است

$$Sp(X) = \left\{ c_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \right\}$$ (فضای تولید شده)

یک عضو R^3 $\Rightarrow$

$$\Rightarrow c_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} c_1+c_2+c_3=a_1 \\ c_1+2c_2+c_3=a_2 \\ c_1+c_2+2c_3=a_3 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a_1 \\ 1 & 2 & 1 & a_2 \\ 1 & 1 & 2 & a_3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{۱- بار سطر اول با سطر دوم و سطر سوم}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_2-a_1 \\ 0 & 0 & 1 & a_3-a_1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} c_1+c_2+c_3=a_1 \\ c_2=a_2-a_1 \\ c_3=a_3-a_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow c_1 = 3a_1-a_2-a_3$$

پس X مولد R^3 است و نتیجه X پایه برای R^3 است

P4PCO

Subject:
Year: Month: Date: ( )

پایه طبیعی: برای هر فضای برداری (زیرفضای برداری) می‌توان پایه طبیعی تعریف نمود.

پایه طبیعی برای یک فضای برداری (زیرفضای برداری) عبارت است از پایه‌ای که به راحتی اعضای فضا را تولید کند. (بنا به حل معادله)

مثال ۲: $X=\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\}$ یک پایه طبیعی است برای R^2 اول باید بررسی کنیم پایه برای R^2 است

$$c_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}c_1=0\\c_2=0\end{cases}$$

بدون حل معادله →

$$c_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}c_1=a_1\\c_2=a_2\end{cases}$$

یعنی هر عضو دلخواه مثل $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$ از R^2 را می‌توان به راحتی برحسب اعضای X نوشت

پس $X=\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\}$ یک پایه طبیعی برای R^2 است

$$c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{matrix}c_1=0\\c_2=0\\c_3=0\end{matrix}$$

$$c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{matrix}c_1=a_1\\c_2=a_2\\c_3=a_3\end{matrix}$$

پس پایه طبیعی برای P_1: $\{t,1\}$، برای P_2: $\{t^2,t,1\}$ و ...

برای P_n: $\{t^n,t^{n-1},\dots,t,1\}$

$D=\{\overbrace{t^2}^{f},\overbrace{t}^{g},\overbrace{1}^{h}\}$

$c_1t^2+c_2t+c_3=0\Rightarrow c_1=c_2=c_3=0$

$c_1t^2+c_2t+c_3=u\Rightarrow$ D مولد P_2 است

$c_1t^2+c_2t+c_3=u$ ↓ یک عضو دلخواه از P_2

مولد شدن یعنی هر $a_1t^2+a_2t+a_3=u$ است

P4PCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

مثال: مجموعه $D=\{f,g,h\}$ از P_2 یک پایه برای P_2 است.

(تمرین)

$f(t)=2t^2+t-1$

$g(t)=2t-t^2$ $\quad h(t)=2-3t$

$c_1f+c_2g+c_3h=0 \Rightarrow \begin{matrix}c_1=0\\ c_2=0\\ c_3=0\end{matrix}$ مستقل خطی است

$(2c_1-c_2)t^2+(c_1+2c_2-3c_3)t+2c_3-c_1=0$ $\Leftrightarrow \begin{cases}2c_1-c_2=0\\ c_1+2c_2-3c_3=0\\ 2c_3-c_1=0\end{cases}$

$c_1f+c_2g+c_3h=u$ از طرفی

$(2c_1-c_2)t^2+(c_1+2c_2-3c_3)t+(-c_1+2c_3)=u$

جمله عمومی

$=a_1t^2+a_2t+a_3$

$\Rightarrow \begin{cases}2c_1-c_2=a_1\\ c_1+2c_2-3c_3=a_2\\ -c_1+2c_3=a_3\end{cases}$

سپس از تعداد متغیرها سطر

$\left[\begin{array}{ccc|c}2&-1&0&a_1\\1&2&-3&a_2\\-1&0&2&a_3\end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}1&2&-3&a_2\\0&1&-6/5&\frac{2a_2-a_1}{5}\\0&0&1&a_2+5a_3+2a_1/7\end{array}\right]$

سطوط همه ستونها جز ستون آخر را به صفر و دارد

دستگاه جواب دارد (جواب یکتا)

پس D مولد P_2 است و در نتیجه D یک پایه برای P_2 است

مثال: آیا $X=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}\right\}$ پایه R^3 است.

جمع

وابسته خطی

$\begin{cases}c_1+c_2=0 \Rightarrow -c_1=+c_2\\ 2c_1+2c_3=0 \Rightarrow c_3=-c_1\\ 3c_1+c_2+2c_3=0 \Rightarrow 3c_1-c_1-2c_1=0\end{cases}$

Subject :

Year . Month . Date . ( )

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 2 & 0 & 2 & | & 0 \\ 3 & 1 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -2 & 2 & | & 0 \\ 0 & -2 & 2 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین جواب داده $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ تنها جواب بنت

ابتدا قضیه ۱۲ اثبات شود مجموعه وابسته خطی است و نمی تواند پایه باشد.

قضیه ۱۳ از بعد خطی: فرض کنید $X = \{x_1 \dots x_n\}$ یک پایه برای فضای برداری V باشد آن گاه الف) هر زیر مجموعه n عضوی مستقل خطی از V، یک پایه برای آن است

ب) هر زیر مجموعه از V که دارای بیش از n بردار باشد، وابسته خطی است

ج) هر زیر مجموعه از V که دارای کمتر از n بردار باشد، نمی تواند برای V پایه باشد.

برای الف) فرض کنید $Y = \{y_1 \dots y_n\}$ زیر مجموعه مستقل خطی دیگر از V باشد چون X مستقل خطی است هیچکدام از اعضای آن نمی تواند $\underline{0}$ باشد. چون X پایه برای V است پس می توان نوشت (X مستقل خطی است و X مولد V است)

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n$$

یک عضو از فضا و چون X پایه است مولد V است و هر عضو آن را می تواند تولید کند

فرض کنید $a_{11} \neq 0$ می داریم

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}y_1 - \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \dots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n$$

تعریف می کنیم $Y_1 = \{y_1, x_2 \dots x_n\}$ و $X_1 = \{y_1, x_1, x_2 \dots x_n\}$

از قضیه ۱۰ : $V = Sp(X) = Sp(X_1) = Sp(Y_1)$

چون y_1 ترکیبی از $x_1 \dots x_n$ است و x_1 ترکیبی خطی از $y_1, x_2 \dots x_n$

پس $Sp(X) = Sp(X_1)$ و x_1 ترکیبی از $x_2 \dots x_n$

$Sp(X_1) = Sp(Y_1)$ است $y_1, x_2 \dots$

P4PCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$V = sp(Y_1)$ ، Y_1 مولد V است می‌توان نوشت

یک عضو V :

$$y_2 = a_{21} y_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n$$

فرض کنید $a_{22} \neq 0$:

$$x_2 = -\frac{a_{21}}{a_{22}} y_1 + \frac{1}{a_{22}} y_2 - \frac{a_{23}}{a_{22}} x_3 - \cdots - \frac{a_{2n}}{a_{22}} x_n$$

حال اگر تعریف کنیم $Y_2 = \{y_1, y_2, x_3, \ldots, x_n\}$ از قضیه ۱۰ :

$X_2 = \{y_1, y_2, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ترکیبی از x_2 و y_1, y_2 حذف نشود

$$V = sp(Y_2)$$

با ادامه استدلال به همین ترتیب (لغو دانه یک y و حذف یک x) :

$$V = sp(Y_n)$$

که همان Y خواهد شد

$$= sp(Y)$$

چون Y مستقل خطی است و مولد V پس Y یک پایه برای V است.

برگان ب) مجموعه‌ی $Z = \{z_1, \ldots, z_k\}$ ، $k > n$ را در نظر بگیرید می‌خواهیم ثابت کنیم Z وابسته خطی است. از برهان خلف فرض کنید Z مستقل باشد در این صورت هر زیرمجموعه‌ی دلخواه از آن نیز مستقل خواهد بود پس طبق قسمت الف $Z' = \{z_1, \ldots, z_n\}$ یک پایه برای V است پس هر عضو از V را می‌توان توسط مجموعه Z' تولید نمود پس می‌توان نوشت

عضوی از V

$$z_k = c_1 z_1 + \cdots + c_n z_n$$

که متناقض با فرض مستقل بودن اعضای Z است. ✓

برگ ج) زیرمجموعه $U = \{u_1, \ldots, u_k\}$ ، $k < n$ را در نظر بگیرید فرض کنید U یک پایه برای V باشد پس اعضای U باید مستقل خطی باشند حال بنابر قسمت الف

Subject :
Year . Month . Date . ( )

هر زیرمجموعه k عضوی دلخواه که مستقل است می‌تواند برای V پایه باشد به عبارت دیگر

$X' = \{x_1, \dots, x_k\}$ نیز یک پایه برای V است از طرفی از مجموعه $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ حداقل k عضو است که با پایه بودن X متناقض است پس k نمی‌تواند برای V پایه باشد.

قضیه ۱۴ : فرض کنید $T = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ یک پایه برای فضای برداری V باشد آن‌گاه هر عضو از V را فقط به یک صورت می‌توان برحسب ترکیب خطی از اعضای T نوشت.

اثبات : فرض کنیم یک عضو دلخواه از V مانند x را بتوان به دو شکل زیر برحسب اعضای T نوشت :

$$\begin{cases} x = c_1\alpha_1 + \dots + c_n\alpha_n \\ x = d_1\alpha_1 + \dots + d_n\alpha_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 = (c_1 - d_1)\alpha_1 + \dots + (c_n - d_n)\alpha_n$$

اکنون با توجه به اینکه T پایه برای V است پس اعضای آن مستقل خطی‌اند پس

$$c_1 - d_1 = \dots = c_n - d_n = 0$$

$$\Rightarrow c_1 = d_1, \dots, c_n = d_n$$

قضیه ۱۵ (استخراج پایه) با فرض اینکه مجموعه $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ مولد زیرفضای V باشد آن‌گاه یک زیرمجموعه از X وجود دارد که پایه‌ای برای V است.

اثبات : برای تبدیل مجموعه X به یک پایه (مجموعه مستقل یا پایه باشد) از دو حالت عضو یعنی x_n شروع می‌کنیم هر عضو را که ترکیب خطی از اعضای قبل از خودش باشد را حذف کنید و به این ترتیب یک مجموعه جدید حاصل خواهد شد که علاوه بر مولد بودن X برای V مستقل نیز هست پس یک پایه برای V خواهد بود ■

P4PCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

مثال: فرض کنید W زیرفضایی از R^3 باشد که یک دستگاه مولد مجموعه

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_{x_1}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{x_2}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{x_3}, \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}_{x_4} \right\}$$

تولید می‌شود یعنی X مولد W است. W یک پایه برای W نیاز دارد.

چون اگر $x_3 - x_2$ کنید x_1 بدست می‌آید پس x_3 یعنی

x_3 ترکیب خطی از اعضای قبل از خود است $\Rightarrow x_3 = x_2 - x_1$

پس یک پایه برای W : $X^* = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

است. به طور کلی ابتدا ماتریس یکانی سطری را بدست آورید و ستون‌هایی که دارای پیوت می‌شوند وابسته‌اند

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

پیوت دارد — پیوت دارد — پیوت ندارد

و ستون سوم را حذف می‌کنید یعنی x_3 باید حذف شود.

بعد فضای برداری

بعد یک فضای برداری غیر صفر مانند V که آن را با $\dim(V)$ نشان می‌دهند برابر تعداد اعضای یک پایه برای آن است اگر $\dim(V) = n$ آنگاه V را n بعدی گویند

$\dim(R^3) = 3$

$\dim(R^n) = n$

$\dim(P_2) = 3$ پایه طبیعی $\{t^2, t, 1\}$

$X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ پایه طبیعی

$X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ یک مجموعه (مستقل خطی)

$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

مولد همه $\begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ هاست.

$\dim(W) = 1$ $\quad W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_2 = x_3 = 0 \right\}$

W مولد

Subject:
Year. Month. Date. ( )

ابتدا العبد بر رضا صفحه بلند نشود

قضیه ۱۶ (توسعه پایه) فرض کنید $X = \{x_1, \dots x_k\}$ و $k < n$ یک زیر مجموعه‌ی مستقل از فضای برداری V_n باشد در اینصورت می‌توان پایه‌ای ساخت برای V_n که شامل اعضای X باشد (یا X زیر مجموعه‌ای از آن باشد)

اثبات : فرض کنید $T = \{\alpha_1, \dots \alpha_n\}$ یک پایه برای V_n باشد پس مجموعه‌ی $T' = \{x_1, \dots x_k, \alpha_1, \dots \alpha_n\}$ مولد V_n خواهد بود. حال از قضیه‌ی استخراج پایه می‌توان مجموعه T را به یک پایه برای V_n تبدیل نمود. از α_1 شروع کرده و تا α_n پیش می‌رویم و هرکدام که ترکیب خطی از اعضای قبل از خود بود حذف می‌کنیم و در نهایت مجموعه حاصل "علاوه بر مولد بودن مستقل نیز هست و "T یک پایه برای V_n است و شامل اعضای X نیز است.

مثال : فرض کنید می‌خواهیم یک پایه برای R^3 بسازیم به طوری که شامل $X = \{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\}$ باشد. T را یک پایه طبیعی R^3 در نظر بگیرید.

$$T = \left\{\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}_{\alpha_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}_{\alpha_2}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}_{\alpha_3}\right\}$$

$$T' = \left\{\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}}_{x_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}_{\alpha_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}_{\alpha_2}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}_{\alpha_3}\right\}$$

$\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}\alpha_1 = \alpha_2$ پس α_2 ترکیب خطی از x_1, α_1 و باید حذف شود.

$c_1\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $\Rightarrow c_1 = -1/2 \quad c_2 = 1/2$

$\begin{pmatrix}1/2\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1/2\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

$c_1\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \rightarrow$ c_1 وجود ندارد

P4PCO

Subject :

Year . Month . Date . ( )

قضیه ۱۷ : اگر X یک زیرمجموعه n عضوی از فضای برداری V_n و مولد آن باشد آن‌گاه X یک پایه برای V_n است. (از قضیه استخراج پایه نتیجه می‌شود)

بعد زیرفضا : بعد زیرفضای W از فضای V، عبارت است از تعداد بردارهای موجود در یک پایه برای W.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_2 = x_3 = 0 \right\} \longrightarrow \text{زیرفضا از } R^3$$

$$\dim(W) = 1$$

نتیجه : اگر $X = \{x_1 - x_k\}$ یک زیرمجموعه از فضای برداری V باشد و تعریف کنیم $W = Sp(X)$ آن‌گاه $\dim(W) \leq k$ (چون $W = Sp(X)$ است و W از x_1 تا x_k ساخته می‌شود)

بنابراین وقتی است که اعضای X مستقل باشند.

قضیه ۱۸ : اگر W یک زیرفضای محض فضای برداری V_n باشد آن‌گاه

$$\dim(W) < n$$

$A \subseteq B$ حالت محض $A \subset B$ حالت کلی

برای مثال :

$$P_2 \subset P_3 \Rightarrow \dim(P_2) < \dim(P_3)$$

اثبات : فرض کنید $S = \{\beta_1 - \beta_k\}$ یک پایه برای W باشد می‌دانیم $k \leq n$ زیرا در غیر اینصورت S باید وابسته خطی باشد، خلاف فرض پایه بودنش برای W است حال اگر $k = n$، S باید یک پایه برای V_n باشد (قضیه ۱۵ بی الف) یعنی

$$V_n = Sp(S) = W$$

که خلاف فرض زیرفضای محض بودن W است پس $k < n$ ■

P4PCO

Subject :

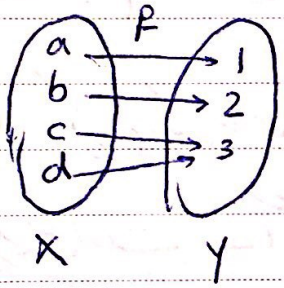
Year . Month . Date . ( )

مختصات و کلریختی :

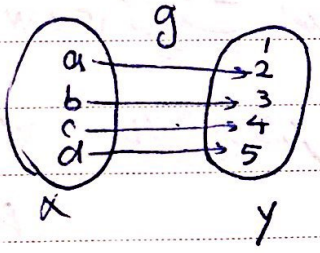
تابع پوشا : تابع $f: X \to Y$ را یک تابع پوشا گوییم هرگاه تصویر f تمام Y را بپوشاند و یا به عبارت دیگر برای هر $y \in Y$ یک $x \in X$ وجود داشته باشد به طوری که $f(x) = y$

تابع یک‌به‌یک : تابع f را یک‌به‌یک گوییم هرگاه به ازای هر x_1 و x_2 از مجموعه X که $x_1 \neq x_2$ باشد آنگاه $f(x_1) \neq f(x_2)$ باشد

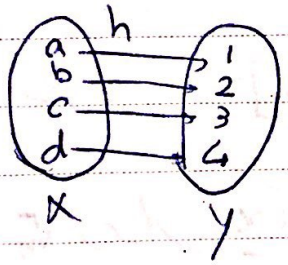
$$\forall x_1, x_2 \in A \; ; \; f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$



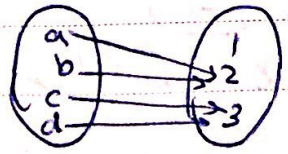
→ پوشاست
یک‌به‌یک نیست



→ g یک‌به‌یک است
ولی پوشا نیست



→ h هم پوشا هم یک‌به‌یک



نه پوشا نه یک‌به‌یک

PqPCO

دو فضای برداری یکریخت:

فرض کنید V فضای برداری با جمع $\oplus$ و ضرب اسکالر $\odot$ و W فضای برداری با جمع $\boxplus$ و ضرب اسکالر $\boxdot$ باشند

می گوییم V با W یکریخت است اگر تابعی یک به یک و پوشا مانند $L: V \to W$ وجود داشته باشد به طوری که داشته باشیم

① $\forall \underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2 \in V \; , \; L(\underset{\sim}{x}_1 \oplus \underset{\sim}{x}_2) = L(\underset{\sim}{x}_1) \boxplus L(\underset{\sim}{x}_2)$

②

$$\forall \underset{\sim}{x} \in V \; ; \; c \in \mathbb{R} \quad : \; L(c \odot \underset{\sim}{x}) = c \boxdot L(\underset{\sim}{x})$$

در این صورت تابع L را نیز یک یکریختی از V به W گویند.

قضیه ۱۹: یکریختی یک خاصیت هم ارزی است یعنی (الف) هر فضای برداری با خودش یکریخت است ب) اگر فضای برداری V با فضای برداری W یکریخت باشد آن گاه W با V یکریخت است. ج) اگر فضای برداری V با فضای برداری W و W با فضای برداری U یکریخت باشد آن گاه V با U یکریخت است.

مثلاً $I_x = x$

اگر لازم برای یک فضا مرتب

اعضای پایه

تعریف: فرض کنید $T = [\underset{\sim}{\alpha}_1 \; \cdots \; \underset{\sim}{\alpha}_n]$ یک پایه مرتب برای فضای برداری V_n و بردار $\underset{\sim}{x}$ یک بردار دلخواه در V_n باشد در اینصورت ستونی $\underset{\sim}{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ که بردار مختصات $\underset{\sim}{x}$ نسبت به پایه مرتب T گفته می شود و با $[\underset{\sim}{x}]_T$ نشان داده می شود اینچنین نوشته می شود

$$\underset{\sim}{x} = a_1 \underset{\sim}{\alpha}_1 + \cdots + a_n \underset{\sim}{\alpha}_n$$

P4PCO

Subject :

Year . Month . Date . ( )

نکته : اگر عناصر پایه مرتب $T=[\underset{\sim}{\alpha}_n, \underset{\sim}{\alpha}_{n-1} \dots \underset{\sim}{\alpha}_1]$ به شکل T' عوض کنیم آنگاه

تصویر بردار $\underset{\sim}{x}$ نسبت به T' $\quad [\underset{\sim}{x}]_{T'} = \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_1 \end{bmatrix}$

مثال ۱ : فرض کنید $T=[3t+1, t-1]$ پایه مرتب برای P_1 باشد اگر $x=4t+4$ بردار x نسبت به T باشد $[x]_T$ را بدست آورید.

$$4t+4 = a_1(3t+1) + a_2(t-1)$$

$$\Rightarrow 4t+4 = (3a_1+a_2)t + (a_1-a_2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a_1+a_2=4 \\ a_1-a_2=4 \end{cases} \Rightarrow a_1=2 \quad a_2=-2$$

$$[x]_T = \underset{\sim}{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

مثال ۲ : فرض کنید $T=[\underset{\sim}{\alpha}_1, \underset{\sim}{\alpha}_2, \underset{\sim}{\alpha}_3]$ که $\underset{\sim}{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underset{\sim}{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ یک پایه مرتب برای R^3 و بردار $\underset{\sim}{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ، $\underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ بردار $\underset{\sim}{x}$ نسبت به T باشد $[\underset{\sim}{x}]_T$ را بدست آورید

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a_1+a_2+a_3=0 \\ a_1+2a_2=4 \\ 2a_1-a_2+a_3=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1=-2 \\ a_2=3 \\ a_3=1 \end{cases}$$

$$[\underset{\sim}{x}]_T = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

تذکر: بردارهای مختصات اعضای یک فضای بردار n بعدی، اعضای R^n هستند و علاوه بر آن هر عضو R^n بردار مختصات یک و تنها یک عضو یک فضای بردار n بعدی نسبت به یک پایه ی مرتب است.

قضیه ۲۰: فرض کنید T یک پایه مرتب برای فضای بردار V باشد. در این صورت می توان نوشت

$$\forall \underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y} \in V: \quad [\underset{\sim}{x} \oplus \underset{\sim}{y}]_T = [\underset{\sim}{x}]_T \oplus [\underset{\sim}{y}]_T$$

$$\forall c \in R \quad [c \odot \underset{\sim}{x}]_T = c \odot [\underset{\sim}{x}]_T$$

قضیه ۲۱: فرض کنید T یک پایه مرتب برای فضای بردار V_n و $\underset{\sim}{x}$ بردار دلخواه از V_n باشد. آنگاه

$$[\underset{\sim}{x}]_T = \underset{\sim}{0}_n \iff \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0}$$

بردار صفر با n عضو

نتیجه: مجموعه $X = \{\underset{\sim}{x}_1, \dots, \underset{\sim}{x}_k\}$ از بردارهای فضای بردار V_n مستقل خطی است اگر و تنها اگر مجموعه $Y = \{[\underset{\sim}{x}_1]_T, \dots, [\underset{\sim}{x}_k]_T\}$ مستقل خطی از اعضای R^n باشد.

قضیه ۲۲: هر فضای بردار n بعدی با R^n یکریخت است.

قضیه ۲۳: اگر فضای بردار R^n و R^m یکریخت باشند آنگاه $n = m$

قضیه ۲۴: دو فضای بردار با بعد متناهی یکریخت هستند اگر و تنها اگر هم بعد باشند. به عبارت دیگر اگر فضای بردار V با R^n یکریخت باشد آنگاه $\dim(V) = n$

بعد فضای بردار — بعد R^n

P4PCO

ماتریس انتقال:

اگر مختصات یک بردار نسبت به پایه مرتب T را بدانیم و بخواهیم مختصات آن را نسبت به پایه مرتب دیگر مانند S بیابیم این کار با استفاده از ماتریس انتقال ممکن است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

فرض کنید $T=[\underline{\alpha}_1 \cdots \underline{\alpha}_n]$ و $S=[\underline{\beta}_1 \cdots \underline{\beta}_n]$ دو پایه مرتب برای فضای برداری V_n، $\underline{x}$ برداری در V_n، $[\underline{x}]_T=\underline{a}=(a_1,\dots,a_n)$ و $[\underline{x}]_S=\underline{b}$ بردارهای مختصات بردار x به ترتیب نسبت به T و S باشند و فرض کنید

$$[\underline{\alpha}_1]_S=\begin{bmatrix}c_{11}\\ \vdots \\ c_{n1}\end{bmatrix},\ \dots,\ [\underline{\alpha}_n]_S=\begin{bmatrix}c_{1n}\\ \vdots \\ c_{nn}\end{bmatrix}$$

به ترتیب مختصات بردارهای $\underline{\alpha}_1 \cdots \underline{\alpha}_n$ نسبت به S باشند آن‌گاه داریم:

$$\underline{x}=a_1\underline{\alpha}_1+\cdots+a_n\underline{\alpha}_n \qquad a_1,\dots,a_n\in R$$

از قضیه ۲۰:

$$[\underline{x}]_S=a_1[\underline{\alpha}_1]_S+\cdots+a_n[\underline{\alpha}_n]_S$$

$$=a_1\begin{bmatrix}c_{11}\\ \vdots \\ c_{n1}\end{bmatrix}+\cdots+a_n\begin{bmatrix}c_{1n}\\ \vdots \\ c_{nn}\end{bmatrix}$$

به طوری که اگر $C_{n\times n}$ ماتریسی با درایه‌های c_{ij} باشد طبق تعریف داریم:

$$[\underline{x}]_S=C\underline{a}=C[\underline{x}]_T$$

ماتریس C که ستون‌هایش بردارهای مختصات اعضای T نسبت به S هستند "ماتریس انتقال" از T به S می‌نامیم.

مثال: فرض کنید $T=[\underline{\alpha}_1,\underline{\alpha}_2]$ و $S=[\underline{\beta}_1,\underline{\beta}_2]$ دو پایه مرتب برای R^2 باشند؛

Subject
Date

$\beta_1 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ $\beta_2 = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ ، $\alpha_2 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ ، $\alpha_1 = \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$ که

$\alpha_1 = a_1\beta_1 + a_2\beta_2 \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 2a_2 = 3 \\ a_1 + 3a_2 = 4 \end{cases} \rightarrow C_{(1)} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ در اینصورت داریم

$\alpha_2 = a_1\beta_1 + a_2\beta_2 \leftarrow \begin{cases} a_1 + 2a_2 = 0 \\ a_1 + 3a_2 = 1 \end{cases} \rightarrow C_{(2)} = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

پس $[\alpha_1]_S = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ و ماتریس انتقال $[\alpha_2]_S = \begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix}1 & -2\\1 & 1\end{bmatrix}$ است

پس برای هر $x \in R^2$ داریم

$$[x]_S = C[x]_T$$

مثلاً یعنی اگر $[x]_T = \begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}$ باشد $x = \begin{pmatrix}18\\33\end{pmatrix}$

$$[x]_S = \begin{bmatrix}1 & -2\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-12\\15\end{pmatrix}$$

نکته: ماتریس انتقال از T به S به ترتیب اعضا در T و S بستگی دارد

قضیه: فرض کنید T و S دو پایه مرتب برای فضای برداری V_n و C ماتریس انتقال از T به S باشد آنگاه الف) C یکتاست ب) C وارون پذیر است ج) C^{-1} ماتریس انتقال از S به T است.

مثال: دو پایه مرتب $S = \left\{\overbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}}^{\beta_1}, \overbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}^{\beta_2}, \overbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}^{\beta_3}\right\}$ ، $T = \left\{\overbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}^{\alpha_1}, \overbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}^{\alpha_2}, \overbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}}^{\alpha_3}\right\}$ را در R^3 در نظر گیرید و ماتریس انتقال از T به S را معین کنید سپس اگر مختصات بردار x نسبت به پایه T برابر $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ باشد مختصات x را نسبت به پایه S بیابید.

$a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 = \alpha_1$ دستگاه ۱ $\rightarrow$ $\beta = \begin{pmatrix}-1/2\\2\\-1/2\end{pmatrix} = C_{(1)}$

$a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 = \alpha_2$ دستگاه ۲ $\rightarrow$ $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = C_{(2)}$

$a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 = \alpha_3$ دستگاه ۳ $\rightarrow$ $\begin{pmatrix}+1/2\\0\\-1/2\end{pmatrix} = C_{(3)}$

$$C = \begin{bmatrix}-1/2 & 0 & 1/2\\2 & 0 & 0\\-1/2 & 1 & -1/2\end{bmatrix}$$ ماتریس انتقال

ب) $[x]_S = C[x]_T \Longrightarrow C\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$

P4PCO

رتبه ماتریس

$\{a'_1, \dots a'_n\}$ $\quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{1m} \\ a_{m1} & a_{mm} \end{bmatrix}_{n\times m}$ $\quad X = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{n1} \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} a_{1m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} \right\}$

تعریف: فرض کنید X مجموعه‌ای ستونها یک ماتریس $n\times m$ مانند A و Y مجموعه سطرهای آن باشد در اینصورت گسترده X را که یک زیرفضای R^n است فضای ستونی A و گسترده Y را که یک زیرفضای R_m است فضای سطری A می‌نامیم.

قضیه: فرض کنید $X = \{x_1 \dots x_k\}$ زیرمجموعه‌ای از فضای برداری V باشد آنگاه هیچکدام از اعمال زیر گسترده X را تغییر نمی‌دهد

الف) عوض کردن جای دو عضو ب) ضرب یک عضو X در عددی مخالف صفر

ج) افزودن مضربی از یک عضو X به عضو دیگر.

اثبات: الف) بدیهی است. دو عضو عوض شود $\rightarrow \{x_1 \dots x_k\} = X$

ب) فرض کنید $c\neq 0$ و $X' = \{cx_1, x_2, \dots x_k\}$ طبق قضیه ۱.۱

چون cx_1 ترکیب خطی از اعضای X است و با حذف x_1 از X' $\{cx_1, x_2 \dots x_k\} = X''$ داریم:

$$sp(X) = sp(X'') = sp(X')$$

ج) فرض کنید c یک عدد حقیقی و $y = x_1 + cx_2$ آنگاه تعریف یعنی $X' = \{y, x_1, \dots x_k\}$

$Sp(X) = sp(X') = sp(X'')$; از قضیه ۱.۱ $\quad X'' = \{y, x_2, \dots x_k\}$

قضیه: اگر $A \overset{c}{\sim} B$ آنگاه فضای ستونی B با فضای ستونی A برابر است و اگر $A \overset{R}{\sim} B$ آنگاه فضای سطری B با فضای سطری A برابر است.

به عبارت دیگر اعمال مقدماتی ستونی فضای ستونی و اعمال مقدماتی سطری فضای سطری یک ماتریس را تغییر نمی‌دهند.

تعریف رتبه سطری: بعد فضای سطری یک ماتریس را رتبه سطری آن ماتریس می‌نویسند

و رتبه ستونی: بعد فضای ستونی یک ماتریس را رتبه ستونی آن ماتریس می‌نویسند

P4PCO

Subject
Date

نکته: می توان نشان داد رتبه سطری هر ماتریس با رتبه ستونی آن برابر است.

ولذا تعریف زیر نتیجه می شود.

تعریف رتبه ماتریس: رتبه ماتریس A برابر است با بعد فضای ستونی (یا سطری) A و با $Rank(A)$ یا $r(A)$ نشان می دهند. بنابراین می توان گفت اگر $A_{n\times m}$ در این صورت $r(A) \leq \min(n, m)$

A فضای ستونی R^n $\dim \leq n$

A فضای سطری R^m $\dim \leq m$

اگر رتبه ی برابر با باشد یعنی $r(A)=\min(n,m)$ آنگاه A یک ماتریس رتبه کامل یا تمام رتبه می گویند (full rank). برای پیدا کردن رتبه با یک مقدار سطر (یا ستون) صفر را پیدا کنید و به تعداد واستگی کم کنید.

قضیه: اگر A و B دو ماتریس هم بعد باشند در اینصورت

$$A \sim B \iff r(A) = r(B)$$

نکته ۱: اگر A ماتریس مربعی $n\times n$ باشد آنگاه A وارون پذیر است اگر و تنها اگر $r(A)=n$ باشد به عبارت دیگر A رتبه کامل باشد $r(A)=n=r(I) \iff A\sim I$

نکته ۲: اگر A ماتریس مربعی $n\times n$ باشد اگر و تنها اگر ستونها (سطرها) A یک مجموعه مستقل از اعضای R^n (R_n) باشد. (یعنی در اینصورت $r(A)=n$)

$r(A)=n=r(I)$

نکته ۳: چند ماتریس نادرجه در یک ماتریس روی رتبه تاثیری ندارند یعنی اگر $A_{n\times n}$، $r(A)=r$ آنگاه و B نادرجه باشد

$r(AB)=r$ هر ماتریس نادرجه برای توان به صورت حاصلضرب ماتریسها متوالی نوشت $AB\sim A$

قضیه: معادله $Ax=b$ دارای جواب است اگر و تنها اگر

$$r(A) = r([A \mid b])$$

یعنی $r(A)$ با رتبه ماتریس افزوده برابر باشد.

PqPCO

Subject
Date

همچنین خواص زیر را برای رتبه یک ماتریس داریم:

۱) اگر A و B دو ماتریس هم‌مرتبه باشند: $r(A+B) \leq r(A)+r(B)$

۲) اگر A و B قابل ضرب باشند: $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$

۳) $A_{n\times m}$: $r(A') = r(A)$, $r(AA') = r(A'A) = r(A)$

if $r(A) = n$ ⟵ سطری رتبه کامل $(n<m)$

چون $r(A) \leq \min(n,m)$

if $r(A) = m$ ⟵ ستونی رتبه کامل $(m<n)$

۴) $r(O) = 0$ ماتریس صفر

نکته: برای پیدا کردن رتبه باید تعداد سطرها (یا ستون‌ها) مستقل خطی را پیدا کنید به تعداد سطرهای بستگی دارد از رتبه کم می‌شود.

مثال: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 2} \Rightarrow r(A) \leq \min(3,2)$

پس رتبه A یا ۲ یا کمتر از ۲ است

$$c_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c_1+2c_2=0 \\ c_1-c_2=0 \Rightarrow c_1=c_2 \\ c_1+c_2=0 \end{cases}$$

پس هر دو ستون مستقلند و $r(A)=2$ $\Rightarrow c_1=c_2=0$

آیا دستگاه معادلات $\begin{cases} x_1+2x_2=4 \\ x_1-x_2=1 \\ x_1+x_2=5 \end{cases}$ سازگار است. تعیین کنید دستگاه جواب دارد

Subject
Date

آیا رتبه ماتریس افزوده با رتبه ماتریس ضرایب یکی است؟

$r(A)=2$ $\quad r(A|b)=r\begin{pmatrix}1&2&4\\1&-1&1\\1&1&1\end{pmatrix}_{3\times 3}$

$r(A^t|=3 \neq r(A)$ هیچ ارتباطی بین رتبه سطری و ستونی وجود ندارد

$r(A)\le \min(3,3)=3$ اولاً

$$c_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1+2c_2+4c_3=0\\ c_1-c_2+c_3=0\\ c_1+c_2+c_3=0\end{cases} \qquad \begin{pmatrix}1&2&4&0\\1&-1&1&0\\1&1&1&0\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix}1&2&4&0\\0&-3&-3&0\\0&-1&-3&0\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&2&4&0\\0&1&1&0\\0&0&-2&0\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix}1&2&4&0\\0&1&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} c_1+2c_2+4c_3=0\\ c_2+c_3=0\\ c_3=0\end{cases} \rightarrow c_2=0$$

$r(A|) \neq r(A^t)$ پس دستگاه اول جواب ندارد.

اگر

$$\begin{cases} x_1+2x_2=4\\ x_1-x_2=1\\ x_1+x_2=3\end{cases}$$

$$r(A|b)=r\begin{pmatrix}1&2&4\\1&-1&1\\1&1&3\end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix}1\times 2+2=4\\1\times 2-1=1\\1\times 2+1=3\end{matrix} \rightarrow$$ کی وابستگی

$$\begin{pmatrix}1&2&4&0\\1&-1&1&0\\1&1&3&0\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&2&4&0\\0&-3&-3&0\\0&-1&-1&0\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&2&4&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} c_1+2c_2+4c_3=0\\ c_2+c_3=0\end{cases}$$ دستگاه بینهایت جواب دارد

$r(A|b)=2$

P4PCO

تعریف: فرض کنید X یک مجموعه متناهی از عضای بردارهای $\mathbb{R}^n$ و X^* زیرمجموعه‌ای مستقل خطی از X باشد آن‌گاه X^* را زیرمجموعه مستقل بیشینه X می‌نامند اگر هیچ زیرمجموعه مستقل خطی دیگری از X با تعداد عضو بیشتری از X^* وجود نداشته باشد.

قضیه: فرض کنید $A_{n\times m}$ و X مجموعه ستونهای A باشد فرض کنید A را به کمک اعمال مقدماتی سطری به صورت ماتریس پلکانی درآورده باشد تا ماتریس B حاصل شود اگر X^* مجموعه ستونهای از A باشد که با ستونهای از B که دارای درایه پیشرو هستند متناظر باشد در اینصورت X^* یک زیرمجموعه مستقل بیشینه از X است.

$$A=\begin{bmatrix}2&1&-1&1\\4&2&0&5\\0&0&4&6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&2&3\\0&0&4&6\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}\boxed{1}&\frac{1}{2}&\boxed{-\frac{1}{2}}&\frac{1}{2}\\0&0&\boxed{1}&\frac{3}{2}\\0&0&0&0\end{bmatrix}=B$$

درایه پیشرو ندارند

$$\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix}$$

$$X=\left\{\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\5\\6\end{pmatrix}\right\}\Longrightarrow X^*=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

مجموعه مستقل بیشینه از X

برای تعیین رتبه A می‌توان گفت تعداد اعضای مجموعه مستقل بیشینه

$$r(A)=2$$

پس یک روش دیگر برای تعیین رتبه ماتریس این است که ماتریس پلکانی سطری آن را بدست آورید و سپس تعداد ستونهایی که دارای درایه پیشرو هستند را تعداد ستونهای A بگیرید.

P4PCO

Subject
Date

با تعداد بیشترین سطرهای A را از تعداد سطرهای که دارای درایه غیر صفر هستند مشخص کنید.

ستون دوم - ستون اول
$3\times1-1=2$
$2\times1-2=0$
$1\times1-3=-2$

مثال: رتبه ماتریس $\begin{bmatrix}3&1&2\\2&2&0\\1&3&-2\end{bmatrix}$ را بیابید

$$A=\begin{bmatrix}3&1&2\\2&2&0\\1&3&-2\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{با سطر اول عوض}]{\text{سطر ۳}}\begin{bmatrix}1&3&-2\\2&2&0\\1&3&-2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&3&-2\\0&-4&4\\1&3&-2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&3&-2\\0&-4&4\\0&0&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&3&-2\\0&+1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}\rightarrow r(A)=2$$

مثال:

$$A=\begin{bmatrix}1&1&2&2\\2&0&0&-2\\3&1&2&0\\5&0&3&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&2&2\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$r(A)=3$$

Subject.
Date

"فضاهای اقلیدسی"

ضرب داخلی متعارف: ضرب داخلی متعارف بین دو بردار $\underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ و $\underset{\sim}{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\underset{\sim}{x} \cdot \underset{\sim}{y} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

اندازه بردار: اندازه بردار $\underset{\sim}{x}$ به صورت جذر ضرب متعارف $\underset{\sim}{x}$ در خودش تعریف می‌شود

$$|\underset{\sim}{x}| = \sqrt{\underset{\sim}{x} \cdot \underset{\sim}{x}} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

زاویه بین دو بردار: زاویه بین دو بردار $\underset{\sim}{x}$ و $\underset{\sim}{y}$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\cos\theta = \frac{\underset{\sim}{x} \cdot \underset{\sim}{y}}{|\underset{\sim}{x}||\underset{\sim}{y}|} \Rightarrow \underset{\sim}{x} \cdot \underset{\sim}{y} = 0 \Rightarrow \cos \pi/2 = 0$$

دو بردار متعامد هستند اگر

در فضای برداری علاوه بر ضرب داخلی متعارف ضرب‌های داخلی دیگری قابل تعریف‌اند که باید ضرب داخلی تعریف شده دارای چهار ویژگی زیر باشند:

1) $\underset{\sim}{x} \cdot \underset{\sim}{x} > 0 \quad \underset{\sim}{x} \neq \theta$

2) $\underset{\sim}{x} \cdot \underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{y} \cdot \underset{\sim}{x} \quad \forall \underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y} \in V$ — جابجایی

3) $\underset{\sim}{x} \cdot (\underset{\sim}{y} + \underset{\sim}{z}) = \underset{\sim}{x} \cdot \underset{\sim}{y} + \underset{\sim}{x} \cdot \underset{\sim}{z}$ — شرکت‌پذیری

4) $\underset{\sim}{x} \cdot (c\underset{\sim}{y}) = c(\underset{\sim}{x} \cdot \underset{\sim}{y}) \quad \forall c \in \mathbb{R}$

مثال: ضرب داخلی P_2 را بر $g(t) = 5t - 1$ ، $f(t) = 3t^2 + t + 5$ به دست آورید.

$$f(t) = (t^2 \; t \; 1)\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \longrightarrow 3\times 0 + 5\times 1 + 5\times -1 = 0$$

$$g(t) = (t^2 \; t \; 1)\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

P4PCO

متعامدند

Subject
Date

مثال: اگر f و g دو عضو فضای P_2 باشند ثابت کنید ضرب داخلی زیر

$$f \cdot g = \int_0^1 f(t) g(t)\, dt$$

نیز یک تعریف است. باید 4 خاصیت را بررسی کنید

1) $f \cdot f = \int_0^1 f^2(t)\, dt > 0 \quad f(t) \neq 0$

2) $f \cdot g = g \cdot f$

$\int_0^1 f(t) g(t)\, dt = \int_0^1 g(t) f(t)\, dt$

3) $f \cdot (g+h) = fg + fh$

$= \int_0^1 f(t)[g(t)+h(t)]\, dt$

$= \int_0^1 f(t) g(t) + \int_0^1 f(t) h(t)\, dt$

4) $f \cdot (cg) = c(f \cdot g)$ $\quad \int_0^1 f(t) c g(t)\, dt = c \int_0^1 f(t) g(t)\, dt$

قضیه: فرض کنید $a, b \in R^n$ و C یک ماتریس $n \times n$ باشد. در این صورت

$$\underset{n\times 1}{a} \cdot \underset{n\times 1}{(Cb)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i c_{ij} b_j$$

$$a \cdot Cb = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} c_{1j} b_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} c_{nj} b_j \end{pmatrix} = a_1 \sum_j c_{1j} b_j + \cdots + a_n \sum_j c_{nj} b_j$$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum c_{1j} b_j \\ \vdots \\ \sum c_{nj} b_j \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_1 c_{1j} b_j + \cdots + \sum_{j=1}^{n} a_n c_{nj} b_j$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i c_{ij} b_j$$

Subject
Date

تعریف دیگری از ضرب داخلی

فرض کنید V یک فضای برداری n بعدی باشد که روی آن یک ضرب داخلی تعریف شده است و $T=[\underset{\sim}{\alpha}_1 \dots \underset{\sim}{\alpha}_n]$ یک پایه مرتب برای V باشد. فرض کنید $C_{n\times n}$ ماتریسی که درایه‌ی C_{ij} : $C_{ij}=\underset{\sim}{\alpha}_i \cdot \underset{\sim}{\alpha}_j$; $i,j=1,\dots,n$ که با توجه به خاصیت جابجایی ضرب داخلی c متقارن است. $(C_{ij}=\underset{\sim}{\alpha}_i\cdot\underset{\sim}{\alpha}_j=\underset{\sim}{\alpha}_j\cdot\underset{\sim}{\alpha}_i=C_{ji})$

اکنون می‌توان ضرب داخلی دو عضو دلخواه مثل $\underset{\sim}{x}$ و $\underset{\sim}{y}$ از V را به شکل زیر نوشت

$$\underset{\sim}{x}=(x_1 \dots x_n)' \qquad \underset{\sim}{y}=(y_1 \dots y_n)'$$

$$a=[\underset{\sim}{x}]_T=\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{b}=[\underset{\sim}{y}]_T=\begin{bmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{x}=a_1\underset{\sim}{\alpha}_1+\dots+a_n\underset{\sim}{\alpha}_n=\sum_{i=1}^{n}a_i\underset{\sim}{\alpha}_i$$

$$\underset{\sim}{y}=b_1\underset{\sim}{\alpha}_1+\dots+b_n\underset{\sim}{\alpha}_n=\sum_{j=1}^{n}b_j\underset{\sim}{\alpha}_j$$

(تغییر اندیس مهم است)

$$\underset{\sim}{x}\cdot\underset{\sim}{y}=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\underset{\sim}{\alpha}_i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}b_j\underset{\sim}{\alpha}_j\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{j=1}^{n}b_j(\underset{\sim}{\alpha}_i\cdot\underset{\sim}{\alpha}_j)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ib_j\underbrace{\underset{\sim}{\alpha}_i\cdot\underset{\sim}{\alpha}_j}_{C_{ij}}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_iC_{ij}b_j$$

$a_1c_{11}b_1+a_1c_{12}b_2+\dots$

$a_1c_{11}b_1+a_2c_{21}b_1+\dots$

$$=\underset{\sim}{a}\cdot C\,\underset{\sim}{b}$$

$$=[\underset{\sim}{x}]_T\cdot C[\underset{\sim}{y}]_T$$

به C ماتریس ضرب داخلی بردارهای نسبت به پایه مرتب T گویند.

مثال: ماتریس ضرب داخلی را برای پایه مرتب $T=[t^2\ t\ 1]$ در P_2 و با تعریف ضرب داخلی $f\cdot g=\int_0^1 f(t)g(t)\,dt$ بدست آورید.

α_1 α_2 α_3

Subject
Date

$$c_{11} = \underset{\sim}{\alpha}_1 \cdot \underset{\sim}{\alpha}_1 = \int_0^1 t^4 dt = 1/5$$

$$c_{12} = c_{21} = \underset{\sim}{\alpha}_1 \cdot \underset{\sim}{\alpha}_2 = \underset{\sim}{\alpha}_2 \cdot \underset{\sim}{\alpha}_1 = \int_0^1 t^3 dt = 1/4$$

$$c_{13} = c_{31} = \underset{\sim}{\alpha}_1 \cdot \underset{\sim}{\alpha}_3 = \underset{\sim}{\alpha}_3 \cdot \underset{\sim}{\alpha}_1 = \int_0^1 t^2 dt = 1/3$$

$$c_{23} = c_{32} = \underset{\sim}{\alpha}_2 \cdot \underset{\sim}{\alpha}_3 = \underset{\sim}{\alpha}_3 \cdot \underset{\sim}{\alpha}_2 = \int_0^1 t\, dt = 1/2$$

$$c_{22} = \underset{\sim}{\alpha}_2 \cdot \underset{\sim}{\alpha}_2 = \int_0^1 t^2 dt = 1/3$$

$$c_{33} = \underset{\sim}{\alpha}_3 \cdot \underset{\sim}{\alpha}_3 = \int_0^1 1\, dt = 1$$

$$C = \begin{bmatrix} 1/5 & 1/4 & 1/3 \\ 1/4 & 1/3 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

تعریف: یک فضای برداری به ضرب داخلی برآن تعریف شود فضای ضرب داخلی یا "فضای اقلیدسی" نامیده می‌شود.

نکته: در دو فضای اقلیدسی مجموعه‌ای از بردارها که دو به دو بر هم عمودند یک مجموعه متعامد می‌نامند.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \underset{\sim}{\alpha}_1 \cdot \underset{\sim}{\alpha}_2 = 0$$

بردار یکه و مجموعه متعامدیکه: برداری را که اندازه آن برابر ۱ است بردار یکه و مجموعه‌ای از بردارهای یکه که دو به دو بر هم عمودند یک مجموعه متعامدیکه می‌نامند.

برای تبدیل یک بردار به بردار یکه کافیست بردار را بر اندازه آن تقسیم کنیم.

$$\frac{\underset{\sim}{x}}{|\underset{\sim}{x}|} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \underset{\sim}{y} \rightarrow |\underset{\sim}{y}| = \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}} = 1$$

قضیه: هر مجموعه متعامد از بردارهای غیرصفر یک فضای اقلیدسی مستقل خطی است.

قضیه (نامساوی کوشی شوارتز)

اگر $\underset{\sim}{x}$ و $\underset{\sim}{y}$ دو بردار دلخواه در یک فضای اقلیدسی باشند آنگاه همواره

$$\underset{\sim}{x} \cdot \underset{\sim}{y} \leq |\underset{\sim}{x}||\underset{\sim}{y}|$$

اثبات: طبق تعریف

$$\underset{\sim}{x} \cdot \underset{\sim}{y} = |\underset{\sim}{x}||\underset{\sim}{y}| \cos\theta$$

$$(\underset{\sim}{x} \cdot \underset{\sim}{y})^2 = |\underset{\sim}{x}|^2 |\underset{\sim}{y}|^2 \cos^2\theta \xrightarrow{\cos^2\theta \leq 1}$$

$$\rightarrow (\underset{\sim}{x} \cdot \underset{\sim}{y})^2 \leq |\underset{\sim}{x}|^2 |\underset{\sim}{y}|^2$$

P4PCO

$|x+y|^2+|x-y|^2=2|x|^2+2|y|^2$ نامساوی متوازی الاضلاع

Subject

Date

قضیه: (نامساوی مثلثی)

به ازای هر بردار x و y از یک فضای اقلیدسی همواره داریم

$$|x+y| \le |x|+|y| \iff$$

$\sqrt{(x_1+y_1)^2+\cdots+(x_n+y_n)^2}$

$|x+y|^2=(x+y).(x+y)=x.x+2x.y+y.y \le |x|^2+2|x||y|+|y|^2=(|x|+|y|)^2$ کوشی

نتیجه: از قضیه بالا می توان نوشت $|x-z| \le |x-y|+|y-z|$

فاصله بین دو بردار: اگر x و y اعضای یک فضای اقلیدسی باشند فاصله بین آنها را با $d(x,y)$ نشان می دهند به صورت

$$d(x,y)=|x-y|$$

تعریف می شود.

قضیه: اگر $T=[\alpha_1 \cdots \alpha_n]$ یک پایه متعامد برای فضای اقلیدسی V_n باشد آن گاه به ازای هر x عضو V_n می توان نوشت:

$$x=a_1\alpha_1+\cdots+a_n\alpha_n \quad s.t \quad a_i=\frac{x.\alpha_i}{|\alpha_i|^2} \quad \forall i=1-n$$

$a=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_n \end{bmatrix}$ بردار مختصات x نسبت به یک پایه متعامد یکه

اثبات: می توان نوشت $x=a_1\alpha_1+\cdots+a_n\alpha_n$ طرفین را در α_i ضرب داخلی کنید:

$$x.\alpha_i=a_1\underbrace{\alpha_1.\alpha_i}_{0}+\cdots+\underbrace{a_i\alpha_i.\alpha_i}+\cdots+a_n\alpha_n\alpha_i$$

(چون T متعامد است)

$$x.\alpha_i=a_i\underbrace{\alpha_i.\alpha_i}_{1}$$

$$\Rightarrow a_i=\frac{x.\alpha_i}{\alpha_i.\alpha_i}=\frac{x.\alpha_i}{|\alpha_i|^2}$$

$$a=[x]_T=\begin{bmatrix} \frac{x.\alpha_1}{|\alpha_1|^2} \\ \vdots \\ \frac{x.\alpha_n}{|\alpha_n|^2} \end{bmatrix}$$

Subject
Date

قضیه: اگر $T=[\alpha_1 \cdots \alpha_n]$ یک پایه متعامد یکه برای فضای اقلیدسی V، و $x, y \in V$ دو بردار دلخواه از V باشند به طوری که

$$a = [x]_T = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \qquad b = [y]_T = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

آن گاه

$$x \cdot y = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$$

برهان: می توان طبق تعریف نوشت

$$x = a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n$$
$$y = b_1\alpha_1 + \cdots + b_n\alpha_n$$

$$x \cdot y = a_1 b_1 \alpha_1 \cdot \alpha_1 + \cdots + a_n b_n \alpha_n \cdot \alpha_n$$

متعامد یکه: $\alpha_i \cdot \alpha_i = 1$

$$\Rightarrow x \cdot y = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$$

فرآیند گرام اشمیت:

فرض کنید $T=[\alpha_1, \cdots, \alpha_n]$ یک پایه برای زیرفضا W از یک فضای اقلیدسی V باشد. با استفاده از فرآیند گرام اشمیت می توان از پایه فوق یک پایه متعامد به شکل $T'=[\beta_1 \cdots \beta_n]$ را طبق الگوریتم زیر استخراج نمود. $(\beta_i \cdot \beta_j = 0)$

① ابتدا β_1 را برابر α_1 می گیریم

$$\beta_1 = \alpha_1$$

② به شکل ترکیب خطی می نویسیم β_2 را به صورت ترکیب خطی از α_2 و β_1

$$\begin{cases} \beta_2 = c_1\beta_1 + c_2\alpha_2 \\ \beta_1 \cdot \beta_2 = 0 \end{cases}$$

می خواهیم که β_2 بر β_1 عمود باشد.

$$\beta_2 \cdot \beta_1 = (c_1\beta_1 + c_2\alpha_2)\cdot\beta_1 = c_1(\beta_1\cdot\beta_1) + c_2(\alpha_2\cdot\beta_1)$$

چون $\beta_1 \neq 0$ پس:

$$c_1 = -c_2 \cdot \frac{\alpha_2 \cdot \beta_1}{\beta_1 \cdot \beta_1}$$

اگر $c_2 = 1$ دلخواه:

$$c_1 = -\frac{\alpha_2 \cdot \beta_1}{\beta_1 \cdot \beta_1}$$

و در نتیجه از ②:

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\alpha_2 \cdot \beta_1}{\beta_1 \cdot \beta_1}\beta_1$$

PqPCO

Subject
Date

اکنون β_3 را طوری می‌سازیم که ترکیب خطی از β_1 و β_2 و α_3 باشد و بر β_1 و β_2 عمود باشد پس

$$\begin{cases} \beta_3 = b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + b_3\alpha_3 \\ \beta_3 \cdot \beta_1 = b_1(\beta_1\cdot\beta_1) + b_2(\beta_2\cdot\beta_1) + b_3(\alpha_3\cdot\beta_1) = 0 \\ \beta_3 \cdot \beta_2 = b_1(\beta_1\cdot\beta_2) + b_2(\beta_2\cdot\beta_2) + b_3(\alpha_3\cdot\beta_2) = 0 \end{cases}$$

اگر $b_3 = 1$ در نظر بگیریم با توجه به عمود بودن β_1 و β_2 داریم:

$$b_1(\beta_1\cdot\beta_1) + b_3(\alpha_3\cdot\beta_1) = 0$$
$$b_2(\beta_2\cdot\beta_2) + (\alpha_3\cdot\beta_2) = 0$$

که چون $\beta_1, \beta_2 \neq 0$ داریم

$$b_1 = -\frac{\alpha_3\cdot\beta_1}{\beta_1\cdot\beta_1} \qquad b_2 = -\frac{\alpha_3\cdot\beta_2}{\beta_2\cdot\beta_2}$$

$$\Rightarrow \beta_3 = \alpha_3 - \frac{\alpha_3\cdot\beta_1}{\beta_1\cdot\beta_1}\cdot\beta_1 - \frac{\alpha_3\cdot\beta_2}{\beta_2\cdot\beta_2}\cdot\beta_2$$

و به همین ترتیب عمل کنید و در نهایت

$$\beta_k = \alpha_k - \frac{\alpha_k\cdot\beta_1}{\beta_1\cdot\beta_1}\cdot\beta_1 - \cdots - \frac{\alpha_k\cdot\beta_{k-1}}{\beta_{k-1}\cdot\beta_{k-1}}\cdot\beta_{k-1}$$

مثال مجموعه $T = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ که $\alpha_3 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$، $\alpha_2 = \begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}$، $\alpha_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$

یک پایه برای R^3 است به روش گرام اشمیت از آن یک پایه متعامد بسازید.

$$\beta_1 = \alpha_1 \qquad \beta_2 = \alpha_2 - \frac{\alpha_2\cdot\beta_1}{\beta_1\cdot\beta_1}\cdot\beta_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\3\end{bmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \left[\frac{\alpha_3\cdot\beta_1}{\beta_1\cdot\beta_1}\right]\beta_1 - \left[\frac{\alpha_3\cdot\beta_2}{\beta_2\cdot\beta_2}\right]\beta_2 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} - \frac{2}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} - \frac{3}{9}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\3\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-3/19\\3/19\\1/19\end{bmatrix}$$

Subject
Date

پس اگر T یک پایه برای زیرفضای W از یک فضای اقلیدسی و T' مجموعه‌ای متعامد باشد، با استفاده از T به کمک فرآیند گرام اشمیت به دست آمده آن‌گاه T' یک پایه متعامد برای W است.

تصویر یک بردار

فرض کنید $\underset{\sim}{x}$ و $\underset{\sim}{y}$ اعضای یک فضای اقلیدسی باشند آن‌گاه بردار

$$\frac{\underset{\sim}{x}\cdot\underset{\sim}{y}}{\underset{\sim}{x}\cdot\underset{\sim}{x}}\ \underset{\sim}{x} \longrightarrow$$

مضربی از بردار $\underset{\sim}{x}$

تصویر $\underset{\sim}{y}$ بر $\underset{\sim}{x}$ می‌نامیم.

با توجه به تعریف تصویر فرآیند گرام اشمیت به صورت زیر است

$$\underset{\sim}{\beta}_1 = \underset{\sim}{\alpha}_1$$

$$\underset{\sim}{\beta}_2 = \underset{\sim}{\alpha}_2 - (\text{تصویر } \underset{\sim}{\alpha}_2 \text{ بر } \underset{\sim}{\beta}_1)$$

$$\underset{\sim}{\beta}_3 = \underset{\sim}{\alpha}_3 - (\text{تصویر } \underset{\sim}{\alpha}_3 \text{ بر } \underset{\sim}{\beta}_1) - (\text{تصویر } \underset{\sim}{\alpha}_3 \text{ بر } \underset{\sim}{\beta}_2)$$

$$\vdots$$

$$\underset{\sim}{\beta}_k = \underset{\sim}{\alpha}_k - (\text{تصویر } \underset{\sim}{\alpha}_k \text{ بر } \underset{\sim}{\beta}_1) - \cdots - (\text{تصویر } \underset{\sim}{\alpha}_k \text{ بر } \underset{\sim}{\beta}_{k-1})$$

تصویر یک بردار بر زیرفضا

فرض کنید V یک فضای اقلیدسی، $\underset{\sim}{x}$ یک بردار در V و W یک زیرفضای V باشد آن‌گاه تصویر $\underset{\sim}{x}$ بر W عضوی از W است که فاصله از $\underset{\sim}{x}$ مینیمم باشد و با $\text{proj}_W \underset{\sim}{x}$ نمایش می‌دهند.

قضیه: فرض کنید $T = [\underset{\sim}{\alpha}_1 \cdots \underset{\sim}{\alpha}_k]$ یک پایه متعامد که بردارزیرفضای W از فضای اقلیدسی V و $\underset{\sim}{x}$ عضوی از V باشد آن‌گاه

Subject
Date

$$proj_W \underset{\sim}{x} = a_1 \underset{\sim}{\alpha}_1 + \cdots + a_k \underset{\sim}{\alpha}_k$$

$$a_i = \underset{\sim}{x} \cdot \underset{\sim}{\alpha}_i \qquad i = 1, \cdots k$$

تصویر
بنابراین بردار $\underset{\sim}{x}$ بر زیرفضای W برابر با

$$proj_W \underset{\sim}{x} = (\underset{\sim}{x} \cdot \underset{\sim}{\alpha}_1)\underset{\sim}{\alpha}_1 + \cdots + (\underset{\sim}{x} \cdot \underset{\sim}{\alpha}_k)\underset{\sim}{\alpha}_k$$

است که $\underset{\sim}{\alpha}_1 \cdots \underset{\sim}{\alpha}_k$ اعضای پایه متعامد یکه برای W هستند.

مثال: می دانیم $T = \left\{ \begin{bmatrix} 4/5 \\ -3/5 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3/5 \\ 4/5 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ یک پایه متعامد یکه برای زیرفضای

$W = \{ \underset{\sim}{x} \in R^3 \mid \underset{\sim}{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \}$ است تصویر بردار $\underset{\sim}{y} = \begin{bmatrix} 25 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$ متعلق

$x_1, x_2 \in R$

به R^3 بر W عبارت است از: $25\underset{\sim}{\alpha}_1 + 20\underset{\sim}{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$proj_W \underset{\sim}{y} = \frac{25 \times 3}{5}\begin{bmatrix} 3/5 \\ 4/5 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{25 \times 4}{5}\begin{bmatrix} 4/5 \\ -3/5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 25 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \\ 0 \end{pmatrix} = 12 \qquad \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4/5 \\ -3/5 \\ 0 \end{pmatrix} = 16$$

$$\begin{pmatrix} 25 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4/5 \\ -3/5 \\ 0 \end{pmatrix} = 20 \qquad \begin{pmatrix} 25 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \\ 0 \end{pmatrix} = 15$$

تعریف: اگر V یک فضای اقلیدسی و W یک زیرفضای آن باشد آن گاه مجموعه بردارهای V را که بر هر یک از بردارهای W عمود هستند متمم متعامد W نامیده و با $W^{\perp}$ نمایش می دهند.

قضیه: (تجزیه بردار) فرض کنید V یک فضای اقلیدسی و W یک زیرفضای آن باشد آن گاه به ازای هر $\underset{\sim}{x} \in V$ دو بردار منحصر به فرد $\underset{\sim}{\alpha} \in W$ و $\underset{\sim}{\beta} \in W^{\perp}$ وجود دارند که

$$\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{\alpha} + \underset{\sim}{\beta}$$

Subject
Date

نکته پایانی : برای پیدا کردن تجزیه چردن یک ماتریس متقارن :

مثال : تجزیه چردن A را بیابید

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$|A - \lambda I| = 0$ ← $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -1$

$$\underset{\sim}{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{x}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \underbrace{P}_{\text{ماتریس متعامد}} \Lambda \underbrace{P'}_{P} \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$P = [\underset{\sim}{e}_1 \; \cdots \; \underset{\sim}{e}_n]$ که باید یک مجموعه متعامد یکه باشند

$\{\underset{\sim}{e}_1 \; \cdots \; \underset{\sim}{e}_n\}$

اول $\underset{\sim}{x}_1$ را تبدیل به بردار یکه می‌کنیم

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \sqrt{2/6} \\ \sqrt{2/6} \\ \sqrt{2/6} \end{bmatrix} = \underset{\sim}{\alpha}_1$$

$$\begin{bmatrix} -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} = \underset{\sim}{\alpha}_2 \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{3/6} \\ \sqrt{3/6} \end{bmatrix} = \underset{\sim}{\alpha}_3$$

حالا اشمیت :

$$\underset{\sim}{B}_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{2/6} \\ \sqrt{2/6} \\ \sqrt{2/6} \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{B}_2 = \underset{\sim}{\alpha}_2 - \frac{\underset{\sim}{\alpha}_2 \cdot \underset{\sim}{B}_1}{\underset{\sim}{B}_1 \cdot \underset{\sim}{B}_1} \underset{\sim}{B}_1$$

$$= \begin{bmatrix} -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} - \frac{0}{1} \begin{bmatrix} -2\sqrt{2}/6 \\ \sqrt{2}/6 \\ \sqrt{2}/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{B}_3 = \underset{\sim}{\alpha}_3 - \frac{\underset{\sim}{\alpha}_3 \cdot \underset{\sim}{B}_1}{\underset{\sim}{B}_1 \cdot \underset{\sim}{B}_1} \underset{\sim}{B}_1 - \frac{\underset{\sim}{\alpha}_3 \cdot \underset{\sim}{B}_2}{\underset{\sim}{B}_2 \cdot \underset{\sim}{B}_2} \underset{\sim}{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{3/6} \\ \sqrt{3/6} \end{bmatrix}$$

(0 و 0)

PAPCO

Subject

Date

فرض کنید $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$

مثال: به روش گرام اشمیت از مجموعه $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix}\right\}$ که مجموعه مستقل

یک پایه بسازید

$$\underline{B}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\qquad \underline{B}_2=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}-\frac{\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$$

$$\underline{B}_3=\begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix}-\frac{\begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}-\frac{\begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix}$$

$$\underline{\delta}_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\qquad \underline{\delta}_2=\begin{bmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{3}\end{bmatrix}\qquad \underline{\delta}_3=\begin{bmatrix}-1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\end{bmatrix}$$