دانشگاه سمنان

دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

گروه آمار

عنوان :

مروری بر تحلیل چندمتغیره‌ی پیوسته و حل چند مثال با نرم افزار R

استاد راهنما:

دکتر فاطمه حسینی

نگارش:

محبوبه طهماسبی

تابستان 93

بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیم به

پدر و مادرم

که دستانشان بوی زحمت

چشمانشان رنگ خستگی

اما صدایشان برایم زنگ زندگی است.

تقدیر و تشکر

با سپاس فراوان و احترام از زحمت‌های استاد محترم و عزیز سرکار خانم دکتر حسینی که با مساعدت و توجه اندیشمندانه خود مرا قادر به انجام این پروژه گردانیدند تشکر و قدردانی می نمایم.

چکیده

با تحلیل داده های یک متغیری به‌طور کامل آشنا شده ایم. حال در این پروژه تحلیل آماری چند متغیری کاربردی را بررسی می‌کنیم. روش‌های چند متغیری در پزشکی، جامعه شناسی، اقتصاد و ...کاربرد فراوانی دارند. در فصل اول به مروری بر جبر ماتریس‌ها می‌پردازیم. در فصل دوم بردار تصادفی را تعریف می‌کنیم که در ادامه-ی آن در فصل سوم نمونه‌ی تصادفی را مطرح می‌کنیم. در فصل چهارم توزیع نرمال چندمتغیری را داریم و در فصل پنجم استنباط‌های مربوط به بردار میانگین را بررسی می‌کنیم. فصل ششم مقایسه‌ی میانگین چندمتغیری می‌باشد و در نهایت فصل هفتم را با مولفه‌های اصلی خاتمه می‌دهیم. در پیوست نیز چند مساله را با نرم افزار بررسی می‌کنیم.

همچنین لازم به ذکر است که تمامی مسایل و مثال‌ها از کتاب "تحلیل آماری چندمتغیری کاربردی" تالیف ریچاردآ.جانسون و دین دبلیو.ویچرن ترجمه دکتر نیرومند انتخاب شده اند.

فهرست مطالب

یادآوری:

در این درس چون با چند متغیر تصادفی سروکار داریم، معمولا از بردارها و ماتریس‌ها استفاده می‌شود.

می‌دانیم یک بردار به‌صورت $\underset{\sim}{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ نمایش داده می‌شود. طول یک بردار رسم شده از مبدا به‌صورت $L_{\underset{\sim}{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ محاسبه می‌شود و زاویه بین دو بردار $\underset{\sim}{x}$ و $\underset{\sim}{y}$ رسم شده از مبدا که هر کدام n عنصر دارند، به‌صورت

$$Cos\Theta = \frac{\underset{\sim}{x}'\,\underset{\sim}{y}}{L_{\underset{\sim}{x}}\,L_{\underset{\sim}{y}}} = \frac{x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n}{\sqrt{x_1^2 + \cdots x_n^2}\sqrt{y_1^2 + \cdots y_n^2}}$$

محاسبه می‌شود که:

$$\underset{\sim}{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad , \qquad \underset{\sim}{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

نکته:

مجموعه‌ی بردارهای $\underset{\sim}{x}_1, \dots, \underset{\sim}{x}_k$ را نامستقل خطی گوییم، هرگاه k عدد $a_1, \dots, a_k$ که همگی صفر نباشند وجود داشته باشد که:

$$a_1\underset{\sim}{x}_1 + a_2\underset{\sim}{x}_2 + \cdots + a_k\underset{\sim}{x}_k = \underset{\sim}{0}$$

در غیراین‌صورت این مجموعه بردارها را مستقل خطی گوییم.

یک ماتریس نیز معمولا با بعد و عناصرش مشخص می‌شود و یک ماتریس $p \times n$ به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$A_{p\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, p \quad j = 1, \dots, n \ , \ a_{ij} =$$ عنصر سطر iام و ستون jام

ترانهاده ماتریس $A_{p\times n}$ را به‌صورت $A'_{n\times p}$ نشان می‌دهند:

$$A'_{n\times p}=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{p1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{pn} \end{bmatrix}$$

ترانهاده دارای خواص زیر است:

1. $(A')'=A$

2. $(A+B)'=A'+B'$

3. $(AB)'=B'A'$

ماتریس متعامد:

اگر برای هر ماتریس مربع $A_{n\times n}$ خواص زیر برقرار باشد، آنگاه A یک ماتریس متعامد است.

$$A'=A^{-1} \qquad \longrightarrow \quad AA'=A'A=I$$

ماتریس متقارن:

اگرماتریس مربع A دارای این خاصیت باشد که $A=A'$، آنگاه A ماتریسی متقارن است.

ماتریس ناویژه:

اگر $|A|\neq 0$ باشد، به ماتریس A ناویژه گویند و وارون A دراین‌صورت وجود دارد.

دترمینان:

معمولا با det و $|\ \ |$ نمایش داده می‌شود و دارای خواص زیر است:

1. $|A|=|A'|$

2. $|AB|=|A||B|$

3. $|kA|=k^n|A|$

4. $|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$

5. $|A|=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}|A_{ij}|$

اثر:

مجموع عناصر روی قطر اصلی یک ماتریس مربعی را اثر ماتریس می‌نامند و به‌صورت :
$tr(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}|A_{ij}|$ نشان می‌دهند که دارای خواص زیر است:

1.$tr(CA) = Ctr(A)$

2.$tr(A \pm B) = tr(A) \pm tr(B)$

3.$tr(AB) = tr(BA)$

4. $tr(B^{-1}AB) = tr(A)$

5. $tr(AA') = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$

وارون:

معکوس یا وارون A درصورتی وجود دارد که A مربع و $|A| \neq 0$ باشد و با A^{-1} نشان می‌دهند. وارون منحصر به فرد است.

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

و برای ماتریس نامربع A و ماتریس‌های ویژه همواره ماتریسی مثل G پیدا می‌شود، به‌طوری که: $AGA = A$.

که به G وارون تعمیم یافته A می‌گویند. وارون تعمیم یافته منحصر به فرد نیست.

ماتریس خود توان:

ماتریس متقارن A را خودتوان گوییم، هرگاه: $AA = A$.

فرم های درجه دوم:

برای بردار $\underset{\sim}{x}$ و ماتریس متقارن A، $Q(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{x}' A \underset{\sim}{x}$ را فرم درجه دوم گویند. اگر:

$\forall \underset{\sim}{x} \neq 0 , Q(\underset{\sim}{x}) > 0$ باشد، به ماتریس A همیشه مثبت یا معین مثبت گوییم و اگر:

$\forall \underset{\sim}{x} \neq 0 , Q(\underset{\sim}{x}) \geq 0$ باشد، به A معین نامنفی یا نیمه معین مثبت می‌گوییم.

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه:

اگر A ماتریس مربعی $n \times n$ باشد، آنگاه : $A\underset{\sim}{x} = \lambda \underset{\sim}{x}$ و تعداد مقادیر ویژه و بردارهای ویژه یک ماتریس برابر با تعداد سطرها (ستون‌ها) ماتریس است.(λ مقدار ویژه و $\underset{\sim}{x}$ بردار ویژه).

برای داشتن جواب غیر صفردر معادله‌ی $A\underset{\sim}{x} = \lambda \underset{\sim}{x}$، باید $|A - \lambda I| = 0$ باشد، چون:

$$A\underset{\sim}{x} = \lambda \underset{\sim}{x} \quad \Longrightarrow \quad A\underset{\sim}{x} - \lambda \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0} \quad \Longrightarrow \quad (A - \lambda I)\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0}$$

پس باید $(A - \lambda I)$ ماتریس ویژه باشد، یعنی : $|A - \lambda I| = 0$ (معادله‌ی مشخصه) باشد.

در صورتی که ماتریس A ناویژه باشد هیچ یک از λها صفر نخواهد شد و اگر A متقارن باشد، جواب‌های معادله فوق همگی حقیقی هستند.

نکته:

می‌توان نشان داد که اگر $A_{n\times n}$، آنگاه :

1) $|A| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ (λ_iها مقادیر ویژه ماتریس A هستند.)

2) $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

3) $A = \sum \lambda_i e_i e_i' = P\Lambda P'$

4) $PP' = P'P = I \quad , \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad , \quad \lambda_i > 0$

5) $tr(A) = tr(\Lambda PP') = tr(\Lambda) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i$

6) $|A| = |P\Lambda P'| = |P||\Lambda||P'| = |\Lambda||I| = \prod_{i=1}^{p} \lambda_i$

7) $|P'P| = |P'||P| = |I| = 1$

نکته:

ماتریس متقارن A معین مثبت است، اگر و فقط اگر مقادیر ویژه‌ی آن مثبت باشد.

مثال1.1)

نشان دهید $3x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2$ معین مثبت است؟

جواب:

$$[x_1 \quad x_2]\begin{bmatrix}3 & -1\\ -1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = \underset{\sim}{x}'A\underset{\sim}{x} > 0$$

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix}3-\lambda & -1\\ -1 & 3-\lambda\end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = 2 \quad , \quad \lambda = 4$$

<u>نکته:</u>

ماتریس متقارن A یک ماتریس معین نامنفی است، اگر و فقط اگر تمامی مقادیر ویژه‌ی آن منفی باشد.

تجزیه‌ی طیفی یک ماتریس متقارن:

اگر $A_{n\times n}$ یک ماتریس متقارن باشد، آنگاه:

$$A = \lambda_1 \underset{\sim}{e}_1 \underset{\sim}{e}_1' + \lambda_2 \underset{\sim}{e}_2 \underset{\sim}{e}_2' + \cdots + \lambda_n \underset{\sim}{e}_n \underset{\sim}{e}_n' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underset{\sim}{e}_i \underset{\sim}{e}_i' \quad (*)$$

که در آن λ_iها مقادیر ویژه A و e_i ها بردارهای ویژه متناظر با λ_i ها هستند که به‌صورت نرمال شده و متعامد درآمده اند. یعنی:

$$e_i' e_j = \begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

با درنظر گرفتن :

$$\Lambda = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{bmatrix}\lambda_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix} \quad , \quad \Gamma = (\underset{\sim}{e}_1 \dots \underset{\sim}{e}_n)$$

آنگاه رابطه $(*)$ به‌صورت $A = \Gamma\Lambda\Gamma'$ نوشته می‌شود.

<u>نکته:</u>

اگر $A_{n\times n}$ ماتریس متقارن باشد، آنگاه :

$$A^{-1} = \Gamma\Lambda^{-1}\Gamma' = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} e_i e_i' \quad , \quad A^{\frac{1}{2}} = \Gamma\Lambda^{\frac{1}{2}}\Gamma' = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\lambda_i}\, e_i\, e_i'$$

به‌طوری که:

$$(A^{\frac{1}{2}})' = A^{\frac{1}{2}} \quad , \quad A^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} = A \quad , \quad A^{\frac{-1}{2}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} e_i\, e_i' = \Gamma\, \Lambda^{\frac{-1}{2}}\Gamma'$$

مثال2.1)

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس A را بیابید.

حل:

ابتدا مقادیر ویژه‌ی ماتریس A را به‌دست می آوریم:

$$A=\begin{bmatrix}13 & -4 & 2\\ -4 & 13 & 2\\ 2 & -2 & 10\end{bmatrix}\longrightarrow \quad |A-\lambda I|=0$$

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}13-\lambda & -4 & 2\\ -4 & 13-\lambda & -2\\ 2 & -2 & 10-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}9-\lambda & 9-\lambda & 0\\ 0 & 9-\lambda & 18-2\lambda\\ 2 & -2 & 10-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}9-\lambda & 18-2\lambda & 0\\ 0 & 9-\lambda & 18-2\lambda\\ 2 & 0 & 10-\lambda\end{vmatrix}=(9-\lambda)\begin{vmatrix}9-\lambda & 18-2\lambda\\ 0 & 10-\lambda\end{vmatrix}-2(9-\lambda)\begin{vmatrix}0 & 2(9-\lambda)\\ 2 & 10-\lambda\end{vmatrix}\quad\Longrightarrow$$

$$(9-\lambda)^2(10-\lambda)+8(9-\lambda)^2=0\ (9-\lambda)^2(10-\lambda+8)=0\ \Longrightarrow \lambda_1=9\,,\lambda_2=9,\ \lambda_3=18$$

حال بردارهای ویژه‌ی متناظر با مقادیر ویژه را می یابیم:

$$*\lambda_1=9 \qquad \Longrightarrow \qquad (A-\lambda_1 I)\underset{\sim}{x}=0$$

$$\begin{bmatrix}13 & -4 & 2\\ -4 & 13 & -2\\ 2 & -2 & 10\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}9 & 0 & 0\\ 0 & 9 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -4 & 2\\ 4 & -4 & 2\\ 2 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}4 & -4 & 2\\ -4 & 4 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\qquad\Longrightarrow\qquad\begin{cases}4x-4y+2z=0\\ -4x+4y-2z=0\\ 2x-2y+z=0\end{cases}$$

$$z=2y-2x \qquad \underset{\sim}{\mathrm{e}}_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{bmatrix}\quad,\ \underset{\sim}{x}_1=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$*\lambda_2=9 \quad\Longrightarrow\quad \underset{\sim}{x}_2=\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 4\end{bmatrix}\quad,\quad \underset{\sim}{\mathrm{e}}_2=\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt{18}}\\ \frac{1}{\sqrt{18}}\\ \frac{4}{\sqrt{18}}\end{bmatrix}$$

$$*\lambda_3 = 18 \quad \Longrightarrow \qquad x = -y \ , \quad z = \frac{x}{2} \ \longrightarrow \ \underset{\sim}{\mathrm{e}}_3 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

تجزیه‌ی طیفی ماتریس فوق:

$$A = 9\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} + 9\begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{4}{\sqrt{18}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{18}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{4}{\sqrt{18}} \end{bmatrix} + 18\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} .$$

حل مثال فوق با نرم افزار R)

ابتدا داده های ماتریس A را با دستور زیر وارد می‌کنیم:

```
A<-matrix(c(13,-4,2,-4,13,-2,2,-2,10),3,3)
> A
```

خروجی دستور فوق به‌صورت زیر می‌باشد که همان ماتریس داده شده است:

```
   [,1] [,2] [,3]
[1,]   13   -4    2
[2,]   -4   13   -2
[3,]    2   -2   10
```

حال دستور زیر را برای به‌دست آوردن مقادیر ویژه و بردارهای ویژه می‌زنیم:

```
> m<-eigen(A)
> m
```

مقادیر ویژه یعنی همان λ_iها به‌صورت زیر می‌باشند:

```
$values
[1] 18  9  9
```

و بردارهای ویژه نیز به‌صورت زیر می‌باشند:

```
$vectors
          [,1]       [,2]      [,3]
[1,]  0.6666667  0.7453560 0.0000000
[2,] -0.6666667  0.5962848 0.4472136
[3,]  0.3333333 -0.2981424 0.8944272
```

تجزیه‌ی طیفی ماتریس A با دستور زیربه‌دست می‌آید:

```
> y<-A%*%vec
> y
     [,1]      [,2]     [,3]
[1,]   12  6.708204 0.000000
[2,]  -12  5.366563 4.024922
[3,]    6 -2.683282 8.049845
```

رتبه ماتریس:

رتبه‌ی یک ماتریس عبارت است از: تعداد ستون‌های مستقل A و یا تعداد سطرهای مستقل A. یعنی:

$rank(A) =$ تعداد سطرهای مستقلA $=$ تعداد ستون‌های مستقلA

*ستون‌های A مستقل خطی هستند اگر $A\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{0}$، آنگاه نتیجه شود: $\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{0}$.

<u>نکته:</u>

به‌طور کلی رتبه ماکسیمم یک ماتریس $n \times p$ برابر $\min(n, p)$ است و:

$$rank(A) \leqslant \min(n, p)$$

خواص:

1) $r(A) = r(A') = r(AA')$

2) $r(AB) \leqslant \min(r(A), r(B))$

3) $if \quad |A| \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad r(AB) = r(B)$

اگر: $A_{n\times p}$ و $(n \leqslant p)$, $rank(A) = n$، می‌گوییم A رتبه کامل است و اگر:

$(p \leqslant n)$, $rank(A) = p$ می‌گوییم A ستونی رتبه کامل است.

و ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ که رتبه کامل باشد $rank(A) = n$، آنگاه A ناویژه است و معکوس آن وجود دارد.

مثال3.1)

رتبه ماتریس Aرا بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

حل:

$$c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \underset{\sim}{0} \qquad \Longrightarrow$$ c_1 و c_2 مخالف صفر وجود ندارند.

$$c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \underset{\sim}{0} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$c = (14 \quad -11 \quad -12) \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad rank(A) = 2$$

ماتریس تمرکز:

ماتریس تمرکز به‌صورت $H_n = I_n - \frac{1}{n}J_n$ تعریف می‌شود که یک ماتریس خودتوان است و در آن :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow Identity\ matrix$$

$$J_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow Unit\ matrix$$

ماتریس‌ها در $\boldsymbol{R}$:

$$A < -matrix(c(3,6,2,1),2,2,byrow = T)$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

اگر: $byrow = F$، آنگاه: $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$.

ترانهاده:

$At < -t(A)$

ضرب دو ماتریس:

$C < -A\% * \%B$

معکوس دو ماتریس:

$Ainv < -solve(A)$

دترمینان دو ماتریس:

$\det(A) < -\det(A)$

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه:

$EA < -eigen(A)$

EA

در $\boldsymbol{SAS}$:

$proc\ Iml$:

$X = \{a, b, c, d\}$

$X\ inv = inv(X)$

$e = eigval(X)$

$V = eigvec(X)$

$print \quad e \quad \vee\ X$

بردار تصادفی:

یک بردار تصادفی برداری است که مولفه هایش، متغیرهای تصادفی هستند. یعنی:

$$\underset{\sim}{X}' = [X_1, \dots \dots \dots, X_p]$$

به‌طوری که هرمولفه X، یک متغیر تصادفی و در نتیجه دارای یک توزیع احتمال حاشیه ای است.

بردارهای میانگین و ماتریس‌های کواریانس:

میانگین حاشیه ای μ_i و واریانس، σ_i^2 هستند که به ترتیب به‌صورت

$$\mu_i = E(X_i) \qquad , \qquad \sigma_i^2 = E(X_i - \mu_i)^2 \qquad , \quad i = 1, \dots p$$

تعریف می‌شوند، به‌طوری‌که:

$$\mu_i = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x_i f_i(x_i) dx_i & \text{درحالت پیوسته} \\ \sum_{x_i} P_i(x_i) & \text{درحالت گسسته} \end{cases}$$

$$\sigma_i^2 = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - \mu_i)^2 f_i(x_i) dx_i & \text{درحالت پیوسته} \\ \sum_{x_i} (x_i - \mu_i)^2 P_i(x_i) & \text{در حالت گسسته} \end{cases}$$

رفتار هر زوج (X_i, X_k) با تابع احتمال توام آنها بیان می‌شود و اندازه ای از رابطه‌ی خطی بین آنها با کواریانس σ_{ik} داده می‌شود که: $\sigma_{ik} = E(X_i - \mu_i)(X_k - \mu_k)$.

به طوری‌که:

$$\sigma_{ik} = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - \mu_i)(x_k - \mu_k) f_{ik}(x_i, x_k) dx_i dx_k \\ \sum_{x_i} \sum_{x_k} (x_i - \mu_i)(x_k - \mu_k) P_{ik}(x_i, x_k) \end{cases}$$

اگر $i = k$ ، آنگاه: $\sigma_{ik} = \sigma_{ii} = \sigma_i^2$.

دقت شود که معلوم نیست $\underset{\sim}{X}' = [X_1 \ldots \ldots \ldots X_p]$ دوبه‌دو مستقل از هم باشند.

p متغیر تصادفی(مثلا پیوسته) $X_1, \ldots X_p$ دوبه‌دو مستقلند، اگر:

$$f_{1\ldots p}(x_1, x_2, \ldots, x_p) = f_1(x_1) \ldots f_1(x_p)$$

و در این‌صورت:

اگر X_i و X_k مستقل باشند، آنگاه: $\sigma_{ik} = 0$. (دقت کنید عکس این مطلب برقرار نیست).

اکنون میانگین و ماتریس واریانس-کواریانس بردار تصادفی $\underset{\sim}{X}_{p\times 1}$ را به‌صورت ماتریسی نشان می‌دهیم.

نمایش بردار میانگین جامعه:

$$E(\underset{\sim}{X}) = \underset{\sim}{\mu} = \begin{bmatrix} E(X_1) \\ \vdots \\ E(X_p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix}$$

نمایش ماتریس واریانس-کواریانس جامعه:

$$\sum = E(\underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{\mu})(\underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{\mu})' = E\left(\begin{bmatrix} X_1 - \mu_1 \\ \vdots \\ X_p - \mu_p \end{bmatrix} [X_1 - \mu_1, \quad \ldots \quad , X_p - \mu_p]\right)$$

$$= E\begin{bmatrix} (X_1 - \mu_1)^2 & \cdots & (X_1 - \mu_1)(X_p - \mu_p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (X_p - \mu_p)(X_1 - \mu_1) & \cdots & (X_p - \mu_p)^2 \end{bmatrix}$$

و بنابراین:

$$\sum = Cov(\underset{\sim}{X}) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \cdots & \sigma_{pp} \end{bmatrix}$$

نکته:

اگر $\underset{\sim}{b}_{q\times 1}$ و $A_{p\times q}$ و $\underset{\sim}{X}_{p\times 1}$ یک بردار تصادفی باشد، آنگاه داریم:

1) $E(A\underset{\sim}{X} + \underset{\sim}{b}) = AE(\underset{\sim}{X}) + \underset{\sim}{b}$

$$2)\ Cov(A\underset{\sim}{X} + \underset{\sim}{b}) = E(A\underset{\sim}{X} + \underset{\sim}{b} - A\underset{\sim}{\mu} - \underset{\sim}{b})(A\underset{\sim}{X} + \underset{\sim}{b} - A\underset{\sim}{\mu} - \underset{\sim}{b})'$$

$$= E\left(A(\underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{\mu})\right)\left(A(\underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{\mu})\right)' = AE\left(\underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{\mu}\right)\left(\underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{\mu}\right)' A' = A\sum A'$$

ضریب همبستگی جامعه:

ضریب همبستگی جامعه به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & \rho_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{p1} & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{11}}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{11}}} & \cdots & \frac{\sigma_{1p}}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{pp}}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\sigma_{p1}}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{pp}}} & \cdots & \frac{\sigma_{pp}}{\sqrt{\sigma_{pp}}\sqrt{\sigma_{pp}}} \end{bmatrix}$$

پس ضریب همبستگی زوج (X_i, X_k) برحسب کواریانس σ_{ik} و واریانس σ_{ii} و σ_{kk} به‌صورت زیر تعریف می-شود که میزان ارتباط خطی بین X_i و X_k را نشان می‌دهد:

$$\rho_{ik} = \frac{\sigma_{ik}}{\sqrt{\sigma_{ii}}\sqrt{\sigma_{kk}}}$$

ماتریس انحراف استاندارد:

با تعریف ماتریس انحراف استاندارد به‌صورت زیر:

$$V^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \sqrt{\sigma_{11}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sqrt{\sigma_{pp}} \end{bmatrix}$$

به‌راحتی می‌توان نوشت:

$$V^{\frac{1}{2}}\, P\, V^{\frac{1}{2}} = \sum \qquad (*)$$

$$\rho = V^{\frac{-1}{2}} \sum V^{\frac{-1}{2}} \qquad (**)$$

به عبارتی ρ را می‌توان از $\sum$ و $V^{\frac{1}{2}}$ و $\sum$ را از ρ و $V^{\frac{1}{2}}$ می‌توان به‌دست آورد.

به عنوان تمرین دو رابطه (*) و (**) را ثابت کنید.

اثبات(*) :

$$w = V^{\frac{1}{2}}\,P = \begin{bmatrix} \sqrt{\sigma_{11}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sqrt{\sigma_{pp}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{11}}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{11}}} & \cdots & \frac{\sigma_{1p}}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{pp}}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\sigma_{p1}}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{pp}}} & \cdots & \frac{\sigma_{pp}}{\sqrt{\sigma_{pp}}\sqrt{\sigma_{pp}}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{\sigma_{11}} & \cdots & \frac{\sigma_{1p}}{\sqrt{\sigma_{pp}}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\sigma_{p1}}{\sqrt{\sigma_{11}}} & \cdots & \sqrt{\sigma_{pp}} \end{bmatrix}$$

$$wV^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \sqrt{\sigma_{11}} & \cdots & \frac{\sigma_{1p}}{\sqrt{\sigma_{pp}}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\sigma_{p1}}{\sqrt{\sigma_{11}}} & \cdots & \sqrt{\sigma_{pp}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{\sigma_{11}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sqrt{\sigma_{pp}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \cdots & \sigma_{pp} \end{bmatrix} = \sum$$

اثبات(**) :

$$w = V^{\frac{-1}{2}} \sum = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\sigma_{11}}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{\sigma_{pp}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \cdots & \sigma_{pp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{11}}{\sqrt{\sigma_{11}}} & \cdots & \frac{\sigma_{1p}}{\sqrt{\sigma_{11}}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\sigma_{1p}}{\sqrt{\sigma_{pp}}} & \cdots & \frac{\sigma_{pp}}{\sqrt{\sigma_{pp}}} \end{bmatrix}$$

$$wV^{\frac{-1}{2}} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{11}}{\sqrt{\sigma_{11}}} & \cdots & \frac{\sigma_{1p}}{\sqrt{\sigma_{11}}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\sigma_{1p}}{\sqrt{\sigma_{pp}}} & \cdots & \frac{\sigma_{pp}}{\sqrt{\sigma_{pp}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\sigma_{11}}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{\sigma_{pp}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{11}}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{11}}} & \cdots & \frac{\sigma_{1p}}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{pp}}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\sigma_{p1}}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{pp}}} & \cdots & \frac{\sigma_{pp}}{\sqrt{\sigma_{pp}}\sqrt{\sigma_{pp}}} \end{bmatrix} = \rho$$

مثال1.2)

فرض کنید تابع احتمال توام دو متغیر تصادفی X_1 و X_2 به‌صورت زیر باشد:

x1 \ x2	0	1	$P_1(x_1)$
-1	0.24	0.06	0.3
0	0.16	0.14	0.3
1	0.4	0	0.4
$P_2(x_2)$	0.8	0.2	1

مطلوب است : $\sum$ و $\underset{\sim}{\mu}$ ؟

حل: برای به‌دست آوردن $\underset{\sim}{\mu}$ داریم:

$$E(X_1) = (-1 \times 0.3) + (0 \times 0.3) + (1 \times 0.4) = 0.1$$

$$E(X_2) = (0 \times 0.8) + (1 \times 0.2) = 0.2$$

بنابراین بردار $\underset{\sim}{\mu}$ به‌صورت $\begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix} = \underset{\sim}{\mu}$ خواهد بود.

$$\sigma_{11} = E(X_1 - \mu_1)^2 = 0.3(-1 - 0.1)^2 + (0 - 0.1)^2 0.3 + (1 - 0.1)^2 \times 0.4 = 0.69$$

$$\sigma_{22} = E(X_2 - \mu_2)^2 = (0 - 0.2)^2 \times 0.8 + (1 - 0.2)^2 \times 0.2 = 0.16$$

$$\begin{aligned} \sigma_{12} &= E(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2) \\ &= (-1 - 0.1)(0 - 0.2)0.24 + \cdots + (1 - 0.1)(1 - 0.2)(0) = -0.8 \end{aligned}$$

و داریم:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.69 & -0.8 \\ -0.8 & 0.16 \end{bmatrix}$$

مثال 2.2)

فرض کنید $\Sigma = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 9 & -3 \\ 2 & -3 & 25 \end{bmatrix}$. مطلوبست $V^{\frac{-1}{2}}$ و ρ ؟

$$V^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \sqrt{\sigma_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\sigma_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\sigma_{33}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \implies V^{\frac{-1}{2}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$\rho = V^{\frac{-1}{2}} \Sigma V^{\frac{-1}{2}} \implies \rho = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 9 & -3 \\ 2 & -3 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \implies$$

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{6} & 1 & \frac{-1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{-1}{5} & 1 \end{bmatrix}$$

افراز کردن بردار تصادفی:

درعمل گاهی متغیرهای تصادفی زیادی در مطالعه وجود دارد و ویژگی های اندازه گیری شده داخل دو یا چند گروه واقع می‌شود.

به‌عنوان نمونه فرض کنید متغیرهای تصادفی مورد نظر در دو گروه واقع شده اند. به‌طوری که :

$$\underset{\sim}{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_q \\ \cdots\cdots\cdots \\ X_{q+1} \\ \vdots \\ X_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{X}^{(1)} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \underset{\sim}{X}^{(2)} \end{bmatrix}$$

و بنابراین افراز شده‌ی بردار میانگین جامعه به‌صورت زیر می‌باشد:

$$E(\underset{\sim}{X}) = \underset{\sim}{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_q \\ \cdots\cdots\cdots \\ \mu_{q+1} \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\mu}^{(1)} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \underset{\sim}{\mu}^{(2)} \end{bmatrix}$$

و افراز ماتریس واریانس کواریانس جامعه:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \vdots & \Sigma_{12} \\ \cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots \\ \Sigma_{21} & \vdots & \Sigma_{22} \end{bmatrix}$$

که به عنوان مثال در آن:

$$\Sigma_{12} = E\left(\underset{\sim}{X}^{(1)} - \underset{\sim}{\mu}^{(1)}\right)\left(\underset{\sim}{X}^{(2)} - \underset{\sim}{\mu}^{(2)}\right)' = E\left(\begin{bmatrix} X_1 - \mu_1 \\ \vdots \\ X_q - \mu_q \end{bmatrix}[X_{q+1} - \mu_{q+1}, \quad \ldots \quad , X_p - \mu_p]\right)$$

$$= E\begin{bmatrix}(X_1-\mu_1)(X_{q+1}-\mu_{q+1}) & \cdots & (X_1-\mu_1)(X_p-\mu_p)\\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (X_q-\mu_q)(X_{q+1}-\mu_{q+1}) & \cdots & (X_q-\mu_q)(X_p-\mu_p)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sigma_{1,q+1} & \cdots & \sigma_{1p}\\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{q,q+1} & \cdots & \sigma_{qp}\end{bmatrix}$$

لازم به ذکر است که: $\sum_{12} = \sum_{21}{}'$.

بردار میانگین و ماتریس واریانس کواریانس نمونه:

فرض کنید $\underset{\sim}{X}_{p\times 1}$ از توزیعی با میانگین $\underset{\sim}{\mu}$ و ماتریس واریانس کواریانس $\sum$ باشد. در عمل نمونه ای به حجم n از یک جامعه p متغیری در اختیار است. یعنی یک ماتریس داده به‌صورت:

$$X_{p\times n} = \begin{bmatrix}x_{11} & \cdots & x_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{p1} & \cdots & x_{pn}\end{bmatrix} \longrightarrow \quad X_{p\times 1} = \begin{bmatrix}X_1\\ \vdots \\ X_p\end{bmatrix}$$

بردار میانگین نمونه:

$$\underset{\sim}{\bar{X}}_{p\times 1} = \begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \vdots \\ \bar{x}_p\end{bmatrix}$$

ماتریس واریانس کواریانس نمونه:

$$S_n = \begin{bmatrix}s_{11} & \cdots & s_{1p}\\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{p1} & \cdots & s_{pp}\end{bmatrix}$$

که می‌دانیم:

$$S_{ik} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x}_i)(x_{kj}-\bar{x}_k)$$

بردار میانگین نمونه در صورت افراز:

$$\underset{\sim}{\mathrm{X}}_{p\times 1} = \begin{bmatrix}\underset{\sim}{\mathrm{X}}^{(1)}\\ \cdots\cdots \\ \underset{\sim}{\mathrm{X}}^{(2)}\end{bmatrix} \longrightarrow \quad \underset{\sim}{\bar{X}}_{p\times 1} = \begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \vdots \\ \bar{x}_q \\ \vdots \\ \bar{x}_p\end{bmatrix}$$

ماتریس واریانس کواریانس نمونه درصورت افراز:

$$S_n = \begin{bmatrix} S_{11} & \vdots & S_{12} \\ \cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots \\ S_{21} & \vdots & S_{22} \end{bmatrix}$$

نمونه تصادفی:

بردار تصادفی $\underset{\sim}{X}' = [X_1, \dots, X_p]$ با توزیع نامشخص با میانگین μ و ماتریس $\sum$ را در نظر بگیرید که از هر متغیر نمونه‌ی nتایی استخراج شود.

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{p1} & \cdots & x_{pn} \end{bmatrix}$$

از یک جامعه نمونه های مختلفی می‌توان استخراج کرد که در این‌صورت x_{ik} از نمونه ای به نمونه‌ی دیگر تغییر می‌کند. پس داریم:

$$X_{p\times n} = \begin{bmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{p1} & \cdots & X_{pn} \end{bmatrix}_{p\times n}$$

که:

$$\underset{\sim}{X}'_1 = [X_{11}, \dots, X_{p1}] \quad , \quad \dots \quad \underset{\sim}{X}'_n = [X_{1n}, \dots, X_{pn}]$$

$$\underset{\sim}{X}' = [X_1, \dots, X_p] \quad , \quad \underset{\sim}{\mu}' = [\mu_1, \dots, \mu_p]$$

$$E(X) = \begin{bmatrix} E(X_{11}) & \cdots & E(X_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E(X_{p1}) & \cdots & E(X_{pn}) \end{bmatrix}_{p\times n} = \begin{bmatrix} \mu_1 & \cdots & \mu_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_p & \cdots & \mu_p \end{bmatrix}_{p\times n} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix}_{p\times 1} [1 \quad \dots \quad 1]_{1\times n}$$

$$= \begin{bmatrix} \mu_1 & \cdots & \mu_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_p & \cdots & \mu_p \end{bmatrix} = \underset{\sim}{\mu}\ 1'_n$$

به $\underset{\sim}{x}_1, \dots \underset{\sim}{x}_n$ یک نمونه تصادفی می‌گوییم، اگر:

$$f(\underset{\sim}{x}_1, \dots \underset{\sim}{x}_n) = f(\underset{\sim}{x}_1) \dots f(\underset{\sim}{x}_n)$$

که در آن :

$$f(\underset{\sim}{x}_j) = f(x_{1j} \dots x_{pj}) \quad , \quad j = 1, \dots n$$

$$V(X_{p\times n})=\begin{bmatrix} V(\underset{\sim}{X}_1) & \cdots & cov(\underset{\sim}{X}_1,\underset{\sim}{X}_p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(\underset{\sim}{X}_n,\underset{\sim}{X}_p) & \cdots & V(\underset{\sim}{X}_n) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \Sigma & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \Sigma \end{bmatrix}=I_n\otimes\Sigma$$

$$\underset{\sim}{X}_1'=[X_{11}, \quad \ldots \quad ,X_{p1}] \quad , \quad \underset{\sim}{X}_2'=[X_{12}, \quad \ldots \quad ,X_{p2}]$$

$$V(\underset{\sim}{X}_1)=\Sigma \quad , \quad V(\underset{\sim}{X}_2)=\Sigma \quad , \quad \ldots \quad V(\underset{\sim}{X}_n)=\Sigma$$

$$Cov(\underset{\sim}{X}_1,\underset{\sim}{X}_2)=0 \;\; , \;\ldots \;\; , \quad Cov(\underset{\sim}{X}_n,\underset{\sim}{X}_p)=0$$

که در آن $\otimes$ ضرب کرونکر است.

*اگر A یک ماتریس $n\times m$ و B یک ماتریس $p\times q$ باشد، آنگاه ضرب کرونکر آنها عبارتند از:

$$C=A\otimes B=\begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1m}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{nm}B \end{bmatrix}$$

که در این‌صورت C یک ماتریس $(np)\times(mq)$ است.

آماره های توصیفی:

قضیه:

فرض کنید $\underset{\sim}{X}_1,\ldots\underset{\sim}{X}_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع توامی باشد که دارای بردار میانگین$\underset{\sim}{\mu}$ و ماتریس کواریانس Σ است. در این‌صورت:

$$1.\, E(\underset{\sim}{\bar{X}})=\underset{\sim}{\mu}$$

$$2.\, Cov(\underset{\sim}{\bar{X}})=\frac{1}{n}\Sigma$$

$$3.\, E(S_n)=\frac{n-1}{n}\Sigma \qquad \Longrightarrow \qquad E(\frac{n-1}{n}\,S_n)=\Sigma$$

ولی S_n برآوردگر نااریب نیست و داریم:

$$E(S_n)-\Sigma=\frac{-1}{n}\Sigma$$

اثبات مورد 1)

$$\underset{\sim}{\bar{X}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\underset{\sim}{X}_j}{n} = \frac{1}{n}\left(\underset{\sim}{X}_1 + \cdots + \underset{\sim}{X}_n\right) = \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \vdots \\ \bar{X}_p \end{bmatrix}$$

حال از طرفین تساوی فوق امید ریاضی می‌گیریم:

$$E(\underset{\sim}{\bar{X}}) = \frac{1}{n} E\left(\underset{\sim}{X}_1 + \cdots + \underset{\sim}{X}_n\right) = \frac{1}{n}\left[E(\underset{\sim}{X}_1) + \cdots + E(\underset{\sim}{X}_n)\right] = \underset{\sim}{\mu}$$

$$E(\underset{\sim}{X}_1) = \begin{bmatrix} E(X_{11}) \\ \vdots \\ E(X_{p1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix} = \underset{\sim}{\mu}$$

اثبات مورد 2) از قسمت (1) داریم:

$$Cov(\underset{\sim}{\bar{X}}) = E(\underset{\sim}{\bar{X}} - \underset{\sim}{\mu})(\underset{\sim}{\bar{X}} - \underset{\sim}{\mu})' = E\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} (\underset{\sim}{X}_j - \underset{\sim}{\mu})\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n}(\underset{\sim}{X}_\ell - \underset{\sim}{\mu})'\right)\right]$$

$$= \frac{1}{n^2} E\left[\sum_{j=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n}(\underset{\sim}{X}_j - \underset{\sim}{\mu})(\underset{\sim}{X}_\ell - \underset{\sim}{\mu})'\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} E(\underset{\sim}{X}_j - \underset{\sim}{\mu})(\underset{\sim}{X}_\ell - \underset{\sim}{\mu})'$$

حال دو حالت داریم:

$$if \quad j \neq \ell \quad \Longrightarrow \quad Cov(\underset{\sim}{X}_j, \underset{\sim}{X}_\ell) = 0$$

$$if \quad j = \ell \quad \Longrightarrow \quad E(\underset{\sim}{X}_j - \underset{\sim}{\mu})(\underset{\sim}{X}_\ell - \underset{\sim}{\mu})' = V(\underset{\sim}{X}_j) = \Sigma$$

بنابراین داریم:

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} E(\underset{\sim}{X}_j - \underset{\sim}{\mu})(\underset{\sim}{X}_j - \underset{\sim}{\mu})' = \frac{n}{n^2}\Sigma = \frac{1}{n}\Sigma$$

اثبات مورد 3)

$$nS_n = \sum_{j=1}^{n}(\underset{\sim}{X}_j - \underset{\sim}{\bar{X}})\left(\underset{\sim}{X}_j - \underset{\sim}{\bar{X}}\right)' = \sum_{j=1}^{n}(\underset{\sim}{X}_j - \underset{\sim}{\bar{X}})\underset{\sim}{X}_j' + \sum_{j=1}^{n}(\underset{\sim}{X}_j - \underset{\sim}{\bar{X}})(-\underset{\sim}{\bar{X}})' =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \underset{\sim}{X}_j \underset{\sim}{X}_j^{\prime} - \sum_{j=1}^{n} \underset{\sim}{\bar{X}} \underset{\sim}{\bar{X}}_j^{\prime} + \sum_{j=1}^{n} \underset{\sim}{\bar{X}} \underset{\sim}{\bar{X}}^{\prime} - \sum_{j=1}^{n} \underset{\sim}{X}_j \underset{\sim}{\bar{X}}^{\prime} = \sum_{j=1}^{n} \underset{\sim}{X}_j \underset{\sim}{X}_j^{\prime} - n\underset{\sim}{\bar{X}}^{\prime} \underset{\sim}{\bar{X}} + n\bar{X}\underset{\sim}{\bar{X}}^{\prime} - n\bar{X}\underset{\sim}{\bar{X}}^{\prime} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \underset{\sim}{X}_j \underset{\sim}{X}_j^{\prime} - n\underset{\sim}{\bar{X}}\underset{\sim}{\bar{X}}^{\prime} = n\, S_n$$

حال از طرفین امید ریاضی می‌گیریم:

$$E(S_n) = \frac{1}{n}\left[E\left(\sum_{j=1}^{n} \underset{\sim}{X}_j \underset{\sim}{X}_j^{\prime}\right) - nE\left(\underset{\sim}{\bar{X}}\underset{\sim}{\bar{X}}^{\prime}\right) \right] \qquad (1)$$

$$E\left(\underset{\sim}{X}_j \underset{\sim}{X}_j^{\prime}\right) = E\begin{bmatrix} X_{1j} \\ \vdots \\ X_{pj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1j} & \dots & X_{pj} \end{bmatrix} = E\begin{bmatrix} {X_{1j}}^2 & \cdots & X_{1j}X_{pj} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{pj}X_{1j} & \cdots & {X_{pj}}^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} E\left({X_{1j}}^2\right) & \cdots & E\left(X_{1j}X_{pj}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E\left(X_{pj}X_{1j}\right) & \cdots & E\left({X_{pj}}^2\right) \end{bmatrix}$$

و مشابه حالت فوق به همین ترتیب داریم:

$$E\left({X_{1j}}^2\right) = E^2\left(X_{1j}\right) + \sigma_{11} = \mu_1^2 + \sigma_{11}$$

$$E\left(X_{1j}X_{2j}\right) = E\left(X_{1j}\right)E\left(X_{2j}\right) + \sigma_{12} = \mu_1\mu_2 + \sigma_{12}$$

$$\vdots$$

$$E\left({X_{pj}}^2\right) = E^2\left({X_{pj}}^2\right) + \sigma_{pp} = \mu_p^2 + \sigma_{pp}$$

پس بنابراین:

$$= \begin{bmatrix} \mu_1^2 + \sigma_{11} & \cdots & \mu_1\mu_p + \sigma_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_p\mu_1 + \sigma_{1p} & \cdots & \mu_p^2 + \sigma_{pp} \end{bmatrix} = \mu\mu^{\prime} + \sum$$

به‌همین ترتیب می‌توان نشان داد:

$$E\left(\underset{\sim}{\bar{X}}\underset{\sim}{\bar{X}}^{\prime}\right) = \frac{1}{n}\sum + \mu\mu^{\prime}$$

با جای‌گذاری در رابطه(1):

$$E(S_n)=\frac{1}{n}\left[\sum_{j=1}^{n}(\mu\mu' + \Sigma) - n(\frac{1}{n}\Sigma + \mu\mu')\right] = \frac{1}{n}[n\Sigma - \Sigma] = \frac{n-1}{n}\Sigma$$

معیارهای پراکنش:

$$S_n = \frac{1}{n}\left[\sum_{j=1}^{n} \underset{\sim}{X}_j \underset{\sim}{X}'_j - n\underset{\sim}{\bar{X}}\ \underset{\sim}{\bar{X}}'\right] \quad , \quad S = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{j=1}^{n} \underset{\sim}{X}_j \underset{\sim}{X}'_j - n\underset{\sim}{\bar{X}}\ \underset{\sim}{\bar{X}}'\right]$$

ماتریس واریانس کواریانس نمونه:

ماتریس واریانس کواریانس نمونه شامل p واریانس و $\frac{1}{2}p(p-1)$ کواریانس متفاوت است که تعداد کل واریانس ها p^2-p می‌باشد.

$$S=\begin{bmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{1p} & \cdots & s_{pp}\end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad S_{ik} = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_{ij}-\bar{X}_i)(X_{kj}-\bar{X}_k)$$

بعضی مواقع علاقمند به ارائه یک مقدارعددی برای تغییرات هستیم.

واریانس کل:

$$T=\begin{cases} S_{11}+\cdots+S_{pp} = \sum_{i=1}^{p} S_{ii} = tr(S) & \text{برای نمونه} \\ \sigma_1^2+\cdots+\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{p}\sigma_i^2 = tr(\Sigma) & \text{برای جامعه}\end{cases}$$

واریانس تعمیم یافته:

$$G=\begin{cases} |S| = \prod_{i=1}^{p}\lambda_i & \text{برای نمونه} \\ |\Sigma| = \prod_{i=1}^{p}\lambda_i & \text{برای جامعه}\end{cases}$$

نمایش ماتریسی بردار میانگین و ماتریس کواریانس نمونه:

$$\underset{\sim}{\bar{X}} = \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \vdots \\ \bar{X}_p \end{bmatrix} = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{p1} & \cdots & x_{pn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{n} \times \underset{\sim}{1}\ n$$

با تعریف:

$$H_n = I_n - \frac{1}{n} J_n = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{n} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\frac{1}{n} & \cdots & \frac{-1}{n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{-1}{n} & \cdots & 1-\frac{1}{n} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{p1} & \cdots & x_{pn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-\frac{1}{n} & \cdots & \frac{-1}{n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{-1}{n} & \cdots & 1-\frac{1}{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11}-\bar{x}_1 & \cdots & x_{1n}-\bar{x}_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{p1}-\bar{x}_p & \cdots & x_{pn}-\bar{x}_p \end{bmatrix} = XH$$

و

$$\begin{bmatrix} 1-\frac{1}{n} & \cdots & \frac{-1}{n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{-1}{n} & \cdots & 1-\frac{1}{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{p1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & \cdots & x_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11}-\bar{x}_1 & \cdots & x_{1n}-\bar{x}_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{p1}-\bar{x}_p & \cdots & x_{pn}-\bar{x}_p \end{bmatrix} = HX'$$

$$XHX' = (n-1)S \quad \Longrightarrow \quad S = \frac{1}{n-1} XHX'$$

ماتریس انحراف استاندارد نمونه به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \sqrt{s_{11}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sqrt{S_{PP}} \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} \frac{s_{11}}{\sqrt{s_{11}}\sqrt{s_{11}}} & \cdots & \frac{s_{1p}}{\sqrt{s_{11}}\sqrt{S_{PP}}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{s_{1p}}{\sqrt{s_{11}}\sqrt{S_{PP}}} & \cdots & \frac{S_{PP}}{\sqrt{S_{PP}}\sqrt{S_{PP}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & r_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{1p} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین داریم:

$$R = D^{\frac{1}{2}}\, S\, D^{\frac{1}{2}} \qquad , \qquad S = D^{\frac{1}{2}}\, R\, D^{\frac{1}{2}}$$

چگالی نرمال چند متغیره:

تاکنون با توزیع نرمال یک متغیره با میانگین μ و واریانس σ^2 به‌صورت زیرآشنا شده‌اید:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \longrightarrow \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{\frac{-1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\}$$

که در آن:

$$P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \cong 0.68$$

$$P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \cong 0.95$$

اگر داشته باشیم:

$$Z_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma} \quad \longrightarrow \quad (Z_i)^2 \sim \mathcal{X}_1^2 \quad , \quad \sum (Z_i)^2 \sim \mathcal{X}_m^2 \quad , \quad u \sim \mathcal{X}_{(m)}^2$$

آنگاه توزیع تی استیودنت به‌صورت زیر خواهد بود:

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{u}{m}}} \sim t_m$$

حال اگر داشته باشیم:

$$u \sim \mathcal{X}_{(m)}^2 \quad , \quad v \sim \mathcal{X}_{(n)}^2$$

وu و v مستقل باشند، آنگاه توزیع های بتا و فیشر به‌صورت زیر نیز تعریف می‌شوند:

$$F = \frac{\frac{u}{m}}{\frac{v}{n}} \sim F(m,n) \quad , \quad \beta = \frac{v}{u+v} \sim \beta eta\left(\frac{n}{2}, \frac{m}{2}\right)$$

حال تابع چگالی زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{\frac{-1}{2}(X-\mu)(\sigma^2)^{-1}(X-\mu)\right\}$$

فرض کنید:

$$\underset{\sim}{X}' = [X_1, \quad \dots \quad, X_p] \quad , \quad \underset{\sim}{X} \sim N(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$$

چگالی نرمال چند متغیره را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(\underset{\sim}{X})=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{\frac{-1}{2}(\underset{\sim}{X}-\underset{\sim}{\mu})'\Sigma^{-1}(\underset{\sim}{X}-\underset{\sim}{\mu})\right\}$$

به عنوان تمرین نشان دهید:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\dots\int_{-\infty}^{+\infty} f(\underset{\sim}{X})d\underset{\sim}{X}=1$$

اثبات:

با در نظر گرفتن: $k=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}$ داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\dots\int_{-\infty}^{+\infty} k\exp\left\{\frac{-1}{2}(\underset{\sim}{X}-\underset{\sim}{\mu})'\Sigma^{-1}(\underset{\sim}{X}-\underset{\sim}{\mu})\right\}dx_1\dots dx_p=1$$

با تعریف:

$$\underset{\sim}{Y}=\Sigma^{\frac{1}{2}}(\underset{\sim}{X}-\underset{\sim}{\mu}) \quad \longrightarrow \quad \underset{\sim}{X}=\Sigma^{\frac{1}{2}}\underset{\sim}{Y}$$

حال در تابع $\underset{\sim}{X}$ نسبت به $\underset{\sim}{Y}$مشتق می‌گیریم و داریم:

$$j=\left|\Sigma^{\frac{1}{2}}\right|=|\Sigma|^{\frac{1}{2}} \qquad , \qquad (\underset{\sim}{X}-\underset{\sim}{\mu})'\Sigma^{-1}(\underset{\sim}{X}-\underset{\sim}{\mu})=\underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{Y}=\sum_{i=1}^{n}Y_i^2$$

$$\Longrightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\dots\int_{-\infty}^{+\infty} k|\Sigma|^{\frac{1}{2}}\ e^{\frac{-1}{2}\underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{Y}}\,dY_1\dots dY_p$$

$$\Longrightarrow \qquad k|\Sigma|^{\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\dots\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-1}{2}\underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{Y}}\,dY_1\dots dY_p \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{\rho}{2}}}.|\Sigma|^{\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{\rho}{2}}=1$$

تابع چگالی نرمال دو متغیره:

حال می‌خواهیم چگالی نرمال $p = 2$ متغیری را بر حسب پارامترهای زیر به‌دست آوریم:

$$E(X_1) = \mu_1 \qquad , \qquad E(X_2) = \mu_2$$

$$V(X_1) = \sigma_{11} \qquad , \qquad V(X_2) = \sigma_{22}$$

$$\sigma_{12} = Cov(X_1, X_2) \qquad , \qquad \rho_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}.\sigma_{22}}} \quad , \qquad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$

و داریم:

$$\Sigma^{-1} = \frac{1}{\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2} \begin{bmatrix} \sigma_{22} & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{12} & \sigma_{11} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{12} = \rho_{12}\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{22}} \qquad \longrightarrow \qquad \sigma_{11}\sigma_{22} - {\sigma_{12}}^2 = \sigma_{11}\sigma_{22}(1 - {\rho_{12}}^2) \qquad (2)$$

از تابع چگالی چند متغیری و جای‌گذاری در (2) داریم:

$$(\underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{\mu})' \Sigma^{-1} (\underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{\mu}) = [X_1 - \mu_1 \quad X_2 - \mu_2]\, \Sigma^{-1} \begin{bmatrix} X_1 - \mu_1 \\ X_2 - \mu_2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(1 - {\rho_{12}}^2)} \left[\left(\frac{X_1 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}} \right)^2 + \left(\frac{X_2 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}} \right)^2 - 2\rho_{12} \left(\frac{X_1 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}} \right) \left(\frac{X_2 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}} \right) \right]$$

و در نتیجه:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}(1 - {\rho_{12}}^2)}} . exp \left\{ \frac{-1}{2(1 - {\rho_{12}}^2)} \left[\left(\frac{X_1 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}} \right)^2 + \left(\frac{X_2 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}} \right)^2 - 2\rho_{12} \left(\frac{X_1 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}} \right) \left(\frac{X_2 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}} \right) \right] \right\}$$

<u>چند نکته:</u>

❋اگر $\rho_{12} = 0$ ، آنگاه چگالی توام فوق به صورت حاصل‌ضرب دو چگالی نرمال یک متغیره می‌باشد که استقلال X_1 و X_2 را نتیجه می‌دهد.

❋اگر $\underset{\sim}{X} \sim N(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$ ، صفر بودن ضریب همبستگی بین دو مجموعه از عناصر $\underset{\sim}{X}$ به مفهوم استقلال آماری آن دو مجموعه است.

X_1 و X_2 مستقلند. $\Leftrightarrow \quad Cov\left(\underset{\sim}{X}_1, \underset{\sim}{X}_2\right) = 0$

*هر مجموعه از ترکیبات خطی دارای توزیع نرمال است.

$$if \quad \underset{\sim}{X} \sim N(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma) \quad , \quad \underset{\sim}{Y} = A\underset{\sim}{X} + \underset{\sim}{b} \quad \Longmapsto \quad \underset{\sim}{Y} \sim N(A\underset{\sim}{\mu} + b, A \Sigma A')$$

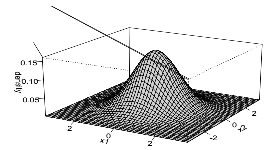
*اگر توزیع های کناری یک توزیع توام هر کدام نرمال باشند، آنگاه دلیلی ندارد که توزیع توام آنها نرمال نیز باشد. ولی توزیع های کناری یک توزیع چند متغیره نرمال، یک توزیع یک متغیره نرمال است.

رسم چگالی نرمال دو متغیره در R:

ابتدا مقادیر پارامترهای میانگین ها و واریانس‌ها و ضریب همبستگی را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

```
mu1 <-0mu2 <-0; s1 <- 1; s2 <- 1; rho <- .1
> x1 <- x2 <- seq(-3.5,3.5,length=50)
> f <- function(x1,x2) {
+ A1 <- 1/(2*pi*s1*s2*(1-rho^2)^(1/2))
+ A2 <- -1/(2*(1-rho^2))
+ A3 <- ((x1-mu1)/s1)^2; A4 <- ((x2-mu2)/s2)^2
+ A5 <- -2*rho*((x1-mu1)/s1)*((x2-mu2)/s2)
+ return(A1*exp(A2*(A3+A4+A5)))
+ }
> z <- outer(x1,x2,f)
> persp(x1, x2, z, col="lightgray",
+ theta=30, phi=20,r=10,expand=0.5,
+ ticktype="detailed",zlab="density")
```

شکل زیر کانتور مورد نظر را نشان می‌دهد:

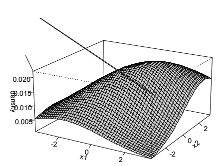



```
>
```

حال مقادیر میانگین و واریانس و ضریب همبستگی را افزایش می‌دهیم:

```
mu1 <-1 ,mu2 <-1; s1 <- 3; s2 <- 3; rho <- .6
> x1 <- x2 <- seq(-3.5,3.5,length=50)
> f <- function(x1,x2) {
+ A1 <- 1/(2*pi*s1*s2*(1-rho^2)^(1/2))
+ A2 <- -1/(2*(1-rho^2))
+ A3 <- ((x1-mu1)/s1)^2; A4 <- ((x2-mu2)/s2)^2
+ A5 <- -2*rho*((x1-mu1)/s1)*((x2-mu2)/s2)
+ return(A1*exp(A2*(A3+A4+A5)))
+ }
> z <- outer(x1,x2,f)
> persp(x1, x2, z, col="lightgray",
+ theta=30, phi=20,r=10,expand=0.5,
+ ticktype="detailed",zlab="density")
>
```

شکل مورد نظر به شکل زیر می‌باشد که نشان می‌دهد که با افزایش مقادیر پارامترها کانتور از عرض و طول کشیده شده است.



قضیه:

فرض کنید : $\underset{\sim}{X} \sim N(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$ و $\underset{\sim}{Y} = \Sigma^{\frac{1}{2}}(\underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{\mu})$، در این‌صورت:

$Y_1, \dots Y_p$ متغیرهای مستقل نرمال $(0,1)$ هستند.

برهان:

ژاکوبین تبدیل Y به X عبارت است از $|\Sigma|^{\frac{1}{2}}$. لذا تابع چگالی $\underset{\sim}{Y}$ به‌صورت

$$g(\underset{\sim}{Y}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} e^{\frac{-\sum y_i^2}{2}}$$

$$g(Y_1) \dots . g(Y_p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-y_1^2}{2}} \dots \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-y_p^2}{2}}$$

قضیه:

اگر $\underset{\sim}{X} \sim N_p(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$ و $|\Sigma| > 0$ باشد، در این‌صورت:

$$\underset{\sim}{U} = (\underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{\mu})' \Sigma^{-1} (\underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{\mu}) \sim \mathcal{X}_p^2(1)$$

برهان:

با تعریف : $\underset{\sim}{Y} = \Sigma^{\frac{-1}{2}}(\underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{\mu})$، داریم:

$$(\underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{\mu})' \Sigma^{-1} (\underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{\mu}) = \underset{\sim}{Y}' \underset{\sim}{Y} = \sum_{i=1}^{p} Y_i^2 \sim \mathcal{X}_p^2$$

Y_i ها متغیرهای مستقل با توزیع نرمال استاندارد هستند.(طبق قضیه قبل) پس:

$$Y_i^2 \sim \mathcal{X}_{(1)}^2 \quad \text{و} \quad \sum_{i=1}^{p} Y_i^2 \sim \mathcal{X}_p^2$$

قضیه:

تابع مشخصه‌ی $\underset{\sim}{X}$ با فرض $\underset{\sim}{X} \sim N(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$ عبارت است از:

$$\phi_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{t}) = \exp\left\{i\,\underset{\sim}{t}'\,\underset{\sim}{\mu} - \frac{1}{2}\underset{\sim}{t}'\,\Sigma\,\underset{\sim}{t}\right\}$$

برهان:

تبدیل زیر را در نظر بگیرید:

$$\underset{\sim}{X} = \Sigma^{\frac{1}{2}}\underset{\sim}{Y} + \underset{\sim}{\mu} \qquad (1)$$

$$\phi_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{t}) = E\left(e^{i\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{X}}\right)$$

با گذاشتن (1) در رابطه ی فوق:

$$E\left(e^{i\underset{\sim}{t}'\left(\Sigma^{\frac{1}{2}}\underset{\sim}{Y}+\underset{\sim}{\mu}\right)}\right) = e^{i\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{\mu}}E\left(e^{i\underset{\sim}{t}'\Sigma^{\frac{1}{2}}\underset{\sim}{Y}}\right) =$$

حال فرض می‌کنیم: $u' = \underset{\sim}{t}'\,\Sigma^{\frac{1}{2}}$. بنابراین داریم:

$$e^{i\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{\mu}}E\left(e^{i\underset{\sim}{u}'\underset{\sim}{Y}}\right) =$$

$$= e^{i\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{\mu}}E\left(e^{iu_1Y_1+\cdots+iu_pY_p}\right) = e^{i\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{\mu}}E\left(e^{iu_1Y_1}\right)E\left(e^{iu_2Y_2}\right)\ldots E\left(e^{iu_pY_p}\right) =$$

$$= e^{i\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{\mu}}\prod_{i=1}^{p}e^{\frac{-u_i^2}{2}} = e^{i\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{\mu}-\frac{\underset{\sim}{u}'\underset{\sim}{u}}{2}} = e^{i\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{\mu}-\frac{\underset{\sim}{t}'\Sigma^{\frac{1}{2}}\Sigma^{\frac{1}{2}}\underset{\sim}{t}}{2}} = e^{i\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{\mu}-\frac{\underset{\sim}{t}'\Sigma\underset{\sim}{t}}{2}}$$

قضیه:

اگر $\underset{\sim}{X}_{p\times1} \sim N(\underset{\sim}{\mu},\Sigma)$ آنگاه تمام زیرمجموعه های $\underset{\sim}{X}$ دارای توزیع نرمال اند.

$$\underset{\sim}{X}_{p\times1} = \begin{bmatrix}\underset{\sim}{X}_1\\ \cdots\\ \underset{\sim}{X}_2\end{bmatrix} \quad\longrightarrow\quad \underset{\sim}{\mu}_{p\times1} = \begin{bmatrix}\underset{\sim}{\mu}_1\\ \cdots\\ \underset{\sim}{\mu}_2\end{bmatrix} \quad,\quad \Sigma_{p\times p} = \begin{bmatrix}\Sigma_{11} & \vdots & \Sigma_{12}\\ \cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots\\ \Sigma_{21} & \vdots & \Sigma_{22}\end{bmatrix}$$

برای مثال $\underset{\sim}{x}_1 \sim N_q(\underset{\sim}{\mu}_1, \Sigma_{11})$ را در نظر بگیرید.

کافیست $A_{q\times p} = [I_{q\times q} \quad 0_{(p-q)(p-q)}]$ را اختیار کنیم.

$$A\underset{\sim}{X} = [I_{q\times q} \quad 0_{(p-q)(p-q)}] \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \end{bmatrix}_{p\times 1} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_q \end{bmatrix}_{q\times 1} = \underset{\sim}{X}_1$$

که می دانیم:

$$\underset{\sim}{X}_1 = A\underset{\sim}{X} \sim N\left(A\underset{\sim}{\mu}, A\sum A'\right) \quad \Longrightarrow \quad \underset{\sim}{X}_1 \sim N_q(\underset{\sim}{\mu}_1, \textstyle\sum_{11})$$

تمرین: قضیه زیر را اثبات کنید.

قضیه:

الف)اگر $\underset{(q1\times 1)}{X_1}$ و $\underset{(q2\times 1)}{X_2}$ مستقل باشند، آنگاه: $Cov\left(\underset{\sim}{X}_1, \underset{\sim}{X}_2\right) = 0$ یک ماتریس $q_1 \times q_2$ از صفرهاست.

ب)اگر $\begin{bmatrix} \underset{\sim}{X}_1 \\ \cdots \\ \underset{\sim}{X}_2 \end{bmatrix}$ دارای توزیع $N_{q_1+q_2}\left(\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \cdots \\ \mu_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sum_{11} & \vdots & \sum_{12} \\ \cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots \\ \sum_{21} & \vdots & \sum_{22} \end{bmatrix}\right)$ باشد، آنگاه : $\underset{\sim}{X}_1$ و $\underset{\sim}{X}_2$ مستقلند، اگر و تنها اگر: $\sum_{12} = 0$.

توزیع شرطی چگالی نرمال چندمتغیره:

قضیه:

فرض کنید $\begin{bmatrix} \underset{\sim}{X}_1 \\ \cdots \\ \underset{\sim}{X}_2 \end{bmatrix}$ دارای توزیع $N_p(\underset{\sim}{\mu}, \sum)$ با: $\underset{\sim}{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \cdots \\ \mu_2 \end{bmatrix}$ و $\sum = \begin{bmatrix} \sum_{11} & \vdots & \sum_{12} \\ \cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots \\ \sum_{21} & \vdots & \sum_{22} \end{bmatrix}$ باشد،که $|\sum_{22}| > 0$. آن‌گاه توزیع شرطی $\underset{\sim}{X}_1$ با معلوم بودن $\underset{\sim}{X}_2 = \underset{\sim}{x}_2$ نرمال بوده و میانگین و کواریانس آن عبارت است از:

$$\mu_{1.2} = \mu_1 + \textstyle\sum_{12}\sum_{22}^{-1}\left(\underset{\sim}{X}_2 - \underset{\sim}{\mu}_2\right) \quad , \quad \sum_{11.2} = \sum_{11} - \sum_{12}\sum_{22}^{-1}\sum_{21}$$

اثبات:

ماتریس A را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A=\begin{bmatrix} I_{q\times q} & \vdots & (-\sum_{12}\sum_{22}{}^{-1})_{q\times p-q} \\ \cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots \\ 0_{(p-q)\times q} & \vdots & I_{(p-q)\times(p-q)} \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{Y}=A\left(\underset{\sim}{Y}-\underset{\sim}{\mu}\right)=A\begin{bmatrix} \underset{\sim}{X}_1-\underset{\sim}{\mu}_1 \\ \cdots \\ \underset{\sim}{X}_2-\underset{\sim}{\mu}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \underset{\sim}{X}_1-\underset{\sim}{\mu}_1-\sum_{12}\sum_{22}{}^{-1}(\underset{\sim}{X}_2-\underset{\sim}{\mu}_2) \\ \cdots \\ \underset{\sim}{X}_2-\underset{\sim}{\mu}_2 \end{bmatrix}$$

$$A\sum A'=\begin{bmatrix} I & \vdots & -\sum_{12}\sum_{22}{}^{-1} \\ \cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots \\ 0 & \vdots & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sum_{11} & \vdots & \sum_{12} \\ \cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots \\ \sum_{21} & \vdots & \sum_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \vdots & 0 \\ \cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots \\ -\sum_{12}\sum_{22}{}^{-1} & \vdots & I \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \sum_{11}-\sum_{12}\sum_{22}{}^{-1}\sum_{21} & \vdots & 0 \\ \cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots \\ 0 & \vdots & \sum_{22} \end{bmatrix} \qquad (*)$$

چون طبق $(*)$ $\underset{\sim}{Y_1}=\underset{\sim}{X}_1-\underset{\sim}{\mu}_1-\sum_{12}\sum_{22}{}^{-1}(\underset{\sim}{X}_2-\underset{\sim}{\mu}_2)$ و $\underset{\sim}{Y_2}=\underset{\sim}{X}_2-\underset{\sim}{\mu}_2$ دارای کواریانس صفرند پس مستقلند. از طرفی $\underset{\sim}{Y_1}=\underset{\sim}{X}_1-\underset{\sim}{\mu}_1-\sum_{12}\sum_{22}{}^{-1}(\underset{\sim}{X}_2-\underset{\sim}{\mu}_2)$ دارای توزیع نرمال $N_q(0\ ,\ \sum_{11}-\sum_{12}\sum_{22}{}^{-1}\sum_{21})$ است.

$$\underset{\sim}{X}_1-\underset{\sim}{\mu}_1-\sum_{12}\sum_{22}{}^{-1}(\underset{\sim}{X}_2-\underset{\sim}{\mu}_2)\ \sim N_q(0,\sum_{11}-\sum_{12}\sum_{22}{}^{-1}\sum_{21})$$

از طرفی اگر $\underset{\sim}{X}_2=\underset{\sim}{x}_1$ معلوم باشد، آنگاه :

$$\underset{\sim}{\mu}_1+\sum_{12}\sum_{22}{}^{-1}(\underset{\sim}{X}_2-\underset{\sim}{\mu}_2) \quad \longrightarrow \quad \text{ثابت است}$$

$$\left(\underset{\sim}{X}_1-(\underset{\sim}{\mu}_1+\sum_{12}\sum_{22}{}^{-1}(\underset{\sim}{X}_2-\underset{\sim}{\mu}_2))\mid \underset{\sim}{X}_2=\underset{\sim}{x}_1\right)\approx \underset{\sim}{X}_1-a$$

بنابراین از (1):

$$\underset{\sim}{X}_1\mid \underset{\sim}{X}_2=\underset{\sim}{x}_1\sim N_q(a,\sum_{11}-\sum_{12}\sum_{22}{}^{-1}\sum_{21})$$

$$=N_q\left(\mu_1+\sum_{12}\sum_{22}{}^{-1}(\underset{\sim}{X}_2-\underset{\sim}{\mu}_2),\sum_{11}-\sum_{12}\sum_{22}{}^{-1}\sum_{21}\right)$$

چگالی شرطی توزیع نرمال دو متغیری:

فرض کنید: $\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix}\right)$.

چگالی شرطی $\underset{\sim}{X}_1$ با معلوم بودن $\underset{\sim}{\mathrm{X}}_2 = \underset{\sim}{\mathrm{x}}_2$ عبارت است از:(از قضیه قبل)

$$(\underset{\sim}{X}_1 \mid \underset{\sim}{\mathrm{X}}_2 = \underset{\sim}{\mathrm{x}}_2) \sim N\left(\mu_1 + \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{22}}(\underset{\sim}{\mathrm{X}}_2 - \underset{\sim}{\mu}_2), \sigma_{11} - \frac{{\sigma_{12}}^2}{\sigma_{22}}\right)$$

اثبات به طور مستقیم)

$$f(x_1 \mid x_2) = \frac{f(x_1, x_2)}{f(x_2)} \qquad (1)$$

$$f(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_{22}}} \exp\left\{-\frac{(x_2 - \mu_2)^2}{2\sigma_{22}}\right\} \qquad (2)$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_{22}} \times \sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_{11}(1 - \rho_{12}^2)}} \times$$

$$\times\, exp\left\{\frac{-1}{2(1 - \rho_{12}^2)}\left[\frac{(x_1 - \mu_1)^2}{\sigma_{11}} - 2\rho_{12}\frac{(x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{22}}} + \frac{(x_2 - \mu_2)^2}{\sigma_{22}}\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_{22}}\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_{11}(1 - \rho_{12}^2)}} . exp\left\{\frac{-1}{2\sigma_{11}(1 - \rho_{12}^2)}\right.$$

$$\left. \times \left(x_1 - \mu_1 - \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{22}}(x_2 - \mu_2)\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{(x_2 - \mu_2)^2}{\sigma_{22}}\right\} \qquad (3)$$

با جایگذاری 2 و 3 در 1:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_{11}(1 - \rho_{12}^2)}} exp\left\{\frac{-1}{2\sigma_{11}((1 - \rho_{12}^2)}\left(x_1 - \mu_1 - \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{22}}(x_2 - \mu_2)\right)^2\right\} \sim$$

$$\sim N\left(\mu_1 + \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{22}}\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}_2 - \underset{\sim}{\mu}_2\right), \sigma_{11}(1 - \rho_{12}^2)\right)$$

قضیه:

فرض کنید $\underset{\sim}{\mathrm{X}}_1 \ldots \underset{\sim}{\mathrm{X}}_n$ دوبه‌دو مستقل بوده و $\underset{\sim}{\mathrm{X}}_j$ دارای توزیع $N_p(\underset{\sim}{\mu}_j, \Sigma)$ باشد. (ماتریس واریانس کواریانس $\underset{\sim}{\mathrm{X}}_j$ یکسان و برابر Σ است). در این‌صورت اگرتعریف کنیم:

$$\underset{\sim}{\mathrm{V}}_1 = c_1 \underset{\sim}{\mathrm{X}}_1 + \cdots + c_n \underset{\sim}{\mathrm{X}}_n \qquad , \qquad \underset{\sim}{\mathrm{V}}_2 = b_1 \underset{\sim}{\mathrm{X}}_1 + \cdots + b_n \underset{\sim}{\mathrm{X}}_n$$

آنگاه:

$$\underset{\sim}{V}_1 \sim N_p\left(\sum_{j=1}^{n} c_j \underset{\sim}{\mu}_j, (\sum_{j=1}^{n} c_j^2)\Sigma\right)$$

و

$$\begin{bmatrix}\underset{\sim}{V}_1\\ \underset{\sim}{V}_2\end{bmatrix} \sim N_{2p}\left[\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{n} c_j \underset{\sim}{\mu}_j\\ \sum_{j=1}^{n} b_j \underset{\sim}{\mu}_j\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}(\sum_{j=1}^{n} c_j^2)\Sigma & (\underset{\sim}{b}' \underset{\sim}{c})\Sigma\\ (\underset{\sim}{b}' \underset{\sim}{c})\Sigma & (\sum_{j=1}^{n} b_j^2)\Sigma\end{pmatrix}\right]$$

و $\underset{\sim}{V}_1$ و $\underset{\sim}{V}_2$ مستقلند، اگر: $\underset{\sim}{b}' \underset{\sim}{c} = 0$.

حل: می‌دانیم اگر $\underset{\sim}{X}_1, \dots, \underset{\sim}{X}_n$ دوبه دو مستقل باشند، آنگاه:

$$\underset{\sim}{X} = \begin{bmatrix}\underset{\sim}{X}_1\\ \vdots\\ \underset{\sim}{X}_n\end{bmatrix} \sim N_{np}\left(\begin{bmatrix}\underset{\sim}{\mu}_1\\ \vdots\\ \underset{\sim}{\mu}_n\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\Sigma & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \Sigma\end{bmatrix}\right)$$

با انتخاب $A_{2p\times np} = \begin{bmatrix}c_1 I \dots c_n I\\ b_1 I \dots b_n I\end{bmatrix}$ که در آن I ماتریس همانی $p \times p$ است، می‌توان نوشت:

$$A\underset{\sim}{X} = \begin{bmatrix}c_1 \underset{\sim}{X}_1 + \cdots + c_n \underset{\sim}{X}_n\\ b_1 \underset{\sim}{X}_1 + \cdots + b_n \underset{\sim}{X}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sum_{j=1}^{n} c_j \underset{\sim}{X}_j\\ \sum_{j=1}^{n} b_j \underset{\sim}{X}_j\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\underset{\sim}{V}_1\\ \underset{\sim}{V}_2\end{bmatrix}$$

که می‌دانیم $A\underset{\sim}{X}$ دارای توزیع $N_{2p}(A\underset{\sim}{\mu}, A\Sigma A')$ است.

$$A\underset{\sim}{\mu} = A\begin{bmatrix}\underset{\sim}{\mu}_1\\ \vdots\\ \underset{\sim}{\mu}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sum_{j=1}^{n} c_j \underset{\sim}{X}_j\\ \sum_{j=1}^{n} b_j \underset{\sim}{X}_j\end{bmatrix}$$

$$A\Sigma A' = \begin{bmatrix}c_1 I \dots c_n I\\ b_1 I \dots b_n I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Sigma & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \Sigma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1 I & b_1 I\\ \vdots & \vdots\\ c_n I & b_n I\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}c_1\Sigma & \dots & c_n\Sigma\\ b_1\Sigma & \dots & b_n\Sigma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1 I & b_1 I\\ \vdots & \vdots\\ c_n I & b_n I\end{bmatrix} =$$

$$=\begin{bmatrix} (\sum_{j=1}^{n} c_j^2)\Sigma) & (\sum_{j=1}^{n} c_j b_j)\Sigma \\ (\sum_{j=1}^{n} c_j b_j)\Sigma & (\sum_{j=1}^{n} b_j^2)\Sigma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1^2\Sigma + \cdots + c_n^2\Sigma & c_1 b_1\Sigma + \cdots + c_n b_n\Sigma \\ c_1 b_1\Sigma + \cdots + c_n b_n\Sigma & b_1^2\Sigma + \cdots + b_n^2\Sigma \end{bmatrix}$$

بدیهی است وقتی $\underset{\sim}{\mathrm{b}}'\underset{\sim}{\mathrm{c}} = \sum_{j=1}^{n} c_j b_j$ باشد ، $(\sum_{j=1}^{n} c_j\, b_j)\ \Sigma$ صفر خواهد شد و در نتیجه $\underset{\sim}{\mathrm{V}}_1$ و $\underset{\sim}{\mathrm{V}}_2$ مستقلند.

تمرین:

ثابت کنید $\bar{X}$ میانگین نمونه ای از جامعه نرمال چندمتغیره دارای توزیع نرمال $N_p(\underset{\sim}{\mu}, \frac{1}{n}\Sigma)$ است.(n اندازه‌ی نمونه)

چند قضیه مفید:

قضیه 1:

اگر $\underset{\sim}{X} \sim N_p(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$، آنگاه $A\underset{\sim}{\mathrm{X}}$ و $B\underset{\sim}{\mathrm{X}}$ مستقلند، اگر و تنها اگر :

$$A \sum B' = 0$$

مثال1.4)

فرض کنید $\underset{\sim}{\mathrm{X}} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\mathrm{X}}_1 \\ \underset{\sim}{X}_2 \end{bmatrix}$. نشان دهید $\underset{\sim}{\mathrm{X}}_1$ و $\underset{\sim}{X}_2 - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\underset{\sim}{\mathrm{X}}_1$ مستقلند و توزیع آنها عبارت است از:

$$\underset{\sim}{\mathrm{X}}_1 \sim N(\underset{\sim}{\mu}_1, \Sigma_{11}) \quad , \quad \underset{\sim}{X}_2 - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\underset{\sim}{\mathrm{X}}_1 \sim N(\underset{\sim}{\mu}_2 - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\mu_1, \Sigma_{22.1})$$

که در آن:

$$(\Sigma_{22.1} = \Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12})$$

حل:

تعریف می‌کنیم: $A = \begin{bmatrix} -\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1} & I \end{bmatrix}$ و $B = [\, I \quad 0 \,]$، آنگاه:

$$A\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{X}_2 - \sum_{21}\sum_{11}^{-1}\underset{\sim}{X}_1 \quad , \quad B\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{X}_1$$

کافیست نشان دهیم: $A\sum B' = 0$.

$$\begin{bmatrix}-\sum_{21}\sum_{11}^{-1} & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sum_{11} & \sum_{12}\\ \sum_{21} & \sum_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\sum_{21}+\sum_{21} & -\sum_{21}\sum_{11}^{-1}\sum_{12}+\sum_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I\\0\end{bmatrix} = 0$$

پس $\underset{\sim}{X}_1$ و $\underset{\sim}{X}_2 - \sum_{21}\sum_{11}^{-1}\underset{\sim}{X}_1$ مستقلند و :

$$\underset{\sim}{X}_1 \sim N(\underset{\sim}{\mu}_1, \sum_{11})$$

$$\underset{\sim}{X}_2 - \sum_{21}\sum_{11}^{-1}\underset{\sim}{X}_1 \sim N(\underset{\sim}{\mu}_2 - \sum_{21}\sum_{11}^{-1}\mu_1, \sum_{22.1})$$

قضیه2 :

اگر $\underset{\sim}{X} \sim N_p(\underset{\sim}{\mu}, \sum)$ ، آنگاه : $\underset{\sim}{X}'A\underset{\sim}{X}$ و $\underset{\sim}{X}'B\underset{\sim}{X}$ مستقلند. اگر و تنها اگر:

$$A\sum B = 0 \quad \text{یا} \quad B\sum A = 0$$

قضیه 3:

اگر $X_{p\times n}$ ماتریس‌داده $N(\underset{\sim}{\mu}, \sum)$ باشد، آنگاه: $Y = AX'B$ و $Z = CX'D$ مستقلند، اگر :

$$AC' = 0 \quad \text{یا} \quad B'\sum D = 0.$$

مثال 2.4)

نشان دهید $\bar{X}$ و S مستقلند.

(اگر X از Y مستقل باشد، آنگاه X از Y^2 مستقل است).

$$\underset{\sim}{\bar{X}} = \frac{1}{n}X1_n \quad \longrightarrow \quad \underset{\sim}{\bar{X}}' = n^{-1}1_n'X'$$

$$S = \frac{1}{n-1}XHX' = \frac{1}{n-1}(XH)(XH)'$$

$$\begin{cases} n^{-1}1_n'X'I = AX'B \\ HX'I = CX'D \end{cases} \Longrightarrow \quad AC' = 0 \quad \Longrightarrow \quad n^{-1}1_n'H = 0$$

مثال3.4)

فرض کنید $\underset{\sim}{X} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{X}_1 \\ \underset{\sim}{X}_2 \end{bmatrix} \sim N_{2p}(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$ که در آن:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{12} & \Sigma_{11} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \underset{\sim}{\mu} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\mu}_1 \\ \underset{\sim}{\mu}_2 \end{bmatrix}.$$

نشان دهید $\underset{\sim}{X}_1 + \underset{\sim}{X}_2$ و $\underset{\sim}{X}_1 - \underset{\sim}{X}_2$ از یکدیگر مستقلند.

حل:

$$A = \begin{bmatrix} I_p & I_p \end{bmatrix} \longrightarrow A\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{X}_1 + \underset{\sim}{X}_2$$

$$B = \begin{bmatrix} I_p & -I_p \end{bmatrix} \longrightarrow B\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{X}_1 - \underset{\sim}{X}_2$$

$$A \Sigma B' = \begin{bmatrix} I_p & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{12} & \Sigma_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} + \Sigma_{12} \\ \Sigma_{12} + \Sigma_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_p \\ -I_p \end{bmatrix} = 0$$

یا می‌توان نوشت:

$$A = \begin{bmatrix} I_p & I_p \\ I_p & -I_p \end{bmatrix}$$

$$A\underset{\sim}{X} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{X}_1 + \underset{\sim}{X}_2 \\ \underset{\sim}{X}_1 - \underset{\sim}{X}_2 \end{bmatrix} \sim N(A\underset{\sim}{\mu}\ ,\ A \Sigma A')$$

$$A \Sigma A' = \begin{bmatrix} I_p & I_p \\ I_p & -I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{12} & \Sigma_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_p & I_p \\ I_p & -I_p \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \Sigma_{11} + \Sigma_{12} & \Sigma_{12} + \Sigma_{11} \\ \Sigma_{11} - \Sigma_{12} & \Sigma_{12} - \Sigma_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_p & I_p \\ I_p & -I_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\Sigma_{11} + 2\Sigma_{12} & 0 \\ 0 & 2\Sigma_{11} - 2\Sigma_{12} \end{bmatrix}$$

نمونه گیری از توزیع نرمال چند متغیره و برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترها:

در عمل $\underset{\sim}{\mu}$ و Σ نامعلومند و باید برآورد شوند.

در اینجا برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای $\underset{\sim}{\mu}$ و Σ را برای یک جامعه نرمال چند متغیره به‌دست می-آوریم.

فرض کنید که بردارهای $\underset{\sim}{X}_1, \dots, \underset{\sim}{X}_n$ نمونه ای تصادفی از جامعه نرمال چند متغیری با بردار میانگین $\underset{\sim}{\mu}$ و

ماتریس کواریانس Σ باشد:

$$\underset{\sim}{X}_1, \dots \underset{\sim}{X}_n \sim N_p(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$$

چون $\underset{\sim}{X}_1, \dots \underset{\sim}{X}_n$ مستقل هستند و هریک دارای توزیع $N_p(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$، پس چگالی توام تمام مشاهدات حاصل‌ضرب چگالی‌های نرمال حاشیه ای است.

پس:

$$f(\underset{\sim}{X}_1, \dots \underset{\sim}{X}_n) = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} exp\left\{ \frac{\frac{-1}{2}\left(\underset{\sim}{X}_j - \underset{\sim}{\mu}\right)' \Sigma^{-1} \left(\underset{\sim}{X}_j - \underset{\sim}{\mu}\right)}{2} \right\}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{np}{2}}} \frac{1}{|\Sigma|^{\frac{n}{2}}} \exp\left\{ \frac{-1}{2} \sum_{j=1}^{n} (\underset{\sim}{X}_j - \underset{\sim}{\mu})' \Sigma^{-1} (\underset{\sim}{X}_j - \underset{\sim}{\mu}) \right\} \qquad (1)$$

ازطرفی داریم:

$$\left(\underset{\sim}{X}_j - \underset{\sim}{\mu}\right)'_{p\times p} \Sigma^{-1}{}_{p\times p} \left(\underset{\sim}{X}_j - \underset{\sim}{\mu}\right)_{p\times 1} = tr\left[\left(\underset{\sim}{X}_j - \underset{\sim}{\mu}\right)' \Sigma^{-1} \left(\underset{\sim}{X}_j - \underset{\sim}{\mu}\right)\right]$$

و از خواص جابجایی اثر:

$$= tr\left[\Sigma^{-1} (\underset{\sim}{X}_j - \underset{\sim}{\mu})(\underset{\sim}{X}_j - \underset{\sim}{\mu})'\right] \qquad (2)$$

با جای‌گذاری 2 در 1:

$$\sum_{j=1}^{n} (\underset{\sim}{X}_j - \underset{\sim}{\mu})' \Sigma^{-1} (\underset{\sim}{X}_j - \underset{\sim}{\mu}) = \sum_{j=1}^{n} tr\left[\Sigma^{-1} (\underset{\sim}{X}_j - \underset{\sim}{\mu})(\underset{\sim}{X}_j - \underset{\sim}{\mu})'\right]$$

$$= tr\left[\Sigma^{-1} \left(\sum_{j=1}^{n} (\underset{\sim}{X}_j - \underset{\sim}{\mu})(\underset{\sim}{X}_j - \underset{\sim}{\mu})' \right)\right]$$

به هر جمله $(\underset{\sim}{X}_j - \underset{\sim}{\mu})$ ، مقدار $\bar{X}$ را اضافه و کم می‌کنیم:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\underset{\sim}{X}_j-\underset{\sim}{\bar{X}}+\underset{\sim}{\bar{X}}-\underset{\sim}{\mu}\right)\left(\underset{\sim}{X}_j-\underset{\sim}{\bar{X}}+\underset{\sim}{\bar{X}}-\underset{\sim}{\mu}\right)'=\sum_{j=1}^{n}\left(\underset{\sim}{X}_j-\underset{\sim}{\bar{X}}\right)\left(\underset{\sim}{X}_j-\underset{\sim}{\bar{X}}\right)'$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\left(\underset{\sim}{\bar{X}}-\underset{\sim}{\mu}\right)\left(\underset{\sim}{X}_j-\underset{\sim}{\bar{X}}\right)'+\sum_{j=1}^{n}\left(\underset{\sim}{X}_j-\underset{\sim}{\bar{X}}\right)\left(\underset{\sim}{\bar{X}}-\underset{\sim}{\mu}\right)'+n(\underset{\sim}{\bar{X}}-\underset{\sim}{\mu})\left(\underset{\sim}{\bar{X}}-\underset{\sim}{\mu}\right)'$$

$$=\sum_{j=1}^{n}(\underset{\sim}{X}_j-\underset{\sim}{\bar{X}})\left(\underset{\sim}{X}_j-\underset{\sim}{\bar{X}}\right)'+n(\underset{\sim}{\bar{X}}-\underset{\sim}{\mu})(\underset{\sim}{\bar{X}}-\underset{\sim}{\mu})'$$

اکنون می‌توانیم چگالی(1) را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$f(\underset{\sim}{x}_1,\dots,\underset{\sim}{x}_n)=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{-np}{2}}|\Sigma|^{\frac{n}{2}}}\exp\left\{-\frac{tr\left[\Sigma^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\underset{\sim}{X}_j-\underset{\sim}{\bar{X}}\right)\left(\underset{\sim}{X}_j-\underset{\sim}{\bar{X}}\right)'+n(\underset{\sim}{\bar{X}}-\underset{\sim}{\mu})(\underset{\sim}{\bar{X}}-\underset{\sim}{\mu})'\right)\right]}{2}\right\}$$

عبارت حاصل به ازای مجموعه‌ی ثابتی از مشاهدات $\underset{\sim}{X}_1,\dots\underset{\sim}{X}_n$ "تابع درست‌نمایی"نامیده می‌شود. بنابراین با قراردادن مشاهدات $\underset{\sim}{x}_1,\dots\underset{\sim}{x}_n$ در چگالی توام فوق تابع درست‌نمایی به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$L(\underset{\sim}{\mu},\Sigma)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{-np}{2}}|\Sigma|^{\frac{n}{2}}}\exp\left\{-\frac{tr\left[\Sigma^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\underset{\sim}{x}_j-\underset{\sim}{\bar{x}}\right)\left(\underset{\sim}{x}_j-\underset{\sim}{\bar{x}}\right)'+n(\underset{\sim}{\bar{x}}-\underset{\sim}{\mu})(\underset{\sim}{\bar{x}}-\underset{\sim}{\mu})'\right)\right]}{2}\right\}$$

تابع درست‌نمایی تابعی از پارامترهای مجهول جامعه یعنی $\underset{\sim}{\mu}$ و Σ است. فرض کردیم به ازای $\underset{\sim}{X}$ها مقادیر ثابت $\underset{\sim}{x}$ را گذاشتیم و تابعی بر حسب $\underset{\sim}{\mu}$ و Σ که مجهولند داریم.

که $L(\underset{\sim}{\mu},\Sigma)$ را به‌صورت زیر بنا به خواص اثر می‌نویسیم:

$$L(\underset{\sim}{\mu},\Sigma)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{-np}{2}}|\Sigma|^{\frac{n}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}tr\left[\Sigma^{-1}(\sum_{j=1}^{n}\left(\underset{\sim}{X}_j-\underset{\sim}{\bar{X}}\right)\left(\underset{\sim}{X}_j-\underset{\sim}{\bar{X}}\right)')\right]\right\}.exp\left\{-\frac{n}{2}(\underset{\sim}{\bar{X}}-\underset{\sim}{\mu})'\Sigma^{-1}(\underset{\sim}{\bar{X}}-\underset{\sim}{\mu})\right\}$$

اکنون برای به‌دست آوردن برآوردگرهای ماکسیمم درست‌نمایی $\underset{\sim}{\mu}$ و Σ، چون Σ معین مثبت است، پس Σ^{-1} نیز معین مثبت است. لذا:

$$(\underset{\sim}{\bar{X}}-\underset{\sim}{\mu})'\Sigma^{-1}(\underset{\sim}{\bar{X}}-\underset{\sim}{\mu})>0$$

و زمانی برابر با صفر است که $\underset{\sim}{\bar{X}} - \underset{\sim}{\mu} = 0$ باشد. پس ماکسیمم تابع درست‌نمایی نسبت به $\underset{\sim}{\mu}$ در نقطه $\underset{\sim}{\hat{\mu}} = \underset{\sim}{\bar{X}}$ به‌دست می آید. (از روش مشتق گیری).

اکنون تابع $L(\underset{\sim}{\hat{\mu}}, \Sigma)$ نسبت به Σ ماکسیمم می‌کنیم: از (3) و $\underset{\sim}{\hat{\mu}} = \underset{\sim}{\bar{X}}$ داریم:

$$L(\underset{\sim}{\hat{\mu}}, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{-np}{2}} |\Sigma|^{\frac{n}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2} tr\left[\Sigma^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\underset{\sim}{X}_j - \underset{\sim}{\bar{X}}\right)\left(\underset{\sim}{X}_j - \underset{\sim}{\bar{X}}\right)'\right)\right]\right\}$$

با فرض: $A = \sum_{j=1}^{n}(\underset{\sim}{X}_j - \underset{\sim}{\bar{X}})(\underset{\sim}{X}_j - \underset{\sim}{\bar{X}})'$ ، داریم:

$$L(\underset{\sim}{\hat{\mu}}, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{-np}{2}} |\Sigma|^{\frac{n}{2}}} exp\left\{-\frac{1}{2} tr[\Sigma^{-1} A]\right\}$$

اکنون نشان می‌دهیم که $L(\underset{\sim}{\hat{\mu}}, \Sigma)$ یا $\ell(\underset{\sim}{\hat{\mu}}, \Sigma) = \ln L(\underset{\sim}{\hat{\mu}}, \Sigma)$ زمانی ماکسیمم می‌شود که:

$\Sigma = \frac{1}{n} A$ باشد. یعنی:

$$H = lnL\left(\underset{\sim}{\hat{\mu}}, \frac{1}{n}A\right) - lnL\left(\underset{\sim}{\hat{\mu}}, \Sigma\right) \geq 0$$

$$H = \left[\frac{-pn}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2} ln\left|\frac{1}{n}A\right| - \frac{1}{2} tr\left\{\left(\frac{1}{n}A^{-1}\right)A\right\}\right] - \left[\frac{-pn}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2} ln|\Sigma| - \frac{1}{2} tr(\Sigma^{-1}A)\right]$$

$$= \frac{-n}{2} ln\left|\frac{1}{n}A\right| - \frac{-pn}{2} + \frac{n}{2} ln|\Sigma| + \frac{1}{2} tr(\Sigma^{-1}A)$$

$$= \frac{-n}{2}\left\{ln\left|\frac{1}{n}A\right| + p - ln|\Sigma| - tr(\Sigma^{-1}\frac{1}{n}A)\right\}$$

$$= \frac{-n}{2}\left\{ln\left|\Sigma^{-1}\frac{1}{n}A\right| + p - tr(\Sigma^{-1}\frac{1}{n}A)\right\}$$

اگر $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ مقادیر ویژه $\Sigma^{-1}\frac{1}{n}A$ باشند، آنگاه:

$$tr(\Sigma^{-1}\frac{1}{n}A) = \sum_{i=1}^{p}\lambda_i \quad , \quad \left|\Sigma^{-1}\frac{1}{n}A\right| = \sum_{i=1}^{p}\lambda_i$$

$$H=\frac{n}{2}\left\{tr(\Sigma^{-1}\frac{1}{n}A)-ln\left|\Sigma^{-1}\frac{1}{n}A\right|-p\right\}=\frac{n}{2}\left\{\sum_{i=1}^{p}\lambda_i-\sum_{i=1}^{p}ln\lambda_i-p\right\}$$

می‌دانیم: $ln\lambda \leq \lambda-1$ ، پس:

$$\sum_{i=1}^{p}\lambda_i-\sum_{i=1}^{p}ln\lambda_i-p\geq 0 \quad \Longrightarrow \quad H=ln\left(\underset{\sim}{\hat{\mu}},\frac{1}{n}A\right)-ln\left(\underset{\sim}{\hat{\mu}},\Sigma\right)\geq 0$$

بنابراین برآورد ماکسیمم درست‌نمایی برای Σ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\widehat{\Sigma}=\frac{1}{n}A=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\underset{\sim}{\mathrm{X}}_i-\underset{\sim}{\overline{\mathrm{X}}})\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}_i-\underset{\sim}{\overline{\mathrm{X}}}\right)^{\prime}=\frac{n-1}{n}S$$

فرض کنید A یک ماتریس معین مثبت با تجزیه‌ی طیفی $A=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i e_i e_i^{\prime}$ باشد. آنگاه:

$$A=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i e_i e_i^{\prime}=p\wedge p^{\prime}$$

$$pp^{\prime}=p^{\prime}p=I \quad , \quad \wedge=\begin{bmatrix}\lambda_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \lambda_p\end{bmatrix} \quad , \quad \lambda_i>0$$

$$tr(A)=tr\left(\wedge pp^{\prime}\right)=tr(\wedge)=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i$$

$$|A|=\left|p\wedge p^{\prime}\right|=|p||\wedge|\left|p^{\prime}\right|=|\wedge||I|=\prod_{i=1}^{p}\lambda_i$$

اکنون اگر به‌جای $\underset{\sim}{\mu}$ و Σ ، برآورد آنها را در L بگذاریم:

$$L(\underset{\sim}{\hat{\mu}},\widehat{\Sigma})=\left[\frac{1}{(2\pi)^{\frac{np}{2}}}exp\left\{-\frac{np}{2}\right\}\right].\frac{1}{\left|\widehat{\Sigma}\right|^{\frac{n}{2}}} \quad \longrightarrow \quad L(\underset{\sim}{\hat{\mu}},\widehat{\Sigma})=\text{ثابت}\times(\text{واریانس تعمیم یافته})^{-\frac{n}{2}}$$

نکته:

برآوردگرهای ماکسیمم درست‌نمایی خاصیت ناوردایی دارند. یعنی اگر $\hat{\theta}$ برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی θ باشد، آنگاه برآورد ماکسیمم درست‌نمایی هر تابعی از θ مثل $h(\theta)$ ، $h(\hat{\theta})$ خواهد بود.

برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی از روش مشتق‌گیری:

$$L(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma) =$$

$$= (2\pi)^{-\frac{np}{2}} |\Sigma|^{\frac{-n}{2}} \exp\{\frac{-1}{2} tr[\Sigma^{-1}(\sum_{j=1}^{n}(\underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{\bar{X}})(\underset{\sim}{X}_j - \underset{\sim}{\bar{X}})']\} \exp\{\frac{-n}{2}(\underset{\sim}{\bar{X}} - \underset{\sim}{\mu})' \Sigma^{-1} (\underset{\sim}{\bar{X}} - \underset{\sim}{\mu})\}$$

پس:

$$ln(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma) = \frac{-np}{2} ln 2\pi - \frac{n}{2} ln|\Sigma| - \frac{1}{2} tr\left[\Sigma^{-1} \sum_{j=1}^{n}(\underset{\sim}{X}_j - \underset{\sim}{\bar{X}})(\underset{\sim}{X}_j - \underset{\sim}{\bar{X}})'\right] - \frac{n}{2}\left[(\underset{\sim}{\bar{X}} - \underset{\sim}{\mu})' \Sigma^{-1} (\underset{\sim}{\bar{X}} - \underset{\sim}{\mu})\right]$$

$$\frac{\partial lnL(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)}{\partial \underset{\sim}{\mu}} = -\frac{n}{2} 2 \Sigma^{-1}(\underset{\sim}{\bar{X}} - \underset{\sim}{\mu}) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \underset{\sim}{\hat{\mu}} = \underset{\sim}{\bar{X}}$$

توزیع نمونه ای $\underset{\sim}{\bar{X}}$ و S :

$$\bar{X} = \frac{1}{n} X1 = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{p1} & \cdots & X_{pn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \vdots \\ \bar{X}_p \end{bmatrix}$$

$$(n-1)S = XHX' \qquad , \qquad H = I - \frac{1}{n}J$$

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{p1} & \cdots & X_{pn} \end{bmatrix} = [\underset{\sim}{X}_1 \quad \cdots \quad \underset{\sim}{X}_n]$$

$$if \qquad p = 1 \qquad X \sim N(\mu, \Sigma) \qquad \Longrightarrow \qquad \bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

به‌طور مشابه:

$$if \qquad p \geq 2 \qquad \Longrightarrow \qquad \underset{\sim}{\bar{X}} \sim N(\underset{\sim}{\mu}, \frac{1}{n}\Sigma)$$

و نشان می‌دهیم: $(n-1)S \sim W_p(\Sigma, n-1)$.

توزیع ویشارت:

فرض کنید که ماتریس $X_{p\times n}$ از توزیع $N_p(\underset{\sim}{0}\ ,\sum)$ باشد. تعریف می‌کنیم:

$$M_{p\times p}=X_{p\times n}X'_{n\times p}\sim W_p(\sum,n)$$

خواص توزیع ویشارت:

1)اگر $M\sim W_p(\sum,n)$، آنگاه: $E(M)=n\sum$.

2)اگر $i=1,\ldots k$ ، M_i مستقل و دارای توزیع $W_p(\sum,n_i)$ باشند، آنگاه:

$$\sum_{i=1}^{k}M_i\sim W_p(\sum,n)\qquad,\qquad n=\sum_{i=1}^{k}n_i$$

3)چگالی $W_p(\sum,n)$ به‌صورت زیر است:

$$f(M)=\frac{|M|^{\frac{1(n-p-1)}{2}}\exp\left\{\frac{-1}{2}tr(M\Sigma^{-1})\right\}}{2^{\frac{np}{2}}\ \pi^{\frac{p(p-1)}{4}}\ |\sum|^{\frac{n}{2}}\prod_{i=1}^{p}\Gamma\{\frac{n+1-i}{2}\}}$$

قضیه:

اگر $M\sim W_p(\sum,n)$ و $B_{p\times q}$، پس توزیع $B'MB$ به‌صورت $W_q(B'MB,n)$ است.

اثبات:

$$W=B'MB=B'(XX')B=(X'B)'(X'B)=(B'X)(B'X)'$$

$$X\sim N(\underset{\sim}{0}\ ,\sum)\quad\Longrightarrow\quad B'X\sim N(\underset{\sim}{0}\ ,B'\sum B)$$

$$W=(B'X)(B'X)'\sim W_q(B'\sum B,n)$$

قضیه:

اگر $M\sim W_p(\sum,n)$ و $a\in R^p$ به طوری‌که $a'\sum a$، آنگاه:

$$\frac{a'\Sigma^{-1}a}{a^{-1}M^{-1}a}\sim\chi^2_{m-p+1}\qquad,\qquad\frac{a'Ma}{a'\sum a}\sim\chi^2_m$$

قضیه:

فرض کنید $X_{p\times n}$ ماتریس داده از $N_p(\underset{\sim}{0},\sum)$ باشد و $C_{n\times n}$ یک ماتریس متقارن است. آنگاه:

$XC\acute{X}$ (a دارای توزیع ویشارت خواهد بود اگر و تنها اگر:

$$XC\acute{X} \sim W_p(\sum, r) \qquad , \quad r = rank(C) = tr(C)$$

$XC\acute{X}$ (b توزیعی مشابه مجموع وزنی ماتریس‌هایی از توزیع ویشارت مستقل از هم هر یک با 1 درجه آزادی می‌باشد.

$$XC\acute{X} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i M_i \quad , \quad M_i \sim W_p(\sum, 1)$$

نتیجه:

اگر $X \sim N_p(\underset{\sim}{0}, \sum)$، آنگاه:

$$(n-1)S \sim W_p(\sum, n-1)$$

نکته:

اگر M_1 و M_2 مستقل و $M_1 \sim W_p(\sum, n_1)$ و $M_2 \sim W_p(\sum, n_2)$، آنگاه:

$$M = M_1 + M_2 \sim W_p(\sum, n_1 + n_2)$$

اثبات:فرض می‌کنیم:

$$X_{1(p\times n_1)} \sim N\left(\underset{\sim}{0}, \sum\right) \longrightarrow M_1 = X_1 X_1' \sim W_p(\sum, n_1)$$

$$X_{2(p\times n_2)} \sim N\left(\underset{\sim}{0}, \sum\right) \longrightarrow M_2 = X_2 X_2' \sim W_p(\sum, n_2)$$

(X_1 و X_2 مستقلند).

$$X_{p\times n} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim W_p(\sum, n) \quad , \quad n = n_1 + n_2$$

$$X\acute{X} = X_1 X_1' + X_2 X_2' \quad , \qquad W_p(\sum, n) \Longmapsto W_p(\sum, n_1 + n_2)$$

توزیع T^2 هتلینگ:

در حالت تک متغیره دیدیم:

$$if \quad p=1 \ , \quad \begin{cases} U \sim N(0,1) \\ V \sim \chi_m^2 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad t=\frac{U}{\sqrt{\frac{V}{m}}} \sim t_{(m)}$$

و بنابراین داریم:

$$t_{(m)}^2=\frac{U^2}{\frac{V}{m}}=mUV^{-1}U \sim F(1,m)$$

در حالت چند متغیره داریم:

$$if \quad p \geq 2 \quad , \quad \begin{cases} \underset{\sim}{U} \sim N_p(\underset{\sim}{0}, I) \\ V \sim W_p(\sum, n) \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad T^2=n\underset{\sim}{U}'\underset{\sim}{V}^{-1}\underset{\sim}{U} \sim T^2(p,n)$$

به‌عبارت دیگر توزیع T^2 هتلینگ تعمیمی از توزیع t استیودنت است. به‌همین ترتیب:

$$if \quad \begin{cases} \underset{\sim}{U} \sim N_p(\underset{\sim}{0}, \sum) \\ V \sim W_p(\sum, n) \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad T^2=n\underset{\sim}{U}'\underset{\sim}{V}^{-1}\underset{\sim}{U} \sim T^2(p,n)$$

قضیه:

اگر$\underset{\sim}{X} \sim N_p(\underset{\sim}{\mu}, \sum)$ مستقل از $M \sim W_p(\sum, n)$ باشد، آنگاه:

$$n(\underset{\sim}{X}-\underset{\sim}{\mu})'M^{-1}(\underset{\sim}{X}-\underset{\sim}{\mu}) \sim T^2(p,n)$$

نتیجه:

اگر $\bar{X}$ میانگین نمونه استخراج شده از $N_p(\underset{\sim}{\mu}, \sum)$ باشد و S ماتریس کواریانس نمونه باشد، آنگاه:

$$(n)(\underset{\sim}{\bar{X}}-\underset{\sim}{\mu})' S_{p\times p}^{-1}(\bar{X}-\underset{\sim}{\mu}) \sim T^2(p,n-1)$$

اثبات:

$$X_{p\times n} \sim N(\underset{\sim}{\mu}, \sum) \quad \longrightarrow \quad (n-1)S \sim W_p(\sum, n-1) \ , \ \bar{X} \sim N(\underset{\sim}{\mu}, \frac{1}{n}\sum)$$

$$\Longrightarrow \quad \sqrt{n}(\underset{\sim}{\bar{X}} - \underset{\sim}{\mu}) \sim N(\underset{\sim}{0}, \Sigma) \quad \Longrightarrow \quad (n-1)\left(\sqrt{n}(\underset{\sim}{\bar{X}} - \underset{\sim}{\mu})'\right)[(n-1)S]^{-1}\left(\sqrt{n}(\underset{\sim}{\bar{X}} - \underset{\sim}{\mu})\right)$$

$$\Longrightarrow \quad T^2 = n(\underset{\sim}{\bar{X}} - \underset{\sim}{\mu})' S^{-1}(\bar{X} - \underset{\sim}{\mu}) \sim T^2(p, n-1)$$

قضیه:

رابطه بین T^2 و توزیع فیشر به‌صورت زیر است:

$$T^2(P,n) = \frac{nP}{n-P+1} F_{P,n-P+1} \quad \longrightarrow \quad n(\underset{\sim}{\bar{X}} - \underset{\sim}{\mu})' S^{-1}(\underset{\sim}{\bar{X}} - \underset{\sim}{\mu}) \sim \frac{(n-1)P}{n-P} F_{P,n-P}$$

اثبات:

تعریف می‌کنیم:

$$\underset{\sim}{\mathrm{d}} \sim N_p(\underset{\sim}{0}, I), \ \ M \sim W_p(I,n) \quad \Longrightarrow \quad n\,\underset{\sim}{\mathrm{d}}' M^{-1}\underset{\sim}{\mathrm{d}} \sim T^2(P,n)$$

$$n\,\underset{\sim}{\mathrm{d}}' M^{-1}\underset{\sim}{\mathrm{d}} = \frac{n\,\underset{\sim}{\mathrm{d}}' M^{-1}\underset{\sim}{\mathrm{d}}}{\underset{\sim}{\mathrm{d}}'\underset{\sim}{\mathrm{d}}} . \underset{\sim}{\mathrm{d}}'\underset{\sim}{\mathrm{d}} = n\frac{\underset{\sim}{\mathrm{d}}'\underset{\sim}{\mathrm{d}}}{\frac{\underset{\sim}{\mathrm{d}}'\underset{\sim}{\mathrm{d}}}{\underset{\sim}{\mathrm{d}}' M^{-1}\underset{\sim}{\mathrm{d}}}} \qquad (1)$$

از طرفی قبلا دیدیم:

$$M \sim W_p(\Sigma, n) \quad \Longrightarrow \quad \frac{a'\Sigma^{-1}a}{a^{-1}M^{-1}a} \sim \mathcal{X}^2_{m-p+1} \quad , \qquad \underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{Y} \sim \mathcal{X}^2_m$$

پس داریم:

$$\frac{\underset{\sim}{\mathrm{d}}'\underset{\sim}{\mathrm{d}}}{\underset{\sim}{\mathrm{d}}' M^{-1}\underset{\sim}{\mathrm{d}}} \sim \mathcal{X}^2_{n-p+1} \quad , \quad \underset{\sim}{\mathrm{d}}'\underset{\sim}{\mathrm{d}} \sim \mathcal{X}^2_n \qquad (2)$$

از(1) و (2) خواهیم داشت:

$$n\,\underset{\sim}{\mathrm{d}}' M^{-1}\underset{\sim}{\mathrm{d}} = n\frac{X_p^2}{X_{n-p+1}^2} = n\frac{\frac{X_p^2}{p}}{\frac{X_{n-p+1}^2}{n-p+1}} \times \frac{p}{n-p+1} = \frac{np}{n-p+1} F_{p,n-p+1}$$

قانون اعداد بزرگ:

اگر $Y_1, .. Y_n$ مشاهدات مستقل از یک جامعه با $E(Y_i)$ باشد، در این‌صورت:

$$\lim_{n\to\infty} P(|\bar{Y}-\mu|>\varepsilon)=0 \quad , \quad \bar{Y}\xrightarrow{p}\mu$$

نتیجه:

اگر $X=[\underset{\sim}{X}_1,\dots,\underset{\sim}{X}_n]$ نمونه ای از یک توزیع با میانگین $\underset{\sim}{\mu}$ و واریانس $\sum$ باشند، آنگاه: $\bar{X}$ و S در احتمال به μ و $\sum$همگرا هستند.

برای اثبات کافیست نشان دهید که iامین درایه از $\underset{\sim}{\bar{X}}$ و (i,j)امین درایه از S به μ_i و σ_{ij} همگرا هستند.

یعنی :

$$\begin{cases} \bar{X}_i \xrightarrow{p} \mu \\ S_{ij}\xrightarrow{p}\sigma_{ij}\end{cases}$$

قضیه حد مرکزی:

اگر $\underset{\sim}{X}_1,\dots,\underset{\sim}{X}_n$ مشاهداتی مستقل از جامعه با میانگین $\underset{\sim}{\mu}$ وکواریانس متناهی $\sum$ باشد، آنگاه برای نمونه‌های با حجم بزرگ، $\sqrt{n}\,(\underset{\sim}{\bar{X}}-\underset{\sim}{\mu})$ دارای توزیع تقریبی $N_p(0,\sum)$ است و:

$$n(\underset{\sim}{\bar{X}}-\underset{\sim}{\mu})'S^{-1}(\underset{\sim}{\bar{X}}-\underset{\sim}{\mu})\approx \mathcal{X}_p^2$$

چند نکته:

1) اگر $\underset{\sim}{X}\sim N_p(0,\sigma^2{}_I)$، آنگاه:

$$\frac{1}{\sigma^2}\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{p}X_i^2\sim\mathcal{X}_p^2$$

2) اگر $\underset{\sim}{X}\sim N_p(\underset{\sim}{\mu},\sum)$، آنگاه:

$$\underset{\sim}{X}-\underset{\sim}{\mu}\sim N(\underset{\sim}{0},\Sigma) \quad \Longrightarrow \quad \Sigma^{\frac{-1}{2}}(\underset{\sim}{X}-\underset{\sim}{\mu})\sim N(\underset{\sim}{0},I_p)$$

واز نتیجه 1 داریم:

$$(\underset{\sim}{\bar{X}}-\underset{\sim}{\mu})'\Sigma^{-1}(\underset{\sim}{X}-\underset{\sim}{\mu})\sim\mathcal{X}_p^2.$$

3) اگر $\underset{\sim}{X}\sim N_p(\underset{\sim}{\mu},\sum)$، آنگاه:

$$\underset{\sim}{X}' \Sigma^{-1} \underset{\sim}{X} \sim \mathcal{X}_p^2(\underset{\sim}{\mu}' \Sigma\ \underset{\sim}{\mu})$$

4) اگر $\underset{\sim}{X} \sim N_p(\underset{\sim}{\mu}\ , I_p)$، آنگاه:

$$\underset{\sim}{X}' A\, \underset{\sim}{X} \sim \mathcal{X}_r^2(\underset{\sim}{\mu}' A\, \underset{\sim}{\mu})$$

اگر وتنها اگر A خودتوان باشد و : $rank(A) = r$

فصل پنجم: استنباط‌های مربوط به یک بردار میانگین

آزمون فرض‌های چند متغیره:

می‌دانیم که آزمون میانگین در حالت یک متغیره به‌صورت زیر بود:

$$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

و براساس یک نمونه تصادفی n تایی می‌دانیم آماره آزمون فوق به‌صورت زیر می‌باشد:

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \quad \Longrightarrow \quad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \quad , \quad \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

که

$$if \quad |t| > t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \quad \Longrightarrow \quad RH_0$$

رد H_0 وقتی $|t|$ بزرگ است معادل رد H_0 است وقتی مربع آن یعنی:

$$t^2 = \frac{(\bar{X} - \mu_0)^2}{S^2/n} = n(\bar{X} - \mu_0)(S^2)^{-1}(\bar{X} - \mu_0) \qquad (1)$$

بزرگ است. یعنی با مشاهده $\bar{X}$ و S^2 :

$$if \quad n(\bar{x} - \mu_0)(s^2)^{-1}(\bar{x} - \mu_0) > t^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \quad \Longrightarrow \quad RH_0$$

واگر H_0 رد نشود، یعنی μ_0 یک مقدار موجه برای میانگین جامعه است.

برای به‌دست آوردن فاصله اطمینان خواهیم داشت:

$$if \quad \left|\frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\right| \leq t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \qquad \Longrightarrow \qquad AH_0$$

معادل است با :

{ μ_0 در فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ $\bar{x} \pm t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}}$ قرار می‌گیرد}

یا

$$\bar{x} - t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}\ \frac{s}{\sqrt{n}} \leq\ \mu_0 \leq \bar{x} + t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}\ \frac{s}{\sqrt{n}}$$

این فاصله اطمینان تمام مقادیر μ_0 که با آزمون $H_0 : \mu = \mu_0$ رد نمی‌شود را شامل می‌شود.

اکنون این آزمون را به حالت چند متغیره تعمیم می‌دهیم. فرض کنید هدف آزمون:

$$H_0 : \underset{\sim}{\mu}_{\ p\times 1} = \underset{\sim}{\mu}_{\ 0\ p\times 1} = \begin{pmatrix} \mu_{10} \\ \vdots \\ \mu_{p0} \end{pmatrix}$$

حال مساله تعیین اینکه آیا یک بردار $p \times 1$ ، μ_0 یک مقدار موجه برای میانگین یک توزیع نرمال چندمتغیری است را درنظر می‌گیریم.

مشابه حالت یک متغیره عمل می‌کنیم. یک تعمیم از مربع فاصله (1) به‌صورت زیر می‌باشد:

$$T^2 = (\underset{\sim}{\bar{X}} - \underset{\sim}{\mu}_{\ 0})' \left(\frac{S}{n}\right)^{-1} (\underset{\sim}{\bar{X}} - \underset{\sim}{\mu}_{\ 0}) = n(\underset{\sim}{\bar{X}} - \underset{\sim}{\mu}_{\ 0})' S^{-1} (\underset{\sim}{\bar{X}} - \underset{\sim}{\mu}_{\ 0}) \sim T^2_{p,n-1}$$

که همان آماره T^2 هتلینگ می‌باشد و:

$$\bar{X}_{p\times 1} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \underset{\sim}{\mathrm{X}}_{\ j} \qquad , \qquad S_{p\times p} = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n} (\underset{\sim}{\mathrm{X}}_{\ j} - \underset{\sim}{\bar{X}})(\underset{\sim}{\mathrm{X}}_{\ j} - \underset{\sim}{\bar{X}})'$$

*اگر فاصله تعمیم یافته مشاهده شده T^2 خیلی بزرگ باشد، یعنی خیلی دور از $\underset{\sim}{\mu}_{\ 0}$ است که فرض $H_0 : \underset{\sim}{\mu} = \underset{\sim}{\mu}_0$ رد می‌شود.

*چون نشان دادیم توزیع T^2 هتلینگ با فیشر رابطه دارد پس می‌توان از جدول فیشر هم استفاده کرد و داریم:

$$T^2(p,n) = \frac{np}{n-p+1} F_{p,n-p+1} \quad \Longrightarrow \quad T^2(p,n-1) = \frac{(n-1)p}{n-p} F_{p,n-p}$$

به‌طور خلاصه:

فرض کنید $\underset{\sim}{\mathrm{X}}_{\ 1}, \ldots \underset{\sim}{\mathrm{X}}_{\ n}$ یک نمونه تصادفی از جامعه $N_p(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma\ )$ باشد و:

$$\underset{\sim}{\bar{X}} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \underset{\sim}{\mathrm{X}}_j \qquad , \qquad S = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n} (\underset{\sim}{\mathrm{X}}_j - \underset{\sim}{\bar{X}})(\underset{\sim}{\mathrm{X}}_j - \underset{\sim}{\bar{X}})'$$

داریم:

$$\alpha = P\left(T^2 > \frac{(n-1)p}{(n-p)} F_{p,n-p,\alpha}\right)$$

$$= P\left(n(\underset{\sim}{\bar{X}} - \underset{\sim}{\mu})' S^{-1}(\underset{\sim}{\bar{X}} - \underset{\sim}{\mu}) > \frac{(n-1)p}{(n-p)} F_{p,n-p,\alpha}\right)$$

که در سطح معنی داری α، $H_0: \underset{\sim}{\mu} = \underset{\sim}{\mu}_0$ در مقابل $H_1: \underset{\sim}{\mu} \neq \underset{\sim}{\mu}_0$ رد می‌شود، هرگاه:

$$T^2 = n(\underset{\sim}{\bar{X}} - \underset{\sim}{\mu}_0)' S^{-1}(\underset{\sim}{\bar{X}} - \underset{\sim}{\mu}_0) > \frac{(n-1)p}{(n-p)} F_{p,n-p,\alpha} \quad \Longrightarrow \quad RH_0$$

مثال1.5)

فرض کنید ماتریس داده های مربوط به نمونه تصادفی به حجم $n = 3$ از یک جامعه نرمال دو متغیری به صورت زیر باشد:

$$X = \begin{bmatrix} 6 & 10 & 8 \\ 9 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

آزمون زیر را انجام دهید:(در سطح 0.05).

$$\begin{cases} H_0: \underset{\sim}{\mu} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \end{bmatrix} \\ H_1: \underset{\sim}{\mu} \neq \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \end{bmatrix} \end{cases}$$

حل:

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} \dfrac{6+10+8}{3} \\ \dfrac{9+6+3}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$S_{11} = \frac{(6-8)^2 + 10-8)^2 + (8-8)^2}{2} = 4$$

$$S_{22} = -\frac{(9-6)^2 + (6-6)^2 + (3-6)^2}{2} = 9$$

$$S_{12} = \frac{(6-8)(9-6) + (10-8)(6-6) + (8-8)(3-6)}{2} = -3$$

$$S = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix} \implies S^{-1} = \frac{1}{36-9}\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{27} \end{bmatrix}$$

بنابراین داریم:

$$T^2 = 3[8-9 \ , \quad 6-5]\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{27} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8-9 \\ 6-5 \end{bmatrix} = \frac{7}{9}$$

$$\frac{(n-1)p}{(n-p)} = \frac{2 \times 2}{3-2} = 4 \quad \implies \quad \frac{7}{9} < 4F_{2,3-2,0,05} \ = 798 \quad \implies \quad AH_0$$

انجام آزمون فوق با نرم افزار R)

```
> x1<-c(6,10,8)

> x1

[1]  6 10  8

> x2<-c(9,6,3)

> x2

[1] 9 6 3

> data<-cbind(x1,x2)

> n<-3

> p<-2

> mu0<-c(9,5)

> alpha<-0.05
```

دستور ماتریس $\bar{X}$ به‌صورت زیر می‌باشد:

```
> xbar<-apply(data,2,mean)

> xbar

x1 x2
```

```
 8  6
```

دستور ماتریس S به‌صورت زیر می‌باشد:

```
> S<-var(data)
> S
  x1 x2
x1  4 -3
x2 -3  9
> mu0<-as.matrix(mu0)
> xbar<-as.matrix(xbar)
```

دستور زیر برای محاسبه‌ی مقدار آماره‌ی T^2 می‌باشد:

```
> T2<-n*t(xbar-mu0)%*%solve(S)%*%(xbar-mu0)
> T2
```

که این مقدار برابر است با:

```
      [,1]
[1,] 0.7777778
>
```

با استفاده از دستور زیر مقدار ناحیه‌ی بحرانی به‌دست می آید:

```
> T<-p*(n-1)/(n-p)*qf(1-alpha,p,n-p)
> T
[1] 798
```

نتیجه: مشاهده می‌کنیم که مقدار آماره‌ی T^2 از 798 کمتر است و در نتیجه فرض H_0 پذیرفته می‌شود. به عبارتی: $0.7777778 < 798 \quad \Longrightarrow \quad AH_0$

مثال2.5)

میزان تعریق فرد سالم را مورد تحلیل قرار می‌دهیم. سه مولفه میزان عرق ریزی =X_1 و مقدار سدیم=X_2 و مقدار پتاسیم=X_3 را اندازه گیری کرده ایم و نتایج را تحت عنوان داده های تعریق در جدول زیر نشان داده ایم. آزمون زیر را در سطح $\alpha = 10\%$ انجام دهید.

$$\begin{cases} H_0: \underset{\sim}{\mu} = \begin{bmatrix} 4 \\ 50 \\ 10 \end{bmatrix} \\ H_1: \underset{\sim}{\mu} \neq \begin{bmatrix} 4 \\ 50 \\ 10 \end{bmatrix} \end{cases}$$

حل:

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} 4.640 \\ 45.400 \\ 9.965 \end{bmatrix} \quad , \quad S = \begin{bmatrix} 2.879 & 10.002 & -1.810 \\ 10.002 & 199.798 & -5.627 \\ -1.810 & -5.627 & 3.628 \end{bmatrix}$$

و

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 0.586 & -0.022 & 0.258 \\ 0.022 & 0.006 & -0.002 \\ 0.258 & -0.002 & 0.402 \end{bmatrix}$$

مقدار آماره‌ی T^2 به‌صورت زیر می‌باشد:

$$T^2 = 20[4.640 - 4\,, 45.400 - 50\,, 9.965 - 10]$$
$$\times \begin{bmatrix} 0.586 & -0.022 & 0.258 \\ 0.022 & 0.006 & -0.002 \\ 0.258 & -0.002 & 0.402 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4.640 - 4 \\ 45.400 - 50 \\ 9.965 - 10 \end{bmatrix}$$
$$= 20[0.640\,, -4.600\,, -0.035] \begin{bmatrix} 0.467 \\ -0.042 \\ 0.160 \end{bmatrix} = 9.74$$

و ناحیه‌ی بحرانی به‌صورت زیر است:

$$\frac{(n-1)p}{(n-p)} F_{p,n-p,\alpha} = \frac{19(3)}{17} F_{3,17,0.01} = 3.353(2.44) = 8.18$$

ملاحظه می‌کنیم که $T^2 = 9.74 > 8.18$ و در نتیجه H_0 را در سطح معنی داری 10% رد می‌کنیم.

جدول داده های مربوط به تعریق

فرد	X_1	X_2	X_3
1	3.7	48.5	9.3
2	5.7	65.1	8
3	3.8	47.2	10.9
4	3.2	53.2	12
5	3.1	55.5	9.7
6	4.6	36.1	7.9
7	2.4	24.8	14
8	7.2	33.1	7.6
9	6.7	47.4	8.5
10	5.4	54.1	11.3
11	3.9	36.9	12.7
12	4.5	58.8	12.3
13	3.5	27.8	9.8
14	4.5	40.2	8.4
15	1.5	13.5	10.1
16	8.5	56.4	7.1
17	4.5	71.6	8.2
18	6.5	52.8	10.9
19	4.1	44.1	11.2
20	5.5	40.9	9.4

انجام آزمون فوق با نرم افزار R)

ابتدا دستورات زیر را برای فراخوانی داده ها وارد می‌کنیم:

```
x1<-c(6,2.4,7.2,6.7,5.4,3.9,4.5,3.5,4.5,1.5,8.5,4.5,6.5,4.1,5.5)

x2<-
```

c(48.5,65.1,47.2,53.2,55.5,36.1,24.8,33.1,47.4,54.1,36.9,58.8,27.8,40.2,13.5,56.4,71.6,52.8,44.1,40.9)

```
> x3<-
c(9.3,8,10.9,12,9.7,7.9,14,7.6,8.5,11.3,12.7,12.3,9.8,8.4,10.1,7.1,8.2,10.9,11.2,9.4)

> data<-cbind(x1,x2,x3)

> data

      x1   x2   x3
 [1,] 3.7 48.5  9.3
 [2,] 5.7 65.1  8.0
 [3,] 3.8 47.2 10.9
 [4,] 3.2 53.2 12.0
 [5,] 3.1 55.5  9.7
 [6,] 4.6 36.1  7.9
 [7,] 2.4 24.8 14.0
 [8,] 7.2 33.1  7.6
 [9,] 6.7 47.4  8.5
[10,] 5.4 54.1 11.3
[11,] 3.9 36.9 12.7
[12,] 4.5 58.8 12.3
[13,] 3.5 27.8  9.8
[14,] 4.5 40.2  8.4
[15,] 1.5 13.5 10.1
[16,] 8.5 56.4  7.1
[17,] 4.5 71.6  8.2
[18,] 6.5 52.8 10.9
```

```
[19,] 4.1 44.1 11.2
[20,] 5.5 40.9  9.4
> n<-20
> p<-3
> mu0<-c(4,50,10)
> mu0
[1]  4 50 10
> alpha<-0.1
```

دستور ماتریس $\bar{X}$ به‌صورت زیر می‌باشد:

```
> xbar<-apply(data,2,mean)
> xbar
   x1     x2     x3
 4.640 45.400  9.965
```

دستور ماتریس S به‌صورت زیر می‌باشد:

```
> S<-var(data)
> S
        x1       x2       x3
x1  2.879368  10.0100 -1.809053
x2 10.010000 199.7884 -5.640000
x3 -1.809053  -5.6400  3.627658
> mu0<-as.matrix(mu0)
> xbar<-as.matrix(xbar)
> T2<-n*t(xbar-mu0)%*%solve(S)%*%(xbar-mu0)
```

```
> T2
```

مقدار آماره‌ی T^2 برابر است با:

```
      [,1]
[1,] 9.738773
> Ta<-p*(n-1)/(n-p)*qf(1-alpha,p,n-p)
> Ta
```

و مقدار ناحیه‌ی بحرانی برابراست با:

```
[1] 8.172573
```

نتیجه: مشاهده می‌کنیم که مقدار آماره‌ی T^2 از مقدار ناحیه‌ی بحرانی بیشتراست. لذا فرض H_0را رد می‌کنیم.

قضیه:

T^2 تحت تبدیلات خطی پایاست.

یعنی اگر $\underset{\sim}{\mathrm{Y}}_{(p\times1)} = C_{(p\times p)}\,\underset{\sim}{\mathrm{X}}_{(p\times1)} + \underset{\sim}{\mathrm{d}}_{(p\times1)}$ که در آن C یک ماتریس معلوم و $\underset{\sim}{\mathrm{d}}$ یک بردار معلوم باشد، آنگاه:

$$T^2{}_{\underset{\sim}{\mathrm{Y}}} = T^2{}_{\underset{\sim}{\mathrm{X}}}$$

اثبات: می‌دانیم:

$$\underset{\sim}{\bar{Y}} = C\,\underset{\sim}{\mathrm{X}} + \underset{\sim}{\mathrm{d}} \quad , \quad S_{\underset{\sim}{\mathrm{Y}}} = C S_{\underset{\sim}{\mathrm{X}}} C'$$

$$T^2{}_Y = n\left(\underset{\sim}{\bar{Y}} - \underset{\sim}{\mu}_{\ Y}\right)' S^{-1}\left(\underset{\sim}{\bar{Y}} - \underset{\sim}{\mu}_{\ Y}\right) = n(C\,\underset{\sim}{\bar{X}} + \underset{\sim}{\mathrm{d}} - C\underset{\sim}{\mu}_X - \underset{\sim}{\mathrm{d}})' \times$$

$$\left(CS_XC'\right)^{-1}(C\,\underset{\sim}{\bar{X}} + \underset{\sim}{\mathrm{d}} - C\underset{\sim}{\mu}_X - \underset{\sim}{\mathrm{d}}) = = n\left(\underset{\sim}{\bar{X}} - \underset{\sim}{\mu}_X\right)' C'\left(C'\right)^{-1} S_X^{-1} C^{-1} C\left(\underset{\sim}{\bar{X}} - \underset{\sim}{\mu}_X\right) =$$

$$= n\left(\underset{\sim}{\bar{X}} - \underset{\sim}{\mu}_X\right)' S_X^{-1}\left(\underset{\sim}{\bar{X}} - \underset{\sim}{\mu}_X\right) = T_X^2$$

با توجه به این قضیه آماره‌ی T^2 نسبت به یک تبدیل خطی پایا تغییرناپذیر است و بنابراین اگر واحد اندازه گیری $\underset{\sim}{\mathrm{X}}_j$ ها تغییر کند، مقدار T^2 تغییر نمی‌کند.

آزمون درمورد میانگین $\underset{\sim}{\mu}$ بر اساس آزمون نسبت درست‌نمایی:

فرض کنید $\underset{\sim}{X}_1, \dots \underset{\sim}{X}_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $N_p\left(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma\right)$ باشد. می‌خواهیم آزمون فرض $H_0: \underset{\sim}{\mu} = \underset{\sim}{\mu}_0$ را در مقابل $H_1: \underset{\sim}{\mu} \neq \underset{\sim}{\mu}_0$ انجام دهیم که در آن $\underset{\sim}{\mu}_0$ یک بردار معلوم و Σ ماتریس معین مثبت نامعلوم است.

می‌خواهیم آزمون فرض فوق را به روش آزمون نسبت درست‌نمایی $(GLRT)$ انجام دهیم. برای این منظور مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

تحت فرض H_0 می‌دانیم:

$$\left\{(\underset{\sim}{\mu}_0, \Sigma) \quad -\infty < \mu_i < \infty \ , \qquad \Sigma \ is \ p.d \right\}$$

وتحت فرض H_1 :

$$\left\{(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma) \quad -\infty < \mu_i < \infty \ , \ \Sigma \ is \ p.d \right\}$$

همچنین

$$\begin{cases} H_0: \theta \in \theta_0 \\ H_1: \theta \notin \theta_0 \end{cases} \qquad \Lambda = \frac{\max\limits_{\theta \in \theta_0} L(\theta)}{\max\limits_{\theta \in \theta_1} L(\theta)} < c \qquad \Longrightarrow \qquad RH_0$$

قبلا دیدیم تحت فضای کل:

$$\max_{\underset{\sim}{\mu}, \Sigma} L(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{np}{2}} \ |\hat{\Sigma}|^{\frac{n}{2}}} \ e^{\frac{-np}{2}} \qquad (1)$$

که در آن:

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(\underset{\sim}{X}_j - \underset{\sim}{\bar{X}})(\underset{\sim}{X}_j - \underset{\sim}{\bar{X}})'$$

و تحت فرض H_0 :

$$L(\underset{\sim}{\mu_0}, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{np}{2}} \ |\widehat{\Sigma}\ |^{\frac{n}{2}}} \exp\left\{\frac{-1}{2}\sum_{j=1}^{n}(\underset{\sim}{X_j} - \underset{\sim}{\mu_0})(\underset{\sim}{X_j} - \underset{\sim}{\mu_0})'\right\}$$

چون مقدار $\underset{\sim}{\mu_0}$ ثابت است، برآورد ماکسیمم درست‌نمایی Σ مشابه قبل به‌صورت:

$$\widehat{\Sigma}_0 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(\underset{\sim}{X_j} - \underset{\sim}{\mu_0})(\underset{\sim}{X_j} - \underset{\sim}{\mu_0})'$$

خواهد شد. پس:

$$\max_{\Sigma} L(\underset{\sim}{\mu_0}\ , \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{np}{2}}\ |\widehat{\Sigma}_0|^{\frac{n}{2}}}\ e^{\frac{-np}{2}} \qquad (2)$$

در نتیجه:

$$\Lambda = \frac{(2\pi)^{\frac{-np}{2}}\left|\widehat{\Sigma}_0\right|^{\frac{-n}{2}} e^{\frac{-np}{2}}}{(2\pi)^{\frac{-np}{2}}\left|\widehat{\Sigma}\right|^{\frac{-n}{2}} e^{\frac{-np}{2}}} = \frac{\left|\widehat{\Sigma}_0\right|^{\frac{-n}{2}}}{\left|\widehat{\Sigma}\right|^{\frac{n}{2}}}$$

$$\Lambda^{\frac{2}{n}} = \frac{\left|\widehat{\Sigma}\right|}{\left|\widehat{\Sigma}_0\right|} = \frac{\left|\sum_{j=1}^{n}(\underset{\sim}{X_j} - \underset{\sim}{\bar{X}})(\underset{\sim}{X_j} - \underset{\sim}{\bar{X}})'\right|}{\left|\sum_{j=1}^{n}(\underset{\sim}{X_j} - \underset{\sim}{\mu_0})(\underset{\sim}{X_j} - \underset{\sim}{\mu_0})'\right|}$$

آماره‌ی $\Lambda^{\frac{2}{n}}$ را لاندای ویلکس $(wilks\ lambda)$ گویند.

حال طبق آزمون نسبت درست‌نمایی فرض $H_0: \underset{\sim}{\mu} = \underset{\sim}{\mu_0}$ را رد می‌کنیم، اگر:

$$\Lambda^{\frac{2}{n}} \leq c_{\alpha}^{\frac{2}{n}} \qquad \text{یا} \qquad \Lambda \leq c_{\alpha} \quad \Longrightarrow \quad RH_0$$

که c_{α} صدک پایینی $(100\ \alpha)$ام توزیع Λ است.

این نامساوی معادل این است که: $T^2 > {T^2}_{\alpha}$ باشد.

تعریف توزیع لاندای ویلکس:

اگر $A \sim w_p(I, m)$ و $B \sim w_p(I, n)$ باشند و A و B مستقل باشند، آنگاه:

$$\Lambda = \frac{|A|}{|A+B|} \sim \Lambda\,(p,m,n) \qquad (m \geq p)$$

تمرین) نشان دهید:

$$if \quad p=1 \quad \Longrightarrow \Lambda\,(1,m,n) = \beta(\frac{m}{2},\frac{n}{2})$$

حل:

$$A \sim \mathcal{X}_{m}^{2} \quad , \quad B \sim \mathcal{X}_{n}^{2} \quad \Longrightarrow \ \Lambda = \frac{A}{A+B} \sim \beta eta(\frac{m}{2},\frac{n}{2})$$

قضیه:

فرض کنید $\underset{\sim}{X}_1 , \dots \underset{\sim}{X}_n$ یک نمونه تصادفی از $N_p\left(\underset{\sim}{\mu}\,,\Sigma\right)$ باشد. در این‌صورت برای آزمون

$$\begin{cases} H_0 : \underset{\sim}{\mu} = \underset{\sim}{\mu}_0 \\ H_1 : \underset{\sim}{\mu} \neq \underset{\sim}{\mu}_0 \end{cases}$$ داریم:

$$\Lambda^{\frac{2}{n}} = \left(1 + \frac{T^2}{n-1}\right)^{-1}$$

که:

$$T^2 = \frac{(n-1)|\widehat{\Sigma}_0|}{|\widehat{\Sigma}|} - (n-1)$$

اثبات) می دانیم: $\Lambda^{\frac{2}{n}} = \frac{|\widehat{\Sigma}|}{|\widehat{\Sigma}_0|}$.از طرفی داریم:

$$\widehat{\Sigma}_0 = \sum_{j=1}^{n} (\underset{\sim}{X}_j - \underset{\sim}{\mu}_0)(\underset{\sim}{X}_j - \underset{\sim}{\mu}_0)' = \sum_{j=1}^{n} (\underset{\sim}{X}_j - \underset{\sim}{\bar{X}})(\underset{\sim}{X}_j - \underset{\sim}{\bar{X}})' + n(\underset{\sim}{\bar{X}} - \underset{\sim}{\mu}_0)(\underset{\sim}{\bar{X}} - \underset{\sim}{\mu}_0)'$$

با در نظر گرفتن:

$$\sum_{j=1}^{n} (\underset{\sim}{X}_j - \underset{\sim}{\bar{X}})(\underset{\sim}{X}_j - \underset{\sim}{\bar{X}})' = A \quad \Longrightarrow \quad A = (n-1)S$$

$$\Lambda^{\frac{2}{n}} = \frac{|\widehat{\Sigma}|}{|\widehat{\Sigma}_0|} = \frac{|A|}{\left|A + n\left(\underset{\sim}{\bar{X}} - \underset{\sim}{\mu}_0\right)\left(\underset{\sim}{\bar{X}} - \underset{\sim}{\mu}_0\right)'\right|} \qquad (1)$$

ماتریس B را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{n}\left(\underset{\sim}{\bar{X}} - \underset{\sim}{\mu}_0\right)' \\ -\sqrt{n}\left(\underset{\sim}{\bar{X}} - \underset{\sim}{\mu}_0\right) & \sum_{j=1}^{n}(\underset{\sim}{X}_j - \underset{\sim}{\bar{X}})(\underset{\sim}{X}_j - \underset{\sim}{\bar{X}})' \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{n}\left(\underset{\sim}{\bar{X}} - \underset{\sim}{\mu}_0\right)' \\ -\sqrt{n}\left(\underset{\sim}{\bar{X}} - \underset{\sim}{\mu}_0\right) & A \end{bmatrix}$$

با توجه به اینکه:

$$|B| = |B_{11}||B_{22} - B_{21}B_{11}^{-1}B_{12}| = |B_{22}||B_{11} - B_{12}B_{22}^{-1}B_{21}|$$

پس:

$$\begin{vmatrix} 1 & \sqrt{n}\left(\underset{\sim}{\bar{X}} - \underset{\sim}{\mu}_0\right)' \\ -\sqrt{n}\left(\underset{\sim}{\bar{X}} - \underset{\sim}{\mu}_0\right) & A \end{vmatrix} = \left|\sum_{j=1}^{n}(\underset{\sim}{X}_j - \underset{\sim}{\bar{X}})(\underset{\sim}{X}_j - \underset{\sim}{\bar{X}})' + n(\underset{\sim}{\bar{X}} - \underset{\sim}{\mu}_0)(\underset{\sim}{\bar{X}} - \underset{\sim}{\mu}_0)'\right|$$

$$= |A|\left\{1 + n(\underset{\sim}{\bar{X}} - \underset{\sim}{\mu}_0)'A^{-1}(\underset{\sim}{\bar{X}} - \underset{\sim}{\mu}_0)\right\} \qquad (2)$$

از (1)و (2) داریم:

$$\Lambda^{\frac{2}{n}} = \frac{|A|}{|A|\left\{1 + n\left(\underset{\sim}{\bar{X}} - \underset{\sim}{\mu}_0\right)' A^{-1}\left(\underset{\sim}{\bar{X}} - \underset{\sim}{\mu}_0\right)\right\}}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{n}{n-1}\left(\underset{\sim}{\bar{X}} - \underset{\sim}{\mu}_0\right)' S^{-1}\left(\underset{\sim}{\bar{X}} - \underset{\sim}{\mu}_0\right)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n-1}T^2} = \left(1 + \frac{1}{n-1}T^2\right)^{-1}$$

پس با استفاده از این قضیه:

$$\Lambda^{\frac{2}{n}} \leq c_{\alpha}^{\frac{2}{n}} \iff \left(1+\frac{1}{n-1}T^2\right)^{-1} \leq c_{\alpha}^{\frac{2}{n}} \iff 1+\frac{T^2}{n-1} \geq c \iff T^2 \geq T^2{}_{\alpha}$$

لذا:

$$\Lambda^{\frac{2}{n}} = (1+\frac{1}{n-1}T^2)^{-1} \implies T^2 = \frac{(n-1)\left|\widehat{\Sigma}_0\right|}{\left|\widehat{\Sigma}\right|} - (n-1)$$

<u>نکته:</u>

اگر حجم نمونه بزرگ باشد:

$$-2ln\,\Lambda \sim \mathcal{X}^2_{v-v_0} \quad \longrightarrow \quad v_0 = \frac{p(p-1)}{2} + p = \frac{p(p+1)}{2}$$

ناحیه اطمینان برای بردار $\underset{\sim}{\mu}$ ($\sum$ نامعلوم):

فرض کنید $\underset{\sim}{X}_1, \dots, \underset{\sim}{X}_n$ نمونه ای تصادفی از یک توزیع خاص باشد. دیدیم:

$$P\left(n\left(\bar{\underset{\sim}{X}} - \underset{\sim}{\mu}\right)' S^{-1}\left(\bar{\underset{\sim}{X}} - \underset{\sim}{\mu}\right) > \frac{(n-1)p}{(n-p)}F_{p,n-p,\alpha}\right) = \alpha$$

$$P\left(n\left(\bar{\underset{\sim}{X}} - \underset{\sim}{\mu}\right)' S^{-1}\left(\bar{\underset{\sim}{X}} - \underset{\sim}{\mu}\right) \leq \frac{(n-1)p}{(n-p)}F_{p,n-p,\alpha}\right) = 1-\alpha$$

که یک فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای $\underset{\sim}{\mu}$ از جامعه نرمال pمتغیره به‌صورت زیر است که یک بیضی با مرکز $\bar{\underset{\sim}{X}}$ است و این بیضی ناحیه‌ی $100(1-\alpha)\%$ برای $\underset{\sim}{\mu}$ است.

اگر $\sum$ معلوم باشد، ناحیه‌ی اطمینان به‌صورت زیر خواهد بود:

$$n\left(\bar{\underset{\sim}{X}} - \underset{\sim}{\mu}\right)' \Sigma^{-1}\left(\bar{\underset{\sim}{X}} - \underset{\sim}{\mu}\right) \leq \mathcal{X}^2_{p,\alpha}$$

بیضی اطمینان در این حالت نیز به مرکزیت $\bar{X}$ خواهد بود و پس از به‌دست آوردن مقادیر و بردارهای ویژه می-توانید بیضی اطمینان را رسم کنید. نصف طول قطرهای بیضی از رابطه زیر به‌دست می آید و نصف قطر بزرگ به کوچک از رابطه $\frac{\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_2}}$ قابل محاسبه است:

$$\frac{C\sqrt{\lambda_i}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\mathcal{X}^2_{p,\alpha}\frac{\lambda_i}{n}}$$

تمرین)

فرض کنید $p=2$ و $n=3$ و $X=\begin{bmatrix}8 & 6 & 10\\ 3 & 9 & 6\end{bmatrix}$.مطلوبست ناحیه‌ی اطمینان 95٪؟

حل:

$$\bar{X}=\begin{bmatrix}8\\6\end{bmatrix} \quad , \quad S=\begin{bmatrix}4 & -3\\ -3 & 9\end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad S^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{9}\\ \frac{1}{9} & \frac{4}{27}\end{bmatrix}$$

$$T^2=3(8-\mu_1 \quad 6-\mu_1)\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{9}\\ \frac{1}{9} & \frac{4}{27}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8-\mu_1\\ 6-\mu_1\end{pmatrix}\le 4F_{2,1,0.05}=199.50 \qquad (*)$$

پس مرکز بیضی $(8,6)$ و نصف قطر بلند و کوتاه بیضی با روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$\sqrt{\lambda_1}\sqrt{\frac{(n-1)p}{(n-p)}F_{p,n-p,\alpha}} \quad \text{و} \quad \sqrt{\lambda_2}\sqrt{\frac{(n-1)p}{(n-p)}F_{p,n-p,\alpha}}$$

و محورهای بیضی در جهت e_i ها رسم می‌شوند.

پس بیضی اطمینان 95٪برای $\underset{\sim}{\mu}$ شامل تمام مقادیر μ_1 و μ_1 است که در نامساوی * صدق کنند.

فواصل اطمینان هم زمان:

حال فرض کنید فرض H_0 رد شده باشد. در این‌صورت کدامیک از μ_i ها مخالف μ_{0_i} بوده است. این سوالی است که به کمک نواحی اطمینان هم‌زمان می‌توان پاسخ داد.

برای این منظور ابتدا ناحیه اطمینان برای هر ترکیب خطی از مولفه های بردار تصادفی $\underset{\sim}{X}$ را به‌دست می آوریم. فرض کنید:

$$\underset{\sim}{X}_1,\dots,\underset{\sim}{X}_n \sim N_p\left(\underset{\sim}{\mu},\Sigma\right) \quad , \quad \bar{X}\sim N_p\left(\mu,\frac{\Sigma}{n}\right)$$

ترکیب خطی زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\ell_1\bar{X}_1+\cdots+\ell_p\bar{X}_p=\underset{\sim}{\ell}'\underset{\sim}{\bar{X}} \quad , \quad \ell=\begin{bmatrix}\ell_1\\ \vdots\\ \ell_p\end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\ell}'\underset{\sim}{\bar{X}} \sim N_1\left(\underset{\sim}{\ell}'\underset{\sim}{\mu}, \frac{\underset{\sim}{\ell}'\sum\underset{\sim}{\ell}}{n}\right) \;,(n-1)\underset{\sim}{\ell}'S\underset{\sim}{\ell} \sim w_1\left(\underset{\sim}{\ell}'\sum\underset{\sim}{\ell}\,, n-1\right) \;,(n-1)\frac{\underset{\sim}{\ell}'S\underset{\sim}{\ell}}{\underset{\sim}{\ell}'\sum\underset{\sim}{\ell}}\chi^2_{n-1}$$

پس:

$$\frac{\sqrt{n}(\underset{\sim}{\ell}'\underset{\sim}{\bar{X}} - \underset{\sim}{\ell}'\underset{\sim}{\mu}) \Big/ \sqrt{\frac{\underset{\sim}{\ell}'\sum\underset{\sim}{\ell}}{n}}}{\sqrt{\frac{(n-1)\underset{\sim}{\ell}'S\underset{\sim}{\ell}}{\underset{\sim}{\ell}'\sum\underset{\sim}{\ell}/n-1}}} \sim t_{n-1}$$

و در نتیجه یک ناحیه اطمینان برای $\underset{\sim}{\ell}'\underset{\sim}{\mu}$ به‌صورت:

$$\underset{\sim}{\ell}'\underset{\sim}{\bar{X}} - t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\underset{\sim}{\ell}'S\underset{\sim}{\ell}}{n}} \le \underset{\sim}{\ell}'\underset{\sim}{\mu} \le \underset{\sim}{\ell}'\underset{\sim}{\bar{X}} + t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\underset{\sim}{\ell}'S\underset{\sim}{\ell}}{n}}$$

و یا:

$$\left|\frac{\sqrt{n}(\underset{\sim}{\ell}'\underset{\sim}{\bar{X}} - \underset{\sim}{\ell}'\underset{\sim}{\mu})}{\sqrt{\underset{\sim}{\ell}'S\underset{\sim}{\ell}}}\right| \le t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}$$

مثلا فرض کنید $\underset{\sim}{\ell}' = [1\,,0\,,\dots]$. یعنی در این‌صورت می‌توانیم ناحیه اطمینان برای μ_1 را تشکیل دهیم.

$$\begin{cases} \underset{\sim}{\ell}'\underset{\sim}{\bar{X}} = \bar{X}_1 \\ \underset{\sim}{\ell}'S\underset{\sim}{\ell} = S_{11} \end{cases}$$

و اگر بخواهیم یک فاصله اطمینان برای $\mu_i, \dots \mu_j$ بسازیم باید $\underset{\sim}{\ell}$ را به‌صورت

$$\underset{\sim}{\ell}' = [0, \dots, 0,1,0, \dots, -1,0, \dots 0]$$

در نظر بگیریم.

$$\underset{\sim}{\ell}'\underset{\sim}{\mu} = \mu_i - \mu_j \quad , \quad \underset{\sim}{\ell}'\underset{\sim}{\bar{X}} = \bar{X}_i - \bar{X}_j \;,\; \underset{\sim}{\ell}'S\underset{\sim}{\ell} = S_{ii} - 2S_{ij} + S_{jj}$$

<u>نکته:</u>

واضح است که با انتخاب بردارهای متفاوت $\underset{\sim}{\ell}$ فواصل اطمینان برای مولفه های $\underset{\sim}{\mu}$ هر یک با ضریب اطمینان $1-\alpha$ ساخته می‌شود و اطمینان مربوط به در نظر گرفتن تمام گزاره ها با هم $1-\alpha$ نیست. مثلا:

$$\ell_1' = [1, \dots] \;, \quad \ell_2' = [0,1,0, \dots] \;, \qquad \dots$$

در این‌صورت:

$$P\left(\bar{X}_1 - t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_{11}}{n}} \le \mu_1 \le \bar{X}_1 + t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_{11}}{n}}\right) = 1-\alpha$$

$$\vdots$$

$$P\left(\bar{X}_p - t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_{pp}}{n}} \le \mu_p \le \bar{X}_p + t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_{pp}}{n}}\right) = 1-\alpha$$

و:

P(تمامی فواصل اطمینان فوق پارامتر موردنظر را در برداشته باشد)$= (1-\alpha)\dots(1-\alpha) = (1-\alpha)^P \le 1-\alpha$

حال فرض کنیم به ازای هر $\underset{\sim}{\ell}$ تمامی فواصل اطمینان که ساخته می‌شود شامل پارامتر مورد نظر باشد، را تشکیل دهیم. این احتمال چقدر کوچک خواهد شد؟ مثال فوق فقط p ترکیب خطی است. پس سوالی که پیش می آید اینست که چگونه می‌توانیم فواصلی را تعیین کنیم که به ازای هر ترکیب خطی تواما دارای ضریب اطمینان $1-\alpha$ باشد. پس هدف نسبت دادن ضریب اطمینان $1-\alpha$ به تمامی فواصل اطمینان که می‌توان توسط انتخاب‌های مختلف بردار $\underset{\sim}{\ell}$ ساخت، می‌باشد. به این منظور می‌توان فواصلی که سریع‌تر از فواصل معرفی شده در (1) است به وسیله‌ی انتخاب یک $\underset{\sim}{\ell}$مشخص استفاده کرد. به عبارتی می‌خواهیم:

$$P\left(\left|\frac{\sqrt{n}(\underset{\sim}{\ell}'\underset{\sim}{X} - (\underset{\sim}{\ell}'\underset{\sim}{\mu})}{\sqrt{\underset{\sim}{\ell}'S\underset{\sim}{\ell}}}\right| \le C \quad , \; \forall \underset{\sim}{\ell}\right) = 1-\alpha \quad \Longrightarrow$$

$$P\left(\forall \underset{\sim}{\ell} \quad \frac{n(\underset{\sim}{\ell}'(\underset{\sim}{\bar{X}} - \underset{\sim}{\mu}))^2}{\underset{\sim}{\ell}'S\underset{\sim}{\ell}} \le C^2\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(max_{\underset{\sim}{\ell}}\left\{\frac{n((\underset{\sim}{\bar{X}}-\underset{\sim}{\mu}))^2}{\underset{\sim}{\ell}'S\underset{\sim}{\ell}}\right\}\leq C^2\right)=1-\alpha$$

حال طبق نامساوی کشی شوارتز:

$$P\left(n\left(\underset{\sim}{\bar{X}}-\underset{\sim}{\mu}\right)' S^{-1}(\underset{\sim}{\bar{X}}-\underset{\sim}{\mu})\leq C^2\right)=1-\alpha$$

$$\left|\frac{\sqrt{n}\left(\underset{\sim}{\ell}'\underset{\sim}{\bar{X}}-(\underset{\sim}{\ell}'\underset{\sim}{\mu})\right)}{\sqrt{\underset{\sim}{\ell}'S\underset{\sim}{\ell}}}\right|\leq\sqrt{\frac{p(n-1)}{(n-p)}F_{p,n-p,\alpha}}\quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad \underset{\sim}{\ell}'\underset{\sim}{\mu}\left\{\underset{\sim}{\ell}'\underset{\sim}{\bar{X}}\pm\sqrt{\frac{p(n-1)}{(n-p)}F_{p,n-p,\alpha}\underset{\sim}{\ell}'S\underset{\sim}{\ell}}\right\}$$

بازه‌ی فوق به‌طور هم‌زمان برای تمام $\underset{\sim}{\ell}$ها با احتمال $1-\alpha$ شامل $\underset{\sim}{\ell}'\underset{\sim}{\mu}$ است.

پس به ازای انتخاب هر $\underset{\sim}{\ell}$ ضریب اطمینان ثابت و $1-\alpha$می ماند.

$$\ell_1'=[1,\dots]\ ,\quad \ell_2'=[0,1,0,\dots]\ ,\qquad \dots$$

$$\bar{X}_1-\sqrt{\frac{p(n-1)}{(n-p)}F_{p,n-p,\alpha}}\sqrt{\frac{S_{11}}{n}}\leq\mu_1\leq\bar{X}_1+\sqrt{\frac{p(n-1)}{(n-p)}F_{p,n-p,\alpha}}\sqrt{\frac{S_{11}}{n}}$$

.

.

.

$$\bar{X}_p-\sqrt{\frac{p(n-1)}{(n-p)}F_{p,n-p,\alpha}}\sqrt{\frac{S_{pp}}{n}}\leq\mu_p\leq\bar{X}_p+\sqrt{\frac{p(n-1)}{(n-p)}F_{p,n-p,\alpha}}\sqrt{\frac{S_{pp}}{n}}$$

و بنابراین:

$$\bar{X}_i-\bar{X}_k-\sqrt{\frac{p(n-1)}{(n-p)}F_{p,n-p,\alpha}}\sqrt{\frac{S_{ii}-2S_{ik}+S_{kk}}{n}}\leq\mu_1-\mu_k\leq$$

$$\leq \bar{X}_i - \bar{X}_k - \sqrt{\frac{p(n-1)}{(n-p)} F_{p,n-p,\alpha}} \sqrt{\frac{S_{ii} - 2S_{ik} + S_{kk}}{n}}$$

که تمام این فواصل هم‌زمان با ضریب α-1 برقرارند.

مثال3.5)

نمرات به‌دست آمده از $n = 87$ دانشجوی دانشکده در برنامه ی امتحانی سطح دانشکده $(CLEP)$ زیر آزمون X_1 و آزمون سطح معلومات دانشکده (CQT) زیرمجموعه های X_2 و X_3 در جدول زیر برای علوم اجتماعی و تاریخ= X_1 و شفاهی= X_2 و علوم=X_3 داده شده است.(جدول ذکرشده در کتاب دکتر نیرومند موجود است) از این داده ها:

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} 527.74 \\ 54.69 \\ 25.13 \end{bmatrix} \qquad , \qquad S = \begin{bmatrix} 5691.34 & 600.51 & 217.25 \\ 600.51 & 126.05 & 23.37 \\ 217.25 & 23.37 & 23.11 \end{bmatrix}$$

می‌خواهیم فواصل اطمینان هم‌زمان 95٪برای μ_1 و μ_2 و μ_3 را محاسبه کنیم:

حل: مقدار ناحیه‌ی بحرانی به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{p(n-1)}{(n-p)} F_{p,n-p,\alpha} = \frac{3(87-1)}{87-3} F_{3,84,0.05} = (3.07)(2.7) = 8.29$$

و فواصل اطمینان هم‌زمان:

برای μ_1 :

$$527.74 - \sqrt{8.29}\sqrt{\frac{5691.34}{87}} \leq \ \mu_1 \leq 527.74 + \sqrt{8.29}\sqrt{\frac{5691.34}{87}}$$

$$\Longrightarrow \quad 504.45 \leq \ \mu_1 \leq 551.03$$

برایμ_2 :

$$54.69 - \sqrt{8.29}\sqrt{\frac{126.05}{87}} \leq \mu_2 \leq 54.69 + \sqrt{8.29}\sqrt{\frac{126.05}{87}}$$

$$\Longrightarrow \quad 51.24 \leq \mu_2 \leq 58.14$$

برای μ_3:

$$25.13-\sqrt{8.29}\sqrt{\frac{23.11}{87}}\le\mu_2\le 25.13+\sqrt{8.29}\sqrt{\frac{23.11}{87}}$$

$$\Longrightarrow\qquad 23.66\le\mu_3\le 26.62$$

روش بونفرونی:

اغلب تعداد کمی از گزاره های اطمینان مورد توجه است. به عبارتی اغلب به ازای تعداد محدودی از بردارهای $\underset{\sim}{\ell}$ قصد تهیه ناحیه‌ی اطمینان هم‌زمان داریم.

یعنی فقط m ترکیب خطی $\underset{\sim}{\ell}'_1\underset{\sim}{\mu}\,,\dots,\underset{\sim}{\ell}'_m\underset{\sim}{\mu}$ مد نظر می‌باشد. در این‌صورت فواصل اطمینان هم‌زمان را می‌توان طوری به‌دست آورد که از فواصل T^2 هم‌زمان کوتاهتر(دقیق‌تر)باشد.

فرض کنید c_i بیانگر iامین ناحیه اطمینان هم‌زمان باشد.

$$P\left(\text{درست } c_i\right)=P\left(\text{امین ناحیه اطمینان هم‌زمان ترکیب خطی } \underset{\sim}{\ell}'_i\underset{\sim}{\mu} \text{ را در برداشته باشد } i\right)=1-\alpha$$

در این‌صورت:

$$P(c_1\cap\ldots\cap c_m)>1-\sum P(\text{غلط } c_i)=1-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i$$

پس یک انتخاب مناسب برای α_i، $\frac{\alpha}{m}$ است که در این‌صورت: $\sum\alpha_i=\alpha$

در این حالت می‌توانیم گزاره های زیر را بسازیم(اگر فقط p ناحیه اطمینان هم‌زمان مد نظر باشد)

$$\bar{X}_1-t_{n-1,\frac{\alpha}{2p}}\sqrt{\frac{S_{11}}{n}}\le\ \mu_1\le\bar{X}_1+t_{n-1,\frac{\alpha}{2p}}\sqrt{\frac{S_{11}}{n}}$$

.

.

.

$$\bar{X}_p-t_{n-1,\frac{\alpha}{2p}}\sqrt{\frac{S_{pp}}{n}}\le\ \mu_p\le\bar{X}_p+t_{n-1,\frac{\alpha}{2p}}\sqrt{\frac{S_{pp}}{n}}$$

در مثال زیر فواصل اطمینان هم‌زمان بونفرونی 95٪را برای μ_1 و μ_2 و μ_3 به‌دست آوردیم.

$$n = 20 \quad , \quad \bar{X} = \begin{bmatrix} 4.64 \\ 45.4 \\ 9.965 \end{bmatrix} \quad , \qquad S = \begin{bmatrix} 2.879 & 10.002 & -1.810 \\ 10.002 & 199.798 & -5.627 \\ -1.810 & -5.627 & 3.628 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}_1 \pm t_{19,0.0083}\sqrt{\frac{S_{11}}{n}} = 4.64 \pm 2.625\sqrt{\frac{2.879}{20}} \quad or \;\; 3.64 \le \mu_1 \le 5.64$$

$$\bar{x}_2 \pm t_{19,0.0083}\sqrt{\frac{S_{22}}{n}} = 45.4 \pm 2.625\sqrt{\frac{199.798}{20}} \quad or \;\; 37.10 \le \mu_2 \le 53.7$$

$$\bar{x}_3 \pm t_{19,0.0083}\sqrt{\frac{S_{33}}{n}} = 9.965 \pm 2.625\sqrt{\frac{3.628}{20}} \quad or \;\; 8.85 \le \mu_3 \le 11.08$$

در نتیجه در هر مثال که $\alpha_i = \frac{\alpha}{m}$، داریم:

$$\frac{\text{طول فاصله بونفرونی}}{\text{طول فاصله } T^2} = \frac{t_{n-1,(\frac{\alpha}{2m})}}{\sqrt{\frac{p(n-1)}{(n-p)}F_{p,n-p,\alpha}}}$$

که به کمیت‌های $\bar{X}$ و S بستگی ندارد. چنان که برای یک تعداد کم تابع m پارامتری مشخص شده‌ی $\underset{\sim}{\ell}_i' \underset{\sim}{\mu}$ اشاره کردیم طول فواصل بونفرونی همیشه کوتاهترند. که میزان کوتاهتر بودن را برای n و p انتخابی در جدول زیر نشان داده ایم:

10	4 (m=p)	2	n
0.49	0.69	0.88	15
0.48	0.75	0.90	25
0.58	0.78	0.91	50
0.62	0.80	0.91	100
0.66	0.81	0.91	∞

استنباط براساس نمونه های خیلی بزرگ:

$\sum$نامعلوم و n کوچک: $n(\bar{X} - \mu_0)' S^{-1}(\bar{X} - \mu_0) \sim T^2$

$\sum$معلوم و n کوچک: $n(\bar{X}-\mu_0)^{\prime}S^{-1}(\bar{X}-\mu_0)\sim\mathcal{X}^2$

$\sum$ نامعلوم و n بزرگ: $n(\bar{X}-\mu_0)^{\prime}S^{-1}(\bar{X}-\mu_0)\sim\mathcal{X}^2$

نکته:

فرض کنید $\underset{\sim}{X}_1,\ldots,\underset{\sim}{X}_n$ یک نمونه تصادفی از جامعه ای با میانگین $\underset{\sim}{\mu}$ و ماتریس کوواریانس معین مثبت $\sum$ باشد.

وقتی $n-p$ بزرگ باشد، فرض H_0 آزمون $\begin{cases} H_0: \underset{\sim}{\mu}=\underset{\sim}{\mu}_0 \\ H_1: \underset{\sim}{\mu}\neq\underset{\sim}{\mu}_0 \end{cases}$ در سطح معنی داری α رد می‌شود، هرگاه:

$$n(\bar{X}-\mu_0)^{\prime}S^{-1}(\bar{X}-\mu_0)>\mathcal{X}^2_{p,\alpha} \quad \Longrightarrow \quad RH_0$$

$$P\left(n(\bar{X}-\mu_0)^{\prime}S^{-1}(\bar{X}-\mu_0)\leq\mathcal{X}^2_{p,\alpha}\right)=1-\alpha$$

پس اگر $n-p$ بزرگ باشد، آنگاه:

$$\frac{p(n-1)}{(n-p)}F_{p,n-p,\alpha}\approx\mathcal{X}^2_{p,\alpha}$$

و در این‌صورت ناحیه اطمینان $\underset{\sim}{\ell}^{\prime}\underset{\sim}{\mu}$:

$$\underset{\sim}{\ell}^{\prime}\underset{\sim}{X}\pm\sqrt{\mathcal{X}^2_{p,\alpha}}\sqrt{\frac{\underset{\sim}{\ell}^{\prime}S\underset{\sim}{\ell}}{n}}$$

خواهدشد و فواصل اطمینان هم‌زمان برای p میانگین:

$$\mu_1:\bar{x}_1\pm\sqrt{\mathcal{X}^2_{p,\alpha}}\sqrt{\frac{S_{11}}{n}}$$

.

.

.

$$\mu_p:\bar{x}_p\pm\sqrt{\mathcal{X}^2_{p,\alpha}}\sqrt{\frac{S_{pp}}{n}}$$

مقایسات زوجی:

یادآوری

در حالت یک متغیری فرض کنید X_{1j} پاسخ به تیمار 1 (یا پاسخ قبل از تیمار) و X_{2j} پاسخ به تیمار 2 (یا پاسخ بعد از تیمار) باشد.

$$D_j = X_{1j} - X_{2j} \quad , \quad j = 1, \dots n$$

با در نظر گرفتن تفاوت های D_j به‌صورت مشاهدات مستقل از توزیع $N(\delta, \sigma_d^2)$:

$$t = \frac{\bar{D} - \delta}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}} \quad , \quad \bar{D} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} D_j \quad , \quad {s_d}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(D_j - \bar{D})^2$$

در نتیجه یک آزمون در سطح α:

$$\begin{cases} H_0: \delta = 0 \\ H_1: \delta \neq 0 \end{cases} \qquad if \quad |t| > t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \quad \Longrightarrow \quad RH_0$$

و فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای $\delta = E(X_{1j} - X_{2j})$ به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\bar{d} - t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \frac{s_d}{\sqrt{n}} \leq \delta \leq \bar{d} + t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \frac{s_d}{\sqrt{n}}$$

برای تعمیم به حالت چندمتغیره:

$$\begin{cases} X_{11j}: \text{متغیر 1 تحت تیمار 1} \\ X_{12j}: \text{متغیر 2 تحت تیمار 1} \\ \quad \vdots \qquad \qquad \vdots \\ X_{1pj}: \text{متغیر } p \text{ تحت تیمار 1} \end{cases}$$

و

$$\begin{cases} X_{21j}: \text{متغیر} 1 \text{ تحت تیمار } 2 \\ X_{22j}: \text{متغیر} 2 \text{ تحت تیمار } 2 \\ \vdots \qquad \vdots \\ X_{2pj}: \text{متغیر} p \text{ تحت تیمار } 2 \end{cases}$$

بنابراین:

$$\begin{cases} D_{1j} = X_{11j} - X_{21j} \\ D_{2j} = X_{12j} - X_{22j} \\ \vdots \qquad \vdots \\ D_{pj} = X_{1pj} - X_{2pj} \end{cases}$$

$$\underset{\sim}{D}'_j = [D_{1j}, \ldots, D_{pj}] \quad , \quad j = 1, \ldots, n$$

به‌طوری‌که:

$$E\left(\underset{\sim}{D}_j\right) = \delta = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_p \end{bmatrix} \quad , \qquad Cov\left(\underset{\sim}{D}_j\right) = \textstyle\sum_d \quad , \quad \underset{\sim}{D}_1, \ldots, \underset{\sim}{D}_n \sim N_p(\underset{\sim}{\delta}, \textstyle\sum_d)$$

اکنون با معلوم بودن تفاضل های مشاهده شده $\underset{\sim}{d}'_j = (d_{1j}, \ldots, d_{pj}) \ , \ j = 1, \ldots, n$ مربوط به متغیرهای تصادفی بردار $\underset{\sim}{D}'_j$ یک آزمون در سطح α به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} H_0: \underset{\sim}{\delta} = 0 \\ H_1: \underset{\sim}{\delta} \neq 0 \end{cases}$$

که فرض H_0 یعنی بین تفاضل میانگین دو تیمار تفاوتی وجود ندارد.

برای یک جامعه $N_p(\underset{\sim}{\delta}, \sum_d)$ تحت فرض H_0 خواهیم داشت:

$$T^2 = n\,\bar{d}'\,S_d^{-1}\bar{d} > \frac{p(n-1)}{(n-p)} F_{p,n-p,\alpha} \qquad \Longrightarrow \quad RH_0$$

و یک ناحیه‌ی اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای δ به‌صورت زیر است:

$$(\bar{d} - \underset{\sim}{\delta})' S_d^{-1} (\bar{d} - \underset{\sim}{\delta}) \leq \frac{p(n-1)}{(n-p)} F_{p,n-p,\alpha}$$

و فواصل اطمینان هم‌زمان:

$$\delta_i: \bar{d}_i \pm \frac{p(n-1)}{(n-p)} F_{p,n-p,\alpha} \sqrt{\frac{s_{d_i}^2}{n}}$$

برای n بزرگ به‌طوری‌که $n-p$ بزرگ باشد، فرض $\frac{p(n-1)}{(n-p)} F_{p,n-p,\alpha} = \chi^2_{p,\alpha}$ و نرمال بودن ضروری نیست.

مثال1.6)

موسسه‌ی فاضلاب شهری طبق قانون باید تخلیه‌ی فاضلاب به داخل رودخانه ها و نهرها را به‌طور منظم زیر نظر داشته باشد. نگرانی درباره‌ی قابل اعتماد بودن داده های یکی از این برنامه های ناظر برخود به مطالعه ای منجر شد که در آن نمونه های انتخاب شده به دو دسته تقسیم می شد و برای آزمایش به دو آزمایشگاه ارسال می گردید. نیمی از نمونه را به آزمایشگاه بهداشت ایالت ویسکانسین و نیمی دیگر به آزمایشگاه خصوصی که به طور مرتب در برنامه‌ی نظارت از آن استفاده می‌شد فرستاده شد. اندازه های اکسیژن بیو شیمیایی(BOD)و ذرات معلق(SS) مربوط به $n-11$ نمونه‌ی دو آزمایشگاه را به‌دست آوردیم. داده ها در جدول زیر نشان داده شده اند.

جدول دادهای مربوط به جریان آب

نمونه‌ی j	آزمایشگاه خصوصی		آزمایشگاه ایالتی	
	(BOD)	(SS)	(BOD)	(SS)
1	6	27	25	15
2	6	23	28	33
3	18	64	36	22
4	8	44	35	29
5	11	30	15	31
6	34	75	44	64
7	28	26	42	30
8	71	124	54	64
9	43	54	34	56
10	33	30	29	20
11	20	14	39	21

آیا تحلیل شیمیایی دو آزمایشگاه با هم توافق دارند؟ اگر تفاوت هایی وجود دارد این تفاوت ها در چیست؟

حل:

-19	4	9	17	-14	-10	-4	-27	-18	-22	-19	d_{1j}
-7	10	-2	60	-4	11	-1	15	42	10	12	d_{2j}

$$\bar{d} = \begin{bmatrix} \bar{d}_1 \\ \bar{d}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9.36 \\ 13.27 \end{bmatrix} \quad , \qquad S_d = \begin{bmatrix} 199.26 & 88.38 \\ 88.38 & 418.61 \end{bmatrix}$$

و

$$T^2 = 11[-9.36 \quad 13.27] \begin{bmatrix} 0.0055 & -0.0012 \\ -0.0012 & 0.0026 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9.36 \\ 13.27 \end{bmatrix} = 13.6$$

و مقدار ناحیه‌ی بحرانی برابر است با:

$$\frac{p(n-1)}{(n-p)} F_{p,n-p,\alpha} = \frac{2 \times 10}{9} F_{2,9,0.05} = 9.47$$

چون: $T^2 = 13.6 > 9.47$

لذا H_0 را در سطح $\alpha = 0.05$ رد می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم که اختلاف میانگین غیر صفری بین دو آزمایشگاه وجود ندارد.

همچنین از بررسی داده ها معلوم می‌شود که آزمایشگاه تجاری اندازه های BOD پایین تر و اندازه های SS بالاتری را نسبت به آزمایشگاه ایالتی بهداشت فراهم می‌کند.

فواصل اطمینان هم‌زمان 95٪ برای تفاضل میانگین‌ها، یعنی δ_1 و δ_2 عبارتند از :

$$\delta_1 : \bar{d}_1 \pm \sqrt{\frac{p(n-1)}{(n-p)} F_{p,n-p,\alpha}} \sqrt{\frac{s_{d_i}^2}{n}}$$

$$= -9.36 \pm \sqrt{9.47} \sqrt{\frac{199.26}{11}} : (-22.46, 3.74)$$

$$\delta_2 : 13.27 \pm \sqrt{9.47} \sqrt{\frac{418.61}{11}} : (-5.71, 32.25)$$

حل مثال فوق با R :

```
> x=read.table("T6-1.DAT")
> d1=x[,1]-x[,3]
> d2=x[,2]-x[,4]
> d=cbind(d1,d2)
> source('Hotelling.R')
> Hotelling(d,rep(0,2))
                [,1]
```

مقدار آماره‌ی T^2 برابر 13.6می‌باشد:

```
Hoteliing-T2 13.63931214
p.value 0.02082779
```

باتوجه به اینکه مقدار معنی داری کوچکتر از 0.05 است بنابراین فرضیه صفر در سطح معنی داری 0.05 رد می شود.

```
> source("cregion.R")
> confreg(d)
[1] "C.R. based on T^2"
          [,1]      [,2]
[1,] -22.453272 3.726000
[2,] -5.700119 32.245574
```

در خروجی بالا فواصل اطمینان هم‌زمان 95٪برای δ_1 و δ_2 را مشاهده می‌کنیم.

```
[1] "CR based on individual t"
           [,1]       [,2]
[1,] -18.8467298 0.1194570
[2,] -0.4725958 27.0180504
```

[1] "CR based on Bonferroni"

فواصل اطمینان بونفرونی نیز به‌صورت زیر می‌باشند:

```
         [,1]      [,2]
[1,] -20.573107 1.845835
[2,] -2.974903 29.520358
[1] "Asymp. simu. CR"
         [,1]      [,2]
[1,] -19.781395 1.054122
[2,] -1.827351 28.372806
```

آزمون برابری مولفه های بردار میانگین:

فرض کنید $\underset{\sim}{X} \sim N_p(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$ که در آن $\underset{\sim}{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix}$. می‌خواهیم آزمون فرض زیر را انجام دهیم:

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 = \cdots = \mu_p \\ H_1: \mu_\ell \neq \mu_k \end{cases} \qquad (1)$$

فرض کنید $\underset{\sim}{X}_1, \ldots, \underset{\sim}{X}_n$ یک نمونه تصادفی از $\underset{\sim}{X} \sim N_p(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$ باشد و تبدیل زیر را در نظر بگیرید:

$$c = (I \quad -I) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}_{(p-1)\times p}$$

به ماتریس c ماتریس مقایسه مقید گویند. در این‌صورت آزمون(1) معادل با آزمون زیر است:

$$\begin{cases} H_0: c\underset{\sim}{\mu} = \underset{\sim}{0} \\ H_1: c\underset{\sim}{\mu} \neq \underset{\sim}{0} \end{cases} \quad , \quad c\underset{\sim}{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 - \mu_p \\ \vdots \\ \mu_{p-1} - \mu_p \end{bmatrix} = 0$$

پس تعریف می‌کنیم:

$$\underset{\sim}{\mathrm{Y}}_{\ j} = c\,\underset{\sim}{\mathrm{X}}_{\ j} \qquad j = 1, \dots, n$$

می‌دانیم:

$$\underset{\sim}{\mathrm{Y}}_{\ j} \sim N_{p-1}(c\underset{\sim}{\mu}, c\textstyle\sum c')$$

در این‌صورت تحت فرض H_0 آماره ی T^2 به‌صورت زیر است:

$$T^2 = n\bar{Y}'S^{-1}\bar{Y} = n(c\,\underset{\sim}{\bar{X}}\ )'\,(cSS')^{-1}(c\,\underset{\sim}{\bar{X}})\ \sim T^2_{p-1,n-1}$$

در نتیجه فرض $H_0{:}\,c\underset{\sim}{\mu} = \underset{\sim}{0}$ در مقابل $H_1{:}\,c\underset{\sim}{\mu} \neq \underset{\sim}{0}$ را در سطح معناداری α رد خواهیم کرد، اگر:

$$T^2 > \frac{(n-1)(p-1)}{n-p+1}F_{p-1,n-p+1,\alpha} \qquad \Longmapsto \qquad RH_0$$

$$T^2(p,n) = \frac{np}{n-p+1}F_{p,n-p+1}$$

پس:

$$T^2{}_{p-1,n-1} = \frac{(n-1)(p-1)}{(n-1)-(p-1)+1}F_{p-1,n-p+1}$$

همچنین یک ناحیه‌ی اطمینان 100(1-α)% برای مقایسه های مقید $c\underset{\sim}{\mu}$ به وسیله‌ی کلیه‌ی $c\underset{\sim}{\mu}$ هایی به‌دست می آید که در رابطه‌ی زیر قرار گیرند:

$$n(c\underset{\sim}{\mu} - c\,\underset{\sim}{\bar{X}})'\,(csc')^{-1}(c\underset{\sim}{\mu} - c\,\underset{\sim}{\bar{X}})\ \le \frac{(n-1)(p-1)}{n(n-p+1)}F_{\alpha,(p-1,n-p+1)}$$

همچنین برای هر بردار مقایسه‌ی $\underset{\sim}{\mathrm{c}}'$ (یک سطر از ماتریس c) یک فاصله اطمینان هم‌زمان برای $\underset{\sim}{\mathrm{c}}'\underset{\sim}{\mu}$ عبارت است از:

$$\underset{\sim}{c}'\underset{\sim}{\mu}\ c\ \underset{\sim}{\mathrm{c}}\ '\,\underset{\sim}{\bar{X}} \pm \sqrt{\frac{(n-1)(p-1)}{(n-p+1)}F_{\alpha,(p-1,n-p+1)}}\sqrt{\frac{\underset{\sim}{\mathrm{c}}'s\underset{\sim}{\mathrm{c}}}{n}}$$

مثال2.6)

داروهای بیهوش کننده را اغلب ابتدا با مطالعه‌ی تاثیرشان روی حیوانات بهتر می‌کنند. در یک مطالعه به 19

سگ ابتدا داروی پنتوباربیتول داده می‌شود. سپس به هر سگ در هر یک از دو سطح فشار کربن دی اکسید (CO_2)داده می‌شود. بعد از آن هالوتن (H) اضافه می‌شود و اجرایCO_2 تکرار می‌شود. پاسخ در یک هزارم ثانیه بین ضربه های قلب برای ترکیب 4 تیمار اندازه گیری شد.

اثرات بیهوش کننده‌ی فشار CO_2 و هالوتن را از این طرح اندازه های تکراری تحلیل می‌کنیم.

جدول داده های مربوط به خواب سگ‌ها

سگ	تیمار			
	1	2	3	4
1	426	609	556	600
2	253	236	392	395
3	359	433	349	357
4	432	431	522	600
5	405	426	513	513
6	324	438	507	539
7	310	312	410	459
8	326	326	350	504
9	375	447	547	548
10	286	286	403	422
11	349	382	473	497
12	429	410	488	547
13	348	377	447	514
14	412	473	472	446
15	347	326	455	468
16	434	458	637	524
17	364	367	432	469
18	420	395	503	531
19	397	556	645	625

حل:

تیمار1: فشار بالا و بدون هالوتن

تیمار2: فشار پایین و بدون هالوتن

تیمار3: فشار بالا و با هالوتن

تیمار4: فشار پایین و با هالوتن

در اینجا 3 مقایسه‌ی تیمارها هستند که در این آزمایش می‌توانند مورد نظر باشند.

مقایسه هالوتن تفاوت بین وجود عدم وجود هالوتن را نشان می‌دهد $= \quad (\mu_3+\mu_4)-(\mu_1+\mu_2)=0$

مقایسه فشار تفاوت بین فشار بالا و پایین را نشان می‌دهد $= \quad (\mu_3+\mu_1)-(\mu_2+\mu_4)=0$

اثر متقابل را نشان می‌دهد $= (\mu_1+\mu_4)-(\mu_2+\mu_3)=0$

اگر $\mu^{\prime}=[\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4]$ ، آنگاه ماتریس مقایسه‌ی C عبارت است از:

$$C=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

با توجه به داده ها داریم:

$$\bar{X}=\begin{bmatrix} 368.21 \\ 404.63 \\ 479.26 \\ 502.89 \end{bmatrix} \quad , \quad S=\begin{bmatrix} 2819.29 & & & \\ 3568.42 & 7963.14 & & \\ 2943.49 & 5303.98 & 6851.32 & \\ 2295.35 & 4065.44 & 4499.63 & 4878.99 \end{bmatrix}$$

وبنابراین:

$$C\bar{X}=\begin{bmatrix} 209.31 \\ -60.05 \\ -12.79 \end{bmatrix} \quad , \quad CSC^{\prime}=\begin{bmatrix} 9432.32 & 1098.92 & 927.62 \\ 1098.92 & 5195.84 & 914.54 \\ 927.62 & 914.54 & 7557.44 \end{bmatrix}$$

و :

$$T^2 = n(C\,\underset{\sim}{\bar{X}})^{\prime}(CSS^{\prime})^{-1}(C\,\underset{\sim}{\bar{X}}) = 19(6.11) = 116$$

در سطح 0.05:

$$\frac{(n-1)(p-1)}{n(n-p+1)}F_{\alpha,(p-1,n-p+1)}=\frac{18(3)}{16}F_{3,16,0.05}=10.94$$

چون: $116>10.94$ بنابراین فرض اولیه که هیچ تیماری تاثیر ندارد رد می‌شود.

حال برای اینکه ببینیم کدام مقایسات در رد H_0 موثر بوده فواصل اطمینان هم‌زمان95٪ را برای این مقایسات به‌دست می آوریم.

$C_1'\underset{\sim}{\mu}=(\mu_3+\mu_4)-(\mu_1+\mu_2)=$ تاثیر هالوتن

$$:(\bar{x}_3+\bar{x}_4)-(\bar{x}_1+\bar{x}_2)\pm\sqrt{10.94}\sqrt{\frac{C_1'SC_1}{19}}$$

$$=209.31\pm\sqrt{10.94}\sqrt{\frac{9432.32}{19}}\quad:(135.61,283.01)$$

چون فاصله فوق تماما مثبت می‌باشد پس با اطمینان 95٪ هالوتن زمان بین ضربان قلب را زیاد می‌کند.

$C_2'\underset{\sim}{\mu}=(\mu_3+\mu_1)-(\mu_2+\mu_4)=$ تاثیر فشار

$$:(\bar{x}_3+\bar{x}_1)-(\bar{x}_2+\bar{x}_4)\pm\sqrt{10.94}\sqrt{\frac{C_2'SC_2}{19}}$$

$$=-60.05\pm\sqrt{10.94}\sqrt{\frac{5195.84}{19}}\quad:(-114.74,-5.34)$$

چون فاصله فوق منفی است با اطمینان 95٪فشار زمان بین ضربان قلب را کم می‌کند.

$C_3'\underset{\sim}{\mu}=(\mu_1+\mu_4)-(\mu_2+\mu_3)=$ تاثیر اثر متقابل

$$:(\bar{x}_1+\bar{x}_4)-(\bar{x}_2+\bar{x}_3)\pm\sqrt{10.94}\sqrt{\frac{C_3'SC_3}{19}}$$

$$=-12.79\pm\sqrt{10.94}\sqrt{\frac{7557.44}{19}}\quad:(-78.76,53.18)$$

حل مثال فوق با R)

ابتدا داده ها را به‌صورت 4 تیمار و هر کدام 19سگ وارد می‌کنیم:

```
> x=read.table("T6-2.DAT")
> dim(x)
[1]  19  4

> x

   V1  V2   V3    V4

1 426 609 556 600
2 253 236 392 395

3 359 433 349 357
4 432 431 522 600
5 405 426 513 513

6 324 438 507 539
7 310 312 410 456
8 326 326 350 504

9 375 447 547 548
10286286403 422
11 349 382 473 497

12 429 410 488 547
13 348 377 447 514
14 412 473 472 446

15 347 326 455 468
16 434 458 637 524
17 364 367 432 469

18 420 395 508 531
19 397 556 645 625
```

دستور زیر برای ماتریس C می‌باشد که همان ماتریس مقایسه‌ی مقید می‌باشد:

```
> source("contrast.R")
> cmtx=matrix(c(-1,1,1,-1,-1,-1,1,1,-1,1,-1,1),3,4)
> cmtx
```

این ماتریس به‌صورت زیر می‌باشد:

```
     [,1] [,2] [,3] [,4]
[1,]   -1   -1   1  1
[2,]    1   -1   1 -1
[3,]    1   -1  -1  1
> contrast(x,cmtx)
```

آماره‌ی T^2 و مقدار معنی داری به‌صورت زیر می‌باشند:

```
[1] "Hotelling Tsq statistics & p-value"
[1] 1.160163e+02 3.317767e-07
[1] "Simultaneous C.I. for each contrast"
          [,1]        [,2]
[1,] 135.65030    282.98128
[2,] -114.72708   -5.37818
[3,] -78.72858    53.14964
```

خروجی بالا فواصل اطمینان هم‌زمان را برای مقایسه های مقید نشان می‌دهد.

فاصله اطمینان برای تاثیر هالوتن و تاثیر فشار و اثر متقابل مشاهده می‌شود.

مطالعه‌ی چندمتغیره‌ی دو جامعه:

مقایسه‌ی بردارهای میانگین دو جامعه:

فرض کنید یک نمونه‌ی تصادفی به حجم n_1 از جامعه 1 و نمونه تصادفی به حجم n_2 از جامعه2 داریم. به-طوری‌که

جامعه ی(1): $\underset{\sim}{X}_{11}, \dots, \underset{\sim}{X}_{1n_1}$, $\quad \overline{\underset{\sim}{X}}_1 = \frac{1}{n_1}\sum_{j=1}^{n_1} \underset{\sim}{X}_{1j}$

$$S_1 = \frac{1}{n_1 - 1}\sum_{j=1}^{n_1}(\underset{\sim}{X}_{1j} - \overline{\underset{\sim}{X}}_1)(\underset{\sim}{X}_{1j} - \overline{\underset{\sim}{X}}_1)'$$

(2)جامعه ی: $\underset{\sim}{X}_{21}, \ldots, \underset{\sim}{X}_{2n_2}$, $\underset{\sim}{\bar{X}}_2 = \frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2} \underset{\sim}{X}_{2j}$

$$S_2 = \frac{1}{n_2 - 1}\sum_{j=1}^{n_2}(\underset{\sim}{X}_{2j} - \underset{\sim}{\bar{X}}_2)(\underset{\sim}{X}_{2j} - \underset{\sim}{\bar{X}}_2)'$$

1)دقت کنید $\underset{\sim}{X}_{11}, \ldots, \underset{\sim}{X}_{1n_1}$ نمونه تصادفی به حجم n_1 از جامعه p متغیری با بردار میانگین $\underset{\sim}{\mu}_1$ و ماتریس کواریانس $\sum_1$ است.

2) $\underset{\sim}{X}_{21}, \ldots, \underset{\sim}{X}_{2n_2}$ نمونه تصادفی به حجم n_2 از جامعه p متغیری دیگر با بردار میانگین $\underset{\sim}{\mu}_2$ و ماتریس کواریانس $\sum_2$ است.

3)همچنین $\underset{\sim}{X}_{11}, \ldots, \underset{\sim}{X}_{1n_1}$ مستقل از $\underset{\sim}{X}_{21}, \ldots, \underset{\sim}{X}_{2n_2}$ هستند.

4)اگر n_1 و n_2 کوچک باشند، هر دو جامعه نرمال چندمتغیره فرض می‌شوند و $\sum_1 = \sum_2$ در نظر گرفته می-شود که برای برآورد کواریانس مشابه یک متغیره ماتریس کواریانس S_p که از ادغام S_1 و S_2 به‌دست می آیند را داریم:

$$S_p = \frac{(n_1 - 1)S_1 + (n_2 - 1)S_2}{n_1 + n_2 - 2}$$

می‌خواهیم آزمون فرض $\begin{cases} H_0: \underset{\sim}{\mu}_1 - \underset{\sim}{\mu}_2 = \underset{\sim}{\delta}_0 \\ H_1: \underset{\sim}{\mu}_1 - \underset{\sim}{\mu}_2 \neq \underset{\sim}{\delta}_0 \end{cases}$ را انجام دهیم.

$$E\left(\underset{\sim}{\bar{X}}_1 - \underset{\sim}{\bar{X}}_2\right) = \underset{\sim}{\mu}_1 - \underset{\sim}{\mu}_2 \qquad , \qquad Cov\left(\underset{\sim}{\bar{X}}_1, \underset{\sim}{\bar{X}}_2\right) = 0$$

$$Cov\left(\underset{\sim}{\bar{X}}_1\right) = \frac{\Sigma}{n_1} \qquad , \qquad Cov\left(\underset{\sim}{\bar{X}}_2\right) = \frac{\Sigma}{n_2}$$

$$\Longrightarrow \quad Cov\left(\underset{\sim}{\bar{X}}_1 - \underset{\sim}{\bar{X}}_2\right) = \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)\Sigma$$

$$\Longrightarrow \quad Cov\left(\underset{\sim}{\bar{X}}_1 - \underset{\sim}{\bar{X}}_2\right) = \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)S_p$$

$$\underset{\sim}{\bar{X}}_1 - \underset{\sim}{\bar{X}}_2 \sim N_p\left(\underset{\sim}{\mu}_1 - \underset{\sim}{\mu}_2\, , (\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})\Sigma\right)$$

$$(n_1-1)S_1 \sim w_p(\sum, n_1-1) \quad , \quad (n_2-1)S_2 \sim w_p(\sum, n_2-1)$$

$$(n_1-1)S_1 + , \quad (n_2-1)S_2 \sim w_p(\sum, n_1+n_2-2)$$

$$\Longmapsto \qquad S_p \sim w_p(\sum, n_1+n_2-2/n_1+n_2-2)$$

$$\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)^{\frac{-1}{2}}\left(\underset{\sim}{\bar{X}}_1-\underset{\sim}{\bar{X}}_2-(\underset{\sim}{\mu}_1-\underset{\sim}{\mu}_2)\right)' S_p^{-1} \times \left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)^{\frac{-1}{2}}\left(\underset{\sim}{\bar{X}}_1-\underset{\sim}{\bar{X}}_2-(\underset{\sim}{\mu}_1-\underset{\sim}{\mu}_2)\right)$$

$$\left(\text{نرمال چند متغیره}\right)'\left(\frac{\text{ویشارت}}{\text{درجه آزادی}}\right)'\left(\text{نرمال چند متغیره}\right) = T^2$$

مشابه آزمون $\underset{\sim}{\mu}$داریم:

تحت فرض H_0 :

$$T^2 = \left(\underset{\sim}{\bar{X}}_1-\underset{\sim}{\bar{X}}_2-\underset{\sim}{\delta}_0\right)'\left[\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)S_p\right]^{-1}\left(\underset{\sim}{\bar{X}}_1-\underset{\sim}{\bar{X}}_2-\underset{\sim}{\delta}_0\right) > C^2$$

و بنابراین فرض H_0 در حالت فوق رد می‌شود.

همچنین فاصله‌ی بحرانی C^2 از توزیع آماره‌ی T^2 دو نمونه ای تعیین می‌شود. یعنی:

$$C^2 = \frac{(n_1+n_2-2)P}{(n_1+n_2-P-1)}F_{P,n_1+n_2-P-1}$$

و به همین ترتیب اگر $\underset{\sim}{X}_{11}, \dots, \underset{\sim}{X}_{1n_1}$ یک نمونه تصادفی به حجم n_1 از جامعه $N_p(\underset{\sim}{\mu}_1, \sum)$ و $\underset{\sim}{X}_{21}, \dots, \underset{\sim}{X}_{2n_2}$ نمونه ی n_2 تایی از $N_p(\underset{\sim}{\mu}_2, \sum)$ باشد، آنگاه ناحیه‌ی اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای $\underset{\sim}{\mu}_1-\underset{\sim}{\mu}_2$ به‌صورت زیر خواهد بود:

$$P\left(\left[\underset{\sim}{\bar{X}}_1-\underset{\sim}{\bar{X}}_2-(\underset{\sim}{\mu}_1-\underset{\sim}{\mu}_2)\right]'\left[(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})S_p\right]^{-1}\left[(\underset{\sim}{\bar{X}}_1-\underset{\sim}{\bar{X}}_2-(\underset{\sim}{\mu}_1-\underset{\sim}{\mu}_2)\right] \le C^2\right) = 1-\alpha$$

مثال3.6)

پنجاه قالب صابون به 2 طریق تولید می‌شود. دو خصیصه‌ی کف صابون=X_1 و نرمی= X_2 اندازه گیری می- شوند. آماره های مربوط به قالب‌های تولید شده به وسیله ی روش‌های 1و2 عبارتند از:

$$\bar{X}_1 = \begin{bmatrix} 8.3 \\ 4.1 \end{bmatrix} \quad , \quad S_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\bar{X}_2 = \begin{bmatrix} 10.2 \\ 3.9 \end{bmatrix} \quad , \quad S_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

یک ناحیه‌ی اطمینان *95%* برای $\mu_1 - \mu_2$ بدست آورید.

ابتدا توجه می‌کنیم که S_1 و S_2 تقریبا مساوی اند به طوری که ادغام آنها معقول است. بنابراین:

$$S_p = \frac{(50-1)S_1 + (50-1)S_2}{50+50-2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

همچنین:

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 = \begin{bmatrix} -1.9 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

بنابراین بیضی اطمینان مرکزش $[-1.9 \quad 0.2]'$ است. مقادیر ویژه و بردارهای ویژه‌ی $S_{\text{ادغام شده}}$ را از معادله‌ی زیر به‌دست می آوریم:

$$0 = \left|S_p - \lambda I\right| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 9$$

$$\lambda_1 = 5.303 \quad , \quad \lambda_2 = 1.697$$

و بردارهای ویژه متناظر e_1 و e_2 از : $\quad (S_p)e_i = \lambda_i e_i \quad , \quad i = 1,2$

عبارتند از: $\quad e_1 = \begin{bmatrix} 0.290 \\ 0.957 \end{bmatrix} \quad , e_2 = \begin{bmatrix} 0.957 \\ -.290 \end{bmatrix}$

$$\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) c^2 = \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{50}\right) \frac{(98)(2)}{(97)} F_{2.97,0.05} = 0.25$$

بیضی اطمینان

$$\sqrt{\lambda_i} \sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) c^2} = \sqrt{\lambda_i} \sqrt{0.25}$$

واحد در طول بردار ویژه‌ی e_1 یا 1.15واحد در جهت e_1 و0.65 واحد در جهت e_2 امتداد می یابد.

فواصل اطمینان هم‌زمان برای مولفه های بردار $\underset{\sim}{\mu}_1 - \underset{\sim}{\mu}_2$:

فرض بر نرمال بودن دو جامعه و کواریانس مشترک $\sum$ است.

$$\underset{\sim}{X}_{11},\dots,\underset{\sim}{X}_{1n_1} \sim N_p(\underset{\sim}{\mu}_1,\Sigma) \quad , \quad \underset{\sim}{X}_{21},\dots,\underset{\sim}{X}_{2n_2} \sim N_p(\underset{\sim}{\mu}_2,\Sigma)$$

$$\Sigma_1=\Sigma_2=\Sigma \qquad , \qquad \ell'=(\ell_1,\dots,\ell_p)$$

$$\ell'\left(\underset{\sim}{\bar{X}}_1-\underset{\sim}{\bar{X}}_2\right) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \underset{\sim}{\ell}'\underset{\sim}{\bar{X}}_1 \sim N_p(\underset{\sim}{\ell}'\underset{\sim}{\mu}_1,\underset{\sim}{\ell}'\Sigma\underset{\sim}{\ell}) \\ \underset{\sim}{\ell}'\underset{\sim}{\bar{X}}_2 \sim N_p(\underset{\sim}{\ell}'\underset{\sim}{\mu}_2,\underset{\sim}{\ell}'\Sigma\underset{\sim}{\ell}) \end{cases}$$

$$P\left(\frac{\left[\ell'\left(\underset{\sim}{\bar{X}}_1-\underset{\sim}{\bar{X}}_2\right)-\ell'\left(\underset{\sim}{\mu}_1-\underset{\sim}{\mu}_2\right)\right]}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)\ell' S_p\ell}} \le c \quad , \quad \forall \ell\right)=1-\alpha$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\left\{\ell'\left[\left(\underset{\sim}{\bar{X}}_1-\underset{\sim}{\bar{X}}_2\right)-\left(\underset{\sim}{\mu}_1-\underset{\sim}{\mu}_2\right)\right]\right\}^2}{\ell'(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})S_p\ell} \le c^2$$

و مشابه حالت تک جامعه ای و مطابق لم ماکسیمم سازی و انتخاب:

$$B=\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)S_p \quad , \quad d=\left[\underset{\sim}{\bar{X}}_1-\underset{\sim}{\bar{X}}_2-(\underset{\sim}{\mu}_1-\underset{\sim}{\mu}_2)\right]$$

$$t_\ell^2 \le \left(\underset{\sim}{\bar{X}}_1-\underset{\sim}{\bar{X}}_2-(\underset{\sim}{\mu}_1-\underset{\sim}{\mu}_2)\right)'\left[(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})S_p\right]^{-1}$$

$$\left(\underset{\sim}{\bar{X}}_1-\underset{\sim}{\bar{X}}_2-(\underset{\sim}{\mu}_1-\underset{\sim}{\mu}_2)\right)=T^2 \quad , \quad c=\sqrt{\frac{(n_1+n_2-2)p}{n_1+n_2-p-1}F_{p,n_1+n_2-P-1}}$$

$$P\left(\left|\underset{\sim}{\ell}'(\underset{\sim}{\bar{X}}_1-\underset{\sim}{\bar{X}}_2)-\ell'(\underset{\sim}{\mu}_1-\underset{\sim}{\mu}_2)\right| \le c\sqrt{l'\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)S_p\ell} \quad \forall\ell\right)=1-\alpha$$

$$\ell'\left(\underset{\sim}{\mu}_1-\underset{\sim}{\mu}_2\right): \ell'(\underset{\sim}{\bar{X}}_1-\underset{\sim}{\bar{X}}_2) \pm c\sqrt{\ell'\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)S_p\ell}$$

مثال4.6)

نمونه هایی به حجم $n_1 = 45$ و $n_2 = 55$ را از صاحبان منازل ویسکانسین که تهویه‌ی هوا دارند یا ندارند انتخاب کردیم. دو اندازه‌ی مربوط به استفاده‌ی برق(به کیلو وات ساعت)را در نظر می‌گیریم.

اولی اندازه‌ی کل مصرف در حالت پیک(X_1)در طول جولای 1977 و دومی اندازه‌ی کل مصرف در حالت غیر پیک در طول جولای 1977 است. آماره های نتیجه شده عبارتنداز:

$$\bar{X}_1 = \begin{bmatrix} 204.4 \\ 556.6 \end{bmatrix} \quad , \quad S_1 = \begin{bmatrix} 13825.3 & 23823.4 \\ 23823.4 & 73107.4 \end{bmatrix} \quad , \quad n_1 = 45$$

$$\bar{X}_1 = \begin{bmatrix} 130.0 \\ 355.0 \end{bmatrix} \quad , \quad S_2 = \begin{bmatrix} 8632.0 & 19616.7 \\ 19616.7 & 55964.5 \end{bmatrix} \quad , \quad n_2 = 55$$

می‌خواهیم فواصل اطمینان هم‌زمان *95%* را برای تفاوت‌های در مولفه های میانگین پیدا کنیم.

$$S_p = \frac{(n_1-1)S_1 + (n_2-1)S_2}{n_1+n_2-2} = \begin{bmatrix} 10963.7 & 21505.5 \\ 21505.5 & 63661.3 \end{bmatrix}$$

و

$$c^2 = \frac{(n_1+n_2-2)p}{n_1+n_2-p-1} F_{p,n_1+n_2-P-1,\alpha} = \frac{(98)(2)}{97} F_{2.97,0.05} = 6.26$$

با $[\mu_{11}-\mu_{21}, \mu_{12}-\mu_{22}] = \acute{\mu_1} - \acute{\mu_2}$ فواصل اطمینان هم‌زمان 95٪برای تفاوت جامعه ها عبارت است از:

$$\mu_{11}-\mu_{21}: (204.4-130.0) \pm \sqrt{6.26}\sqrt{\left(\frac{1}{45}+\frac{1}{55}\right)10963.7}$$

یا :

$$21.7 \leq \mu_{11}-\mu_{21} \leq 127.1$$

و همچنین

$$\mu_{12}-\mu_{22}: (556.6-335.0) \pm \sqrt{6.26}\sqrt{\left(\frac{1}{45}+\frac{1}{55}\right)63661.3}$$

یا:

$$74.7 \leq \mu_{12}-\mu_{22} \leq 328.5$$

نتیجه می‌گیریم که بین مصرف برق منازلی که تهویه دارند و آنهایی که تهویه ندارند تفاوتی در مصرف برق وجود دارد.

وضعیت دو نمونه وقتی $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$:

وقتی $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$ نمی توان یک اندازه‌ی فاصله ای مانند T^2 که توزیعش به Σ_1 و Σ_2 نامعلوم بستگی نداشته باشد پیدا کنیم.

آندربرگ از آزمون بارتلت برای آزمون کردن تساوی Σ_1 و Σ_2 برحسب واریانس تعمیم یافته استفاده کرد. اما می‌دانیم اگر جامعه ها نرمال نباشند، استفاده از این آزمون گمراه کننده است.

فقط اگر n_1 و n_2 بزرگ باشند و تعداد متغیرها کم یعنی $n_1 - p$ و $n_2 - p$ بزرگ باشند می‌توان ناحیه‌ی اطمینان $100(1-\alpha)\%$ تقریبی برای $\underset{\sim}{\mu}_1 - \underset{\sim}{\mu}_2$ به‌صورت زیر نوشت:

$$\left[\underset{\sim}{\bar{X}}_1 - \underset{\sim}{\bar{X}}_2 - (\underset{\sim}{\mu}_1 - \underset{\sim}{\mu}_2)\right]' \left[\frac{1}{n_1}S_1 + \frac{1}{n_2}S_2\right]^{-1} \left[\underset{\sim}{\bar{X}}_1 - \underset{\sim}{\bar{X}}_2 - (\underset{\sim}{\mu}_1 - \underset{\sim}{\mu}_2)\right] \leq \mathcal{X}^2_{p,\alpha}$$

و فواصل اطمینان هم‌زمان $100(1-\alpha)\%$ برای تمام ترکیبات خطی $\underset{\sim}{\ell}'(\underset{\sim}{\mu}_1 - \underset{\sim}{\mu}_2)$:

$$\underset{\sim}{\ell}'(\underset{\sim}{\bar{X}}_1 - \underset{\sim}{\bar{X}}_2) \pm \sqrt{\mathcal{X}^2_{p,\alpha}} \sqrt{\ell'\left(\frac{1}{n_1}S_1 + \frac{1}{n_2}S_2\right)\underset{\sim}{\ell}}$$

می‌دانیم:

$$Cov\left(\underset{\sim}{\bar{X}}_1 - \underset{\sim}{\bar{X}}_2\right) = \frac{1}{n_1}\Sigma_1 + \frac{1}{n_2}\Sigma_2 \quad , \quad E\left(\underset{\sim}{\bar{X}}_1 - \underset{\sim}{\bar{X}}_2\right) = \underset{\sim}{\mu}_1 - \underset{\sim}{\mu}_2$$

وقتی $n_1 - p$ و $n_2 - p$ بزرگ باشند، بنا به قضیه حد مرکزی:

$$\underset{\sim}{\bar{X}}_1 - \underset{\sim}{\bar{X}}_2 - N_p\left(\underset{\sim}{\mu}_1 - \underset{\sim}{\mu}_2 \ , \frac{1}{n_1}\Sigma_1 + \frac{1}{n_2}\Sigma_2\right)$$

است که اگر Σ_1 و Σ_2 معلوم باشند می‌دانیم:

$$\left[\underset{\sim}{\bar{X}}_1 - \underset{\sim}{\bar{X}}_2 - (\underset{\sim}{\mu}_1 - \underset{\sim}{\mu}_2)\right]' \left[\frac{1}{n_1}\Sigma_1 + \frac{1}{n_2}\Sigma_2\right]^{-1} \left[\underset{\sim}{\bar{X}}_1 - \underset{\sim}{\bar{X}}_2 - (\underset{\sim}{\mu}_1 - \underset{\sim}{\mu}_2)\right]$$

تقریبا یک توزیع $\mathcal{X}^2_p$ است.

وقتی n_1 و n_2 بزرگ هستند، به احتمال زیاد S_1 به $\sum_1$ و S_2 به $\sum_2$ نزدیک است و S_1 و S_2 جایگزین $\sum_1$ و $\sum_2$ گذاشته می‌شوند و رابطه‌ی(❋) برقرار خواهد شد.

نکته:

اگر $n_1 = n_2 = n$ پس : $\frac{n-1}{n+n-2} = \frac{1}{2}$ و بنابراین:

$$\frac{1}{n_1}S_1 + \frac{1}{n_2}S_2 = \frac{1}{n_1}(S_1 + S_2) = \frac{(n-1)S_1 + (n-1)S_2}{n+n-2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right)$$
$$= S_p\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right).$$

پس اگر حجم نمونه ها برابر باشد، روش نمونه های بزرگ در اصل مانند روش مبتنی بر ماتریس واریانس ادغام شده است.

مثال5.6)

با استفاده از روش نمونه های بزرگ می‌خواهیم داده های مربوط به مصرف برق در مثال قبل را بررسی کنیم.
ابتدا:

$$\frac{1}{n_1}S_1 + \frac{1}{n_2}S_2 = \begin{bmatrix} 464.17 & 886.08 \\ 886.08 & 2642.15 \end{bmatrix}$$

فواصل اطمینان هم‌زمان 95% عبارتند از:

$$\mu_{11} - \mu_{21}: 74.4 \pm \sqrt{5.99}\sqrt{464.17}: (21.7, 127.1)$$
$$\mu_{12} - \mu_{22}: 201.6 \pm \sqrt{5.99}\sqrt{2642.15}: (75.8, 327.4)$$

آماره‌ی T^2 برای آزمون $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ عبارت است از:

$$T^2 = [\bar{X}_1 - \bar{X}_1]' \left[\frac{1}{n_1}S_1 + \frac{1}{n_2}S_2\right]^{-1} [\bar{X}_1 - \bar{X}_1]$$
$$= \begin{bmatrix} 204.4 - 130 \\ 556.6 - 355 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 464.17 & 886.08 \\ 886.08 & 2642.15 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 204.4 - 130 \\ 556.6 - 355 \end{bmatrix}$$
$$= [74.4 \quad 201.6](10^{-4}) \begin{bmatrix} 59.874 & -20.080 \\ -20.080 & 10.519 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 74.4 \\ 201.6 \end{bmatrix} = 15.66$$

چون $15.66 > 5.99$ بنابراین H_0 را رد می‌کنیم.

مقایسه‌ی میانگین های چند جامعه‌ی چند متغیره:

اغلب بیش از دو جامعه برای مقایسه لازم است. فرض کنید g جامعه مدنظر است.

به‌طوری‌که تمام جامعه ها ماتریس کواریانس مشترک دارند.2-هرجامعه نرمال چندمتغیره است.3-نمونه های تصادفی از جامعه های مختلف مستقلند.

جامعه ی(1): $\underset{\sim}{X}_{11}, \dots, \underset{\sim}{X}_{1n_1} \qquad , \qquad \underset{\sim}{\mu}_1 = \begin{bmatrix} \mu_{11} \\ \vdots \\ \mu_{1p} \end{bmatrix} \qquad , \qquad \bar{X}_1$

.
.
.

جامعه ی(g): $\underset{\sim}{X}_{g1}, \dots, \underset{\sim}{X}_{gn_g} \qquad , \qquad \underset{\sim}{\mu}_g = \begin{bmatrix} \mu_{g1} \\ \vdots \\ \mu_{gp} \end{bmatrix} \qquad , \qquad \bar{X}_g$

که برای بررسی فرضیه‌ی (1) $\begin{cases} H_0: \underset{\sim}{\mu}_1 = \cdots = \underset{\sim}{\mu}_g \\ H_1: Not\ \ H_0 \end{cases}$ به یک متغیره از $ANOVA$ استفاده می‌شود.

در اینجا از $MANOVA$ استفاده می‌کنیم.

$$\underset{\sim}{X}_{\ell j} = \underset{\sim}{\mu}_\ell + \underset{\sim}{e}_{\ell j} \qquad , \qquad \underset{\sim}{\mu}_\ell = \underset{\sim}{\mu} + (\underset{\sim}{\mu}_\ell - \underset{\sim}{\mu}) \qquad (*)$$

$$\Longmapsto \quad \underset{\sim}{X}_{\ell j} = \underset{\sim}{\mu} + \underset{\sim}{\tau}_\ell + \underset{\sim}{e}_{\ell j} \quad (**) \qquad j = 1, \dots, n \qquad , \qquad \ell = 1, \dots, g$$

و از $(*)$ نتیجه می‌شود که آزمون (1) معادل با آزمون $\begin{cases} H_0: \underset{\sim}{\tau}_1 = \cdots = \underset{\sim}{\tau}_g = 0 \\ H_1: Not\ \ H_0 \end{cases}$ می‌باشد. به

طوری‌که $\underset{\sim}{e}_{\ell j}$ ها متغیرهای مستقل $N_p(\underset{\sim}{0}, \Sigma)$ هستند و تحت $H_0 : \sum_{\ell=1}^{g} n_\ell \underset{\sim}{\tau}_\ell = 0$ و برآورد مدل $(**)$:

$$\underset{\sim}{X}_{\ell j} = \underset{\sim}{\bar{X}} + \left(\underset{\sim}{\bar{X}}_\ell - \underset{\sim}{\bar{X}}\right) + \left(\underset{\sim}{X}_{\ell j} - \underset{\sim}{\bar{X}}_\ell\right)$$

ابتدا توجه می‌کنیم که حاصل‌ضرب متقاطع به‌صورت زیر می‌باشد:

$$(\underset{\sim}{X}_{\ell j} - \underset{\sim}{\bar{X}})(\underset{\sim}{X}_{\ell j} - \underset{\sim}{\bar{X}})'$$

که آن را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\underset{\sim}{X}_{\ell j}-\underset{\sim}{\bar{X}}\ )(\underset{\sim}{X}_{\ell j}-\underset{\sim}{\bar{X}})^{\prime}=[(\underset{\sim}{X}_{\ell j}-\underset{\sim}{\bar{X}}_{\ell})+(\underset{\sim}{\bar{X}}_{\ell}-\underset{\sim}{\bar{X}})]\times$$

$$\times\left[\left(\underset{\sim}{X}_{\ell j}-\underset{\sim}{\bar{X}}_{\ell}\right)+\left(\underset{\sim}{\bar{X}}_{\ell}-\underset{\sim}{\bar{X}}\right)\right]^{\prime}=\left(\underset{\sim}{X}_{\ell j}-\underset{\sim}{\bar{X}}_{\ell}\right)\left(\underset{\sim}{X}_{\ell j}-\underset{\sim}{\bar{X}}_{\ell}\right)^{\prime}+$$

$$+\left(\underset{\sim}{X}_{\ell j}-\underset{\sim}{\bar{X}}_{\ell}\right)\left(\underset{\sim}{\bar{X}}_{\ell}-\underset{\sim}{\bar{X}}\right)^{\prime}+n\left(\underset{\sim}{\bar{X}}_{\ell}-\underset{\sim}{\bar{X}}\right)\left(\underset{\sim}{X}_{\ell j}-\underset{\sim}{\bar{X}}_{\ell}\right)^{\prime}+\left(\underset{\sim}{\bar{X}}_{\ell}-\underset{\sim}{\bar{X}}\right)\left(\underset{\sim}{\bar{X}}_{\ell}-\underset{\sim}{\bar{X}}\right)^{\prime}$$

جمع بندی روی j دو عبارت میانی ماتریس صفر است. زیرا:

$$\sum_{j=1}^{n\ell}\left(\underset{\sim}{X}_{\ell j}-\underset{\sim}{\bar{X}}_{\ell}\right)=0$$

و بنابراین با جمع روی j و ℓ:

$$\sum_{\ell=1}^{g}\sum_{j=1}^{n\ell}(\underset{\sim}{X}_{\ell j}-\underset{\sim}{\bar{X}})\left(\underset{\sim}{X}_{\ell j}-\underset{\sim}{\bar{X}}\right)^{\prime}=\sum_{\ell=1}^{g}\sum_{j=1}^{n\ell}\left(\underset{\sim}{X}_{\ell j}-\underset{\sim}{\bar{X}}_{\ell}\right)\left(\underset{\sim}{X}_{\ell j}-\underset{\sim}{\bar{X}}_{\ell}\right)^{\prime}+\sum_{\ell=1}^{g}\sum_{j=1}^{n\ell}(\underset{\sim}{\bar{X}}_{\ell}-\underset{\sim}{\bar{X}})(\underset{\sim}{\bar{X}}_{\ell}-\underset{\sim}{\bar{X}})^{\prime}$$

و در نهایت خواهیم داشت:

مجموع مربعات کل:

$$B+W=\sum_{\ell=1}^{g}\sum_{j=1}^{g_{\ell}}\left(\underset{\sim}{X}_{\ell j}-\underset{\sim}{\bar{X}}\right)\left(\underset{\sim}{X}_{\ell j}-\underset{\sim}{\bar{X}}\right)^{\prime}$$

مجموع مربعات باقیمانده:

$$W=\sum_{\ell=1}^{g}\sum_{j=1}^{n\ell}\left(\underset{\sim}{X}_{\ell j}-\underset{\sim}{\bar{X}}_{\ell}\right)\left(\underset{\sim}{X}_{\ell j}-\underset{\sim}{\bar{X}}_{\ell}\right)^{\prime}=(n_1-1)S_1+\cdots+(n_g-1)S_g$$

مجموع مربعات تیمار:

$$B=\sum_{\ell=1}^{g}n_l\left(\underset{\sim}{\bar{X}}_{\ell}-\underset{\sim}{\bar{X}}\right)\left(\underset{\sim}{\bar{X}}_{\ell}-\underset{\sim}{\bar{X}}\right)^{\prime}$$

و در نهایت جدول $MANOVA$:

درجات آزادی	مجموع ماتریس مربعات	منبع تغییرات
$g-1$	B	تیمار
$\sum_{\ell=1}^{g} n_\ell - g$	W	خطا
$\sum_{\ell=1}^{g} n_\ell - 1$	$B+W$	کل

نکته:

اگر $\sum n_\ell = n$ بزرگ باشد، می‌توان نشان داد تحت فرض H_0 :

$$\mathcal{X}_0^2 = -\left(n-1-\frac{(p+g)}{2}\right) ln\, \Lambda^* = -\left(n-1-\frac{(p+g)}{2}\right) ln\left(\frac{|w|}{|B+w|}\right)$$

دارای توزیع تقریبی $\mathcal{X}_{p(g-1)}^2$ است و اگر:

$$\mathcal{X}_0^2 > \mathcal{X}_{p(g-1),\alpha}^2 \qquad \Longrightarrow \qquad RH_0$$

چند حالت خاص:

آماره	تعداد گروه‌ها	تعداد متغیرها
$F_0 = \left(\frac{\sum_{l=1}^{g} n_\ell - g}{g-1}\right)\left(\frac{1-\Lambda^*}{\Lambda^*}\right) \sim F_{g-1,\sum_{l=1}^{g} n_\ell - g}$	$g \geq 2$	$p=1$
$F_0 = \left(\frac{\sum_{l=1}^{g} n_\ell - g - 1}{g-1}\right)\left(\frac{1-\sqrt{\Lambda^*}}{\sqrt{\Lambda^*}}\right) \sim F_{2(g-1),2(\sum_{l=1}^{g} n_\ell - g - 1)}$	$g \geq 2$	$p=2$
$F_0 = \left(\frac{\sum_{l=1}^{g} n_\ell - p - 1}{p}\right)\left(\frac{1-\Lambda^*}{\Lambda^*}\right) \sim F_{p,\sum_{l=1}^{g} n_\ell - p - 1}$	$g=2$	$p \geq 1$
$F_0 = \left(\frac{\sum_{l=1}^{g} n_\ell - p - 2}{p}\right)\left(\frac{1-\sqrt{\Lambda^*}}{\sqrt{\Lambda^*}}\right) \sim F_{2p,2(\sum_{l=1}^{g} n_\ell - p - 2)}$	$g=3$	$p \geq 1$

مثال6.6)

مشاهدات روی دو پاسخ برای 3 تیمار جمع آوری شده اند. مطلوبست جدول $MANOVA$:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix}9\\3\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}6\\2\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}9\\7\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} & \\ \begin{bmatrix}3\\8\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1\\9\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}2\\7\end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

حل:

$$\underset{\sim}{\bar{X}}_1 = \begin{bmatrix}8\\4\end{bmatrix} \quad , \quad \underset{\sim}{\bar{X}}_2 = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} \quad , \quad \underset{\sim}{\bar{X}}_2 = \begin{bmatrix}2\\8\end{bmatrix} \quad , \quad \underset{\sim}{\bar{X}} = \begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}$$

مجموع مربعات تیمار برابر است با:

$$B = 3\begin{bmatrix}8 & -4\\4 & -5\end{bmatrix}[8-4 \quad 4-5] + 2\begin{bmatrix}1 & -4\\2 & -5\end{bmatrix}[1-4 \quad 2-5] + 3\begin{bmatrix}2 & -4\\8 & -5\end{bmatrix}[2-4 \quad 8-5]$$

$$B = 3\begin{bmatrix}16 & -4\\-4 & 1\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}9 & 9\\9 & 9\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}4 & -6\\-6 & 9\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}78 & -12\\-12 & 48\end{bmatrix}$$

مجموع مربعات کل:

$$B + W = \begin{bmatrix}9 & -4\\3 & -5\end{bmatrix}[9-4 \quad 3-5] + \begin{bmatrix}6 & -4\\2 & -5\end{bmatrix}[6-4 \quad 2-5] + \cdots + \begin{bmatrix}2 & -4\\7 & -5\end{bmatrix}[2-4 \quad 7-5]$$

$$B + W = \begin{bmatrix}88 & -11\\-11 & 72\end{bmatrix}$$

مجموع مربعات باقیمانده:

$$W = (B + W) - B = \begin{bmatrix}10 & 1\\1 & 24\end{bmatrix}$$

جدول $MANOVA$:

منبع تغییرات	ماتریس‌های مجموع مربعات	درجات آزادی
تیمار	$\begin{bmatrix}78 & -12\\-12 & 48\end{bmatrix}$	2
خطا	$\begin{bmatrix}10 & 1\\1 & 24\end{bmatrix}$	5
کل	$\begin{bmatrix}88 & -11\\-11 & 72\end{bmatrix}$	7

$$\Lambda^*= \frac{|w|}{|B+w|} = 0.0385$$

چون $p = 2$ و $g = 3$، لذا آماره‌ی آزمون به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\left(\frac{1-\sqrt{\Lambda^*}}{\sqrt{\Lambda^*}}\right)\left(\frac{\sum n_\ell - g - 1)}{g-1}\right) = \left(\frac{1-\sqrt{0.0385}}{\sqrt{0.0385}}\right)\left(\frac{8-3-1}{3-1}\right) = 8.19$$

چون $F_{4,8,1\%} = 7.01$ > 8.19 ، لذا H_0 را درسطح 1% رد می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم که تفاوت‌های تیمار وجود دارد.

حل مثال فوق با R)

ابتدا داده ها را با دستور زیر وارد نرم افزار می‌کنیم:

```
> Y1<-c(9,6,9,0,2,3,1,2)
> Y2<-c(3,2,7,4,0,8,9,7)
> Response=cbind(Y1,Y2)
> Factor<-factor(rep(c(1,2,3),c(3,2,3)))
> Fit<-manova(Response~Factor)
> Fit
```

خروجی دستور فوق جدولی است به‌صورت زیر که تیمارها و باقی مانده ها و درجه آزادی آنها را مشخص می کند..

```
Call:
  manova(Response ~ Factor)


Terms:
           Factor Residuals
resp 1        78        10
resp 2        48        24
```

```
Deg. of Freedom     2        5

Residual standard error: 1.4142142.19089
Estimated effects may be unbalanced
```

دستور زیر برای آزمون کردن مقدار لاندای ویلکس به‌کار می رود.

```
> summary(Fit,test="Wilks")
        Df    Wilks approx F num Df den Df   Pr(>F)
Factor     2 0.038455   8.1989      4      8 0.006234 **
```

مشاهده می‌کنیم که مقدار آماره‌ی لاندای ویلکس 0.0385 به‌دست آمده است.

```
Residuals  5
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

آزمون زیر $tr(B(B+W)^{-1})$ را به ما می‌دهد که در اینجا برابر 1.5408 می‌باشد.

```
> summary(Fit,test="Pillai")
        Df Pillai approx F num Df den Df   Pr(>F)
Factor     2 1.5408   8.3882      4     10 0.003096 **
Residuals  5
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

آزمون زیر بیشترین مقدار λ_i را به ما می‌دهد که برابر 8.0764 می‌باشد.

```
> summary(Fit,test="Roy")
        Df    Roy approx F num Df den Df   Pr(>F)
Factor     2 8.0764   20.191      2      5 0.004029 **
Residuals  5
```

```
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
> summary(Fit,test="Hotelling-Lawley")
          Df Hotelling-Lawley approx F num Df den Df  Pr(>F)
Factor     2           9.9414   7.4561      4      6 0.01643 *
Residuals  5
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

دستور زیر ماتریس B و W را می‌دهد.

```
> a<-summary(Fit)
> a$SS
$Factor
```

ماتریس B به‌صورت زیر می‌باشد

```
   Y1  Y2
Y1  78 -12
Y2 -12  48
$Residuals
```

ماتریس W به‌صورت زیر می‌باشد.

```
   Y1 Y2
Y1 10  1
Y2  1 24
```

مثال7.6)

اداره‌ی بهداشت و خدمات اجتماعی ایالت ویسکانسین هزینه های آسایشگاه های واقع در ایالت را در مقابل خدمات ارائه شده می‌سازد. این اداره مجموعه ی فرمول های نرخ ها را برای هر امکان بر مبنای عواملی چون:

سطح مراقبت، میانگین نرخ دستمزد و متوسط نرخ دستمزد در ایالت، فراهم نموده است. آسایشگاه ها را می توان بر پایه‌ی مالکیت (دسته ی خصوصی، سازمان غیرانتفاعی و دولت) و گواهینامه(امکانات پرستاری ماهرانه (SNF)، امکانات مراقبتی بینابینی(ICF) یا ترکیب $(SNF\&\, ICF)$ رده بندی کرد.

یک هدف مطالعه‌ی اخیر بررسی اثرات مالکیت یا تایید(یا هردو)روی هزینه هاست. چهار هزینه را بر مبنای یک روز هر مریض محاسبه و بر حسب ساعت برای هر بیمار اندازه گیری نموده، و برای تحلیل انتخاب کرده ایم: هزینه ی خدمات پرستاری$=X_1$ ، هزینه ی خدمات رژیم غذایی$=X_2$، هزینه نگهداری و عملیات پایگاهی $=X_3$، هزینه ی خانه داری و لباسشویی$=X_4$. ابتدا $n=516$ مشاهده روی هر یک از $p=4$ متغیر هزینه بر اساس مالکیت تفکیک گردید. آماره های خلاصه شده برای هر یک از $g=3$ دسته در زیر داده شده است.

بر اساس خلاصه آماره های زیر جدول $MANOVA$ را تشکیل دهید.

گروه	تعداد مشاهدات	بردارهای میانگین نمونه
$\ell=1$	$n_1=271$	$\bar{x}_1=[2.066 \quad 0.480 \quad 0.082 \quad 0.360]$
$\ell=2$	$n_1=138$	$\bar{x}_2=[2.167 \quad 0.596 \quad 0.124 \quad 0.418]$
$\ell=3$	$n_1=107$	$\bar{x}_3=[2.273 \quad 0.521 \quad 0.125 \quad 0.383]$

ماتریس‌های کواریانس نمونه به‌صورت زیر می‌باشند:

$$S_1=\begin{bmatrix} 0.291 & -0.001 & 0.002 & 0.010 \\ -0.001 & 0.011 & 0.000 & 0.003 \\ 0.002 & 0.000 & 0.001 & 0.000 \\ 0.010 & 0.003 & 0.000 & 0.010 \end{bmatrix}$$

$$S_2=\begin{bmatrix} 0.561 & 0.011 & 0.001 & 0.037 \\ 0.011 & 0.025 & 0.004 & 0.007 \\ 0.001 & 0.004 & 0.005 & 0.002 \\ 0.037 & 0.007 & 0.002 & 0.019 \end{bmatrix}$$

$$S_3=\begin{bmatrix} 0.261 & 0.030 & 0.003 & 0.018 \\ 0.030 & 0.017 & -0.000 & 0.006 \\ 0.003 & -0.000 & 0.004 & 0.001 \\ 0.018 & 0.006 & 0.001 & 0.013 \end{bmatrix}$$

حل:

چون S_ℓ ها به‌طور معقولی سازگار به نظر می‌رسند لذا آنها را ادغام می‌کنیم تا:

$$W = (n_1-1)S_1 + (n_2-1)S_2 + (n_3-1)S_3 = \begin{bmatrix} 182.962 & 4.408 & 1.695 & 9.581 \\ 4.408 & 8.200 & 0.633 & 2.428 \\ 1.695 & 0.633 & 1.484 & 0.394 \\ 9.581 & 2.428 & 0.394 & 6.538 \end{bmatrix}$$

همچنین داریم:

$$\bar{X} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2 + n_3\bar{x}_3}{n_1+n_2+n_3} = \begin{bmatrix} 2.136 \\ 0.519 \\ 0.102 \\ 0.380 \end{bmatrix}$$

و:

$$B = \sum_{\ell=1}^{3} n_\ell(\underset{\sim}{\bar{X}_\ell} - \underset{\sim}{\bar{X}})(\underset{\sim}{\bar{X}_\ell} - \underset{\sim}{\bar{X}})' = \begin{bmatrix} 3.475 & 1.111 & 0.821 & 0.584 \\ 1.111 & 1.225 & 0.453 & 0.610 \\ 0.821 & 0.453 & 0.235 & 0.230 \\ 0.584 & 0.610 & 0.230 & 0.304 \end{bmatrix}$$

آماره‌ی آزمون به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\Lambda^* = \frac{|w|}{|B+w|} = 0.7714$$

و

$$\left(\frac{\sum n_\ell - p - 2}{p}\right)\left(\frac{1-\sqrt{\Lambda^*}}{\sqrt{\Lambda^*}}\right) = \left(\frac{516-4-2}{4}\right)\left(\frac{1-\sqrt{0.7714}}{\sqrt{0.7714}}\right) = 17.67$$

در سطح $\alpha = 0.01$ چون: $F_{2(4),2(510),0.01} = \frac{\chi^2_{8}(1\%)}{8} = 2.51$

بنابراین: $17.67 > 2.51$ و فرض H_0 را در سطح 1٪ رد می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم که متوسط هزینه ها بسته به نوع مالکیت تغییر می‌کند.

همچنین این مثال را چون تعداد نمونه ها بزرگ است می‌توان با استفاده از نکته‌ی فوق حل کرد. یعنی:

$$-\left(n-1-\frac{(p+g)}{2}\right) ln\left(\frac{|w|}{|B+w|}\right) = -511.5\, ln(0.7714) = 132.76$$

چون $\mathcal{X}^2_{8,1\%} > 132.76$، لذا H_0 را در سطح 1%رد می‌کنیم. که این نتیجه با نتیجه‌ی مبتنی بر آماره‌ی F بالا سازگار است.

فواصل اطمینان هم‌زمان برای اثرات تیمار:

فرض کنید هدف بررسی مقایسه های دو به دو باشد. یعنی فواصل اطمینان هم‌زمان برای مولفه های اختلاف های $\underset{\sim}{\tau}_k - \underset{\sim}{\tau}_\ell$ یا $\underset{\sim}{\mu}_k - \underset{\sim}{\mu}_\ell$ فرقی نمی‌کند.

برآورد $\underset{\sim}{\tau}_k$ ، $\underset{\sim}{\hat{\tau}}_k$ است. دیدیم $\underset{\sim}{\bar{X}}_k - \underset{\sim}{\bar{X}}$ است. فرض کنید $\underset{\sim}{\tau}_{ki}$ مولفه‌ی iام $\underset{\sim}{\tau}_k$ باشد.

$$\underset{\sim}{\hat{\tau}}_{ki} = \underset{\sim}{\bar{X}}_{ki} - \underset{\sim}{\bar{X}}_i$$

و به‌همین ترتیب $\underset{\sim}{\hat{\tau}}_\ell$ برآورد $\underset{\sim}{\tau}_\ell$ و به‌صورت $\underset{\sim}{\bar{X}}_\ell - \underset{\sim}{\bar{X}}$ است و : $\underset{\sim}{\hat{\tau}}_{\ell i} = \underset{\sim}{\bar{X}}_{\ell i} - \underset{\sim}{\bar{X}}_i$

$$Var\left(\underset{\sim}{\hat{\tau}}_{ki} - \underset{\sim}{\hat{\tau}}_{\ell i}\right) = Var\left(\underset{\sim}{\bar{X}}_{ki} - \underset{\sim}{\bar{X}}_{\ell i}\right) = \left(\frac{1}{n_k} + \frac{1}{n_l}\right)\sigma_{ii}$$

$$\widehat{Var}\left(\underset{\sim}{\bar{X}}_{ki} - \underset{\sim}{\bar{X}}_{\ell i}\right) = \left(\frac{1}{n_k} + \frac{1}{n_\ell}\right)\frac{w_{ii}}{n-g}$$

و اگر هدف به‌دست آوردن فواصل اطمینان هم‌زمان از روش بونفرونی برای تمام اختلاف‌های دو به دو باشد، پس $\binom{g}{2}$ تفاوت دو به دو وجود دارد:

$$\frac{X}{2m} = \frac{X}{pg(g-1)} \quad , \quad \binom{g}{2} = \frac{g(g-1)}{2} \quad ,$$ متغیر p

و فواصل اطمینان هم‌زمان بونفرونی به‌صورت زیر به‌دست می آید:

$$\underset{\sim}{\tau}_{ki} - \underset{\sim}{\tau}_{\ell i} : \bar{X}_{ki} - \bar{X}_{\ell i} \pm t_{n-g, \frac{\alpha}{pg(g-1)}} \sqrt{\frac{w_{ii}}{n-g}\left(\frac{1}{n_k} + \frac{1}{n_\ell}\right)}$$

مثال 8.6)

در مثال قبل دیدیم که متوسط هزینه های تفاوت بیمارستان‌های خصوصی به نوع مالکیت بستگی دارد. می خواهیم برآورد مقادیر اختلاف‌ها هزینه ها را حساب کنیم. متغیر هزینه X_3 یعنی هزینه های برقراری عمل و نگهداری بین بیمارستان‌های خصوصی که مالکیت آن خصوصی است و بیمارستان‌هایی که مالکیت آن با دولت است را می‌توان با برآورد کردن $\underset{\sim}{\tau}_{13} - \underset{\sim}{\tau}_{33}$ با هم مقایسه کرد.

$$\underset{\sim}{\hat{\tau}}_1 = (\bar{X}_1 - \bar{X}) = \begin{bmatrix} -0.070 \\ -0.039 \\ -0.020 \\ -0.020 \end{bmatrix} \quad , \quad \underset{\sim}{\hat{\tau}}_3 = (\bar{X}_3 - \bar{X}) = \begin{bmatrix} 0.137 \\ 0.002 \\ 0.023 \\ 0.003 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} 182.962 & 4.408 & 1.695 & 9.581 \\ 4.408 & 8.200 & 0.633 & 2.428 \\ 1.695 & 0.633 & 1.484 & 0.394 \\ 9.581 & 2.428 & 0.394 & 6.538 \end{bmatrix}$$

در نتیجه:

$$\underset{\sim}{\hat{\tau}}_{13} - \underset{\sim}{\hat{\tau}}_{33} = -0.020 - 0.023 = -0.043$$

و بنابراین داریم:

$$\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_3}\right)\frac{w_{33}}{n-g}} = \sqrt{\left(\frac{1}{271} + \frac{1}{107}\right)\frac{1.484}{516-3}} = 0.00614$$

چون $p = 4$ و $g = 3$ لذا برای فواصل اطمینان هم‌زمان 95% داریم: $t_{513,0.00208} = 2.87$

بنابراین فاصله‌ی اطمینان هم‌زمان 95% برای $\underset{\sim}{\hat{\tau}}_{13} - \underset{\sim}{\hat{\tau}}_{33}$ عبارت است از:

$$\underset{\sim}{\hat{\tau}}_{13} - \underset{\sim}{\hat{\tau}}_{33} \pm t_{513,0.00208}\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_3}\right)\frac{w_{33}}{n-g}} = -0.043 \pm 0.018 : (-0.061, -0.025)$$

نتیجه می‌گیریم که متوسط هزینه‌ی نگهداری و کارگری برای بیمارستان‌هایی که مالکیت آنها با دولت است 25%تا 61% ساعت به ازای هر مریض در روز بالاتر از بیمارستان‌هایی است که مالکیت آنها خصوصی است. با اطمینان یکسان 95% :

$$\underset{\sim}{\hat{\tau}}_{13} - \underset{\sim}{\hat{\tau}}_{23} : (-0.058, -0.026) \quad , \quad \underset{\sim}{\hat{\tau}}_{23} - \underset{\sim}{\hat{\tau}}_{33} : (-0.021, 0.019)$$

از این رو بین بیمارستان‌های غیر انتفاعی و خصوصی تفاوتی در این هزینه وجود دارد ولی بین بیمارستان‌های غیرانتفاعی و دولتی تفاوتی مشاهده نمی‌شود.

$MANOVA$ دو طرفه:

$$\underset{\sim}{x}_{\ell kr} = \underset{\sim}{\mu} + \underset{\sim}{\tau}_{\ell} + \underset{\sim}{\beta}_{k} + \underset{\sim}{\gamma}_{\ell k} + \underset{\sim}{e}_{\ell kr} \qquad \ell = 1, \dots, g \;\; , \;\; k = 1, \dots, b \, , r = 1, \dots, m$$

به‌طوری‌که:

$$\underset{\sim}{\mathrm{e}}_{\ell kr} \sim N_p(0,\Sigma)$$

$$\sum_{\ell=1}^{g} \underset{\sim}{\tau}_\ell = \sum_{k=1}^{b} \underset{\sim}{\beta}_k = \sum_{\ell=1}^{g} \underset{\sim}{\gamma}_{\ell k} = \sum_{k=1}^{b} \underset{\sim}{\gamma}_{\ell k} = 0$$

جدول $MANOVA$:

منبع تغییرات	مجموع مربعات	درجات آزادی
عامل 1	$\sum_{\ell=1}^{g} bn(\underset{\sim}{\bar{x}}_{\ell.} - \underset{\sim}{\bar{x}})(\underset{\sim}{\bar{x}}_{\ell.} - \underset{\sim}{\bar{x}})'$	$g-1$
عامل 2	$\sum_{k=1}^{b} gn\left(\underset{\sim}{\bar{x}}_{.k} - \underset{\sim}{\bar{x}}\right)\left(\underset{\sim}{\bar{x}}_{.k} - \underset{\sim}{\bar{x}}\right)'$	$b-1$
اثر متقابل	$\sum_{\ell=1}^{g}\sum_{k=1}^{b} n(\underset{\sim}{\bar{x}}_{\ell k} - \underset{\sim}{\bar{x}}_{\ell.} - \underset{\sim}{\bar{x}}_{.k} + \underset{\sim}{\bar{x}})(\underset{\sim}{\bar{x}}_{\ell k} - \underset{\sim}{\bar{x}}_{l.} - \underset{\sim}{\bar{x}}_{.k} + \underset{\sim}{\bar{x}})'$	$(g-1)(b-1)$
باقیمانده	$\sum_{\ell=1}^{g}\sum_{k=1}^{b}\sum_{r=1}^{n}(\underset{\sim}{\bar{x}}_{\ell kr} - \underset{\sim}{\bar{x}}_{\ell k})(\underset{\sim}{\bar{x}}_{\ell kr} - \underset{\sim}{\bar{x}}_{\ell k})'$	$gb(n-1)$
کل	$\sum_{l=1}^{g}\sum_{k=1}^{b}\sum_{r=1}^{n}(\underset{\sim}{\bar{x}}_{\ell kr} - \underset{\sim}{\bar{x}})(\underset{\sim}{\bar{x}}_{\ell kr} - \underset{\sim}{\bar{x}})'$	$gbn-1$

آزمون فرض:

$$\begin{cases} H_0: \underset{\sim}{\gamma}_{11} = \underset{\sim}{\gamma}_{12} = \cdots = \underset{\sim}{\gamma}_{gb} = 0 \\ H_1: \underset{\sim}{\gamma}_{\ell k} \neq 0 \end{cases}$$

آماره‌ی آزمون:

$$\Lambda^* = \frac{|SSP_{res}|}{|SSP_{int} + SSP_{res}|}$$

برای نمونه های بزرگ:

$$-\left[gb(n-1) - \frac{p+1-(g-1)(b-1)}{2}\right] ln\, \Lambda^* > \mathcal{X}^2_{(g-1)(b-1)p,\alpha} \Longrightarrow \quad RH_0$$

عدم وجود اثرات عامل 1:

$$H_0: \underset{\sim}{\tau}_1 = \cdots = \underset{\sim}{\tau}_g = 0 \quad , \quad \Lambda^* = \frac{|SSP_{res}|}{|SSP_{fac1} + SSP_{res}|}$$

$$-\left[gb(n-1) - \frac{p+1-(g-1)}{2}\right] ln\, \Lambda^* > \mathcal{X}^2_{(g-1)p,\alpha} \Longmapsto \quad RH_0$$

عدم وجود اثرات عامل 2:

$$H_0: \underset{\sim}{\beta}_1 = \cdots = \underset{\sim}{\beta}_b = 0 \quad , \quad \Lambda^* = \frac{|SSP_{res}|}{|SSP_{fac2} + SSP_{res}|}$$

$$-\left[gb(n-1) - \frac{p+1-(b-1)}{2}\right] ln\, \Lambda^* > \mathcal{X}^2_{(b-1)p,\alpha} \Longmapsto \quad RH_0$$

مثال9.6)

شرایط بهینه برای خروج فیلم پلاستیکی با استفاده از روشی که عمل تکمیلی نامیده می‌شود بررسی می‌شود. به خاطر این مطالعه سه پاسخ مقاومت= X_1، براق بودن= X_2 و کدر بودن= X_3 در دو سطح عامل نرخ خروج و میزان یک ماده‌ی اضافی دیگر اندازه گیری شد. اندازه ها را $n = 5$ بار در هر ترکیب سطوح عامل تکرار نمودیم و داده ها را در جدول زیر نمایش داده ایم.

جدول داده های فیلم پلاستیکی

	میزان جمعی بودن:عامل2					
	پایین(1٪)			بالا(1.5٪)		
	x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3
عامل1:تغییر درنرخ	[6.5	9.5	4.4]	[6.9	9.1	5.7]
	[6.2	9.9	6.4]	[7.2	10.0	2.0]
	[5.8	9.6	3.0]	[6.9	9.9	3.9]
	[6.5	9.6	4.1]	[6.1	9.5	1.9]
	[6.5	9.2	0.8]	[6.3	9.4	5.7]
	x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3
	[6.7	9.1	2.8]	[7.1	9.2	8.4]
	[6.6	9.3	4.1]	[7.0	8.8	5.2]

[7.2 9.7 6.9]	[7.2 8.3 3.8]	
[7.5 10.1 2.7]	[7.1 8.4 1.6]	
[7.6 9.2 1.9]	[6.8 8.5 3.4]	

محاسبه‌ی ماتریس‌های مجموع مربعات و حاصل‌ضرب های متقاطع مطابق $MANOVA$ زیر است:

درجات آزادی	مجموع مربعات	منبع تغییرات
1	$\begin{bmatrix} 1.7405 & -1.5045 & 0.8555 \\ & 1.3005 & -0.7395 \\ & & 0.4205 \end{bmatrix}$	تغییر در نرخ 1: عامل 1
1	$\begin{bmatrix} 0.7605 & 0.6825 & 1.9305 \\ & 0.6125 & 1.7325 \\ & & 4.9005 \end{bmatrix}$	میزان جمعی بودن: عامل 2
1	$\begin{bmatrix} 0.0005 & 0.0165 & 0.0445 \\ & 0.5445 & 1.4685 \\ & & 3.9605 \end{bmatrix}$	اثر متقابل
16	$\begin{bmatrix} 1.7640 & 0.0200 & -3.0700 \\ & 2.6280 & -0.5520 \\ & & 64.9240 \end{bmatrix}$	باقیمانده
19	$\begin{bmatrix} 4.2655 & -0.7855 & -0.2395 \\ & 5.0855 & 1.9095 \\ & & 74.2055 \end{bmatrix}$	کل

برای آزمون کردن داریم:

$$\Lambda^* = \frac{|SSP_{res}|}{|SSP_{int} + SSP_{res}|} = \frac{275.7098}{354.7906} = 0.7771$$

برای $(g-1)(b-1) = 1$:

$$F = \left(\frac{1-\Lambda^*}{\Lambda^*}\right)\frac{(gb(n-1)-p+1)/2}{(|(g-1)(b-1)-p|+1)/2}$$

دارای یک توزیع F دقیق با $v_1 = |(g-1)(b-1)-p|+1$ و $v_1 = gb(n-1)-p+1$ درجه‌ی آزادی است. برای این مثال داریم:

$$F = \left(\frac{1-0.7771}{0.7771}\right)\frac{(2(2)(4)-3+1)/2}{(|1(1)-3|+1)/2} = 1.34$$

و $F_{3,14,5\%} = 3.34$. چون $F = 1.34 < F_{3,14,5\%} = 3.34$. لذا فرض $H_0: \underset{\sim}{\gamma}_{11} = \underset{\sim}{\gamma}_{12} = \underset{\sim}{\gamma}_{21} = \underset{\sim}{\gamma}_{22} = 0$ (عدم وجود اثرات متقابل) را نمی‌توان رد کرد.

برای آزمون اثرات عامل 1 و عامل 2 به:

$$\Lambda^*{}_1 = \frac{|SSP_{res}|}{|SSP_{fac1} + SSP_{res}|} = \frac{275.7098}{722.0212}$$

و

$$\Lambda^*{}_2 = \frac{|SSP_{res}|}{|SSP_{fac2} + SSP_{res}|} = \frac{275.7098}{527.1347} = 0.5230$$

برای $g-1=1$ و $b-1=1$، داریم:

$$F_1 = \left(\frac{1-\Lambda^*{}_1}{\Lambda^*{}_1}\right)\frac{(gb(n-1)-p+1)/2}{(|(g-1)-p|+1)/2}$$

و

$$F_2 = \left(\frac{1-\Lambda^*{}_2}{\Lambda^*{}_2}\right)\frac{(gb(n-1)-p+1)/2}{(|(b-1)-p|+1)/2}$$

دارای توزیع F با درجات آزادی به ترتیب $v_1 = |(g-1)-p|+1$ و $v_2 = gb(n-1)-p+1$ و $v_1 = |(b-1)-p|+1$ و $v_2 = gb(n-1)-p+1$ است.

برای این مثال:

$$F_1 = \left(\frac{1-0.3819}{0.3819}\right)\frac{(16-3+1)/2}{(|1-3|+1)/2} = 7.55$$

$$F_2 = \left(\frac{1-0.5230}{0.5230}\right)\frac{(16-3+1)/2}{(|1-3|+1)/2} = 4.26$$

بنابراین از مطالب بالا داریم $F_{3,14,5\%} = 3.34$. داریم: $F_1 = 7.55 > F_{3,14,5\%} = 3.34$ و در نتیجه (عدم وجود اثرات عامل 1) $H_0: \underset{\sim}{\tau}_1 = \underset{\sim}{\tau}_2 = 0$ را در سطح 5% رد می‌کنیم. به‌طور مشابه $F_2 = 4.26 > F_{3,14,5\%} = 3.34$ و (عدم وجود اثرات عامل 2) $H_0: \underset{\sim}{\beta}_1 = \underset{\sim}{\beta}_2 = 0$ را در سطح 5% رد می‌کنیم.

نتیجه می‌گیریم که تغییر در نرخ خروج و میزان ماده‌ی اضافی هر دو روی پاسخ‌ها تاثیر می‌گذارند و این کار را یک روش جمعی انجام می‌دهند.

حل مثال فوق با R)

ابتدا داده ها را به‌صورت زیر فراخوانی می‌کنیم:

```
> da=read.table("T6-4.dat")
> da
  V1 V2  V3   V4  V5
1   0  0 6.5  9.5 4.4
2   0  0 6.2  9.9 6.4
3   0  0 5.8  9.6 3.0
4   0  0 6.5  9.6 4.1
5   0  0 6.5  9.2 0.8
6   0  1 6.9  9.1 5.7
7   0  1 7.2 10.0 2.0
8   0  1 6.9  9.9 3.9
9   0  1 6.1  9.5 1.9
10  0  1 6.3  9.4 5.7
11  1  0 6.7  9.1 2.8
```

```
12  1  0 6.6  9.3 4.1
13  1  0 7.2  8.3 3.8
14  1  0 7.1  8.4 1.6
15  1  0 6.8  8.5 3.4
16  1  1 7.1  9.2 8.4
17  1  1 7.0  8.8 5.2
18  1  1 7.2  9.7 6.9
19  1  1 7.5 10.1 2.7
20  1  1 7.6  9.2 1.9
> y=cbind(da[,3],da[,4],da[,5])
> fac1=factor(da[,1])
> fac1
 [1] 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
Levels: 0 1
> fac2=factor(da[,2])
> m2=manova(y~fac1+fac2+fac1*fac2)
> m2
Call:
  manova(y ~ fac1 + fac2 + fac1 * fac2)
Terms:
```

ماتریس‌های مجموع مربعات و درجات آزادی عامل 1 و عامل 2 و اثر متقابل و باقیمانده به‌صورت زیر می‌باشد:

```
              fac1    fac2 fac1:fac2 Residuals
resp 1      1.7405  0.7605    0.0005    1.7640
resp 2      1.3005  0.6125    0.5445    2.6280
```

```
resp 3          0.4205  4.9005    3.9605   64.9240
Deg. of Freedom       1       1        1        16

Residual standard error: 0.3320392 0.4052777 2.014386
Estimated effects may be unbalanced
> summary(m2,test="Wilks")
          Df  Wilks approx F num Df den Df   Pr(>F)
fac1       1 0.3819   7.5543      3     14 0.003034 **
fac2       1 0.5230   4.2556      3     14 0.024745 *
fac1:fac2  1 0.7771   1.3385    3   14 0.301782
Residuals 16
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

> summary(m2,test="Pillai")
```

همچنین مقادیر آماره های F_1 و F_2 به‌صورت زیر می‌باشند:

```
          Df Pillai approx F num Df den Df   Pr(>F)
fac1       1 0.6181   7.5543      3     14 0.003034 **
fac2       1 0.4770   4.2556      3     14 0.024745 *
fac1:fac2  1 0.2229   1.3385      3     14 0.301782
Residuals 16
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

فصل ششم : مولفه های اصلی

مولفه های اصلی جامعه:

در عمل برای مطالعه‌ی کل سیستم در نظر گرفتن p مولفه جهت بررسی مدنظر است.

اما می‌توان با تحلیل مولفه‌ی اصلی با تعداد مولفه‌ی کمتر یعنی k مولفه‌ی اصلی کل سیستم را مورد مطالعه قرار داد. پس تحلیل مولفه‌ی اصلی وسیله ای برای رسیدن به اهداف مد نظر یک مطالعه است که هدف از استفاده از مولفه های اصلی:1-کاهش حجم داده ها و 2-تعبیر و تفسیر صحیح آن‌هاست و براساس ساختار واریانس-کواریانس و به کمک چند ترکیب خطی از متغیرهای اصلی سروکار دارد.

تعریف:

فرض کنید $\sum$ ماتریس کواریانس بردار تصادفی $\underset{\sim}{X}' = (X_1, \ldots, X_p)$ باشد و $\sum$ دارای زوج مقدار ویژه - بردار ویژه $(\lambda_1, \underset{\sim}{e}_1), \ldots, (\lambda_p, \underset{\sim}{e}_p)$ باشد که می‌دانیم:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_p \geq 0$$

مولفه‌ی اصلی iام با :

$$\underset{\sim}{Y}_i = \underset{\sim}{e}'_i \underset{\sim}{X} = e_{1i}X_1 + e_{2i}X_2 + \cdots e_{pi}X_p \qquad i = 1, \ldots, p$$

نشان داده می‌شود و داریم:

$$\begin{cases} Var\left(\underset{\sim}{Y}_i\right) = \underset{\sim}{e}'_i \sum \underset{\sim}{e}_i = \lambda_i & i = 1, \ldots, p \\ Cov(\underset{\sim}{Y}_i, \underset{\sim}{Y}_k) = e'_i \sum e_k = 0 & i \neq k \end{cases}$$

اثبات)

چون:
$$\underset{\sim}{e}'_i \underset{\sim}{e}_i = 1 \quad , \quad e'_i e_k = 0 \qquad (i \neq k)$$

لذا داریم:

$$\sum \underset{\sim}{e_k} = \lambda_k \underset{\sim}{e_k} \quad \Longrightarrow \quad e'_i \sum e_k = e'_i \lambda_k e_k$$

$$\Sigma \underset{\sim}{e}'_i = \underset{\sim}{\lambda}_i \underset{\sim}{e}_i \quad \Longrightarrow \quad \underset{\sim}{e}'_i \Sigma \underset{\sim}{e}_i = \underset{\sim}{e}'_i \lambda_i \underset{\sim}{e}_i = \lambda_i$$

نکته:

از تعریف بالا نتیجه می‌شود که مولفه های اصلی ناهمبسته اند و واریانس آنها برابر مقادیر ویژه Σ است.

نکته:

فرض کنید $\underset{\sim}{X}' = (X_1, \dots, X_p)$ دارای ماتریس کواریانس Σ با زوج مقادیر ویژه- بردار ویژه $(\lambda_1, \underset{\sim}{e}_1), \dots, (\lambda_p, \underset{\sim}{e}_p)$ است. فرض کنید:

$$\underset{\sim}{Y}_1 = \underset{\sim}{e}'_p \underset{\sim}{X}, \dots, \underset{\sim}{Y}_p = \underset{\sim}{e}'_p \underset{\sim}{X}$$

p مولفه‌ی اصلی باشد، آن‌گاه می دانیم:

$$\sum_{i=1}^{p} Var(X_i) = \sigma_{11} + \cdots + \sigma_{pp} = tr(\Sigma) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = \sum_{i=1}^{p} Var(Y_i)$$

قبلا تعریف کردیم:

$$\sigma_{11} + \cdots + \sigma_{pp} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \qquad \text{واریانس کل}$$

پس:

سهم کل واریانس جامعه‌ی مربوط به مولفه‌ی اصلی Kام برابر است با:

$$\frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_p} \quad , \qquad k = 1,2, \dots, p$$

اگر برای p بزرگ بیشتر واریانس کل جامعه مثلا 80 تا 90 درصد آن را بتوان به سه مولفه‌ی اول نسبت داد، در آن‌صورت این مولفه ها را بدون اینکه اطلاعات زیادی از دست بدهیم می‌توان جایگزین p متغیر اول کرد.

نکته:

اگر $\underset{\sim}{Y}_1 = \underset{\sim}{e}'_p \underset{\sim}{X}, \dots, \underset{\sim}{Y}_p = \underset{\sim}{e}'_p \underset{\sim}{X}$ مولفه های اصلی به دست آمده از ماتریس کواریانس Σ باشد،

آن‌گاه:

$$\rho_{\underset{\sim}{Y}_i, \underset{\sim}{X}_k} = \frac{e_{ki}\sqrt{\lambda_i}}{\sqrt{\sigma_{kk}}} \qquad i, k = 1, \dots, p$$

مثال 1.7)

فرض کنید متغیرهای تصادفی X_1 و X_2 و X_3 دارای ماتریس کواریانس زیر باشند:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

زوج‌های مقدار ویژه ــ بردار ویژه، عبارتند از:

$$|A - \lambda I| = 0 \implies \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 5-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\lambda_1 = 5.83 \quad , \quad \underset{\sim}{e}'_1 = [0.383 , -0.924 , 0]$$

$$\lambda_2 = 2 \quad , \quad \underset{\sim}{e}'_2 = [0 , 0 , 1]$$

$$\lambda_3 = 0.17 \quad , \quad \underset{\sim}{e}'_3 = [0.924 , 0.383 , 0]$$

بنابراین مولفه های اصلی به‌صورت زیر خواهند بود:

$$Y_1 = \underset{\sim}{e}'_1 X = 0.383X_1 - 0.924X_2$$

$$Y_2 = \underset{\sim}{e}'_2 X = X_3$$

$$Y_3 = \underset{\sim}{e}'_3 X = 0.924X_1 + 0.383X_2$$

متغیر X_3 یکی از مولفه های اصلی است، زیرا با دو متغیر دیگر ناهمبسته است.

همچنین داریم:

$$Var(\underset{\sim}{Y}_1) = Var(0.383X_1 - 0.924X_2) = 5.83 = \lambda_1$$

$$Cov(\underset{\sim}{Y}_1 , \underset{\sim}{Y}_2) = Cov(0.383X_1 - 0.924X_2, X_3) = 0.383(0) - (0.924)(0) = 0$$

سهم کل واریانس که به وسیله‌ی اولین مولفه‌ی اصلی به حساب می آید، به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}=\frac{5.83}{8}=0.73$$

سهم واریانس جامعه که با دو مولفه‌ی اول به حساب می آید، نیز به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{5.83+2}{8}=0.98$$

بنابراین:

$$\rho_{\underset{\sim}{Y}_1,\underset{\sim}{X}_1}=\frac{e_{11}\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\sigma_{11}}}=\frac{0.383\sqrt{5.83}}{\sqrt{1}}=0.925$$

$$\rho_{\underset{\sim}{Y}_1,\underset{\sim}{X}_2}=\frac{e_{21}\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\sigma_{22}}}=\frac{-0.924\sqrt{5.83}}{\sqrt{5}}=-0.998$$

نتیجه می‌گیریم که اهمیت هریک از متغیرهای X_1 و X_2 در اولین مولفه‌ی اصلی تقریبا یکسان است. همچنین:

$$\rho_{\underset{\sim}{Y}_2,\underset{\sim}{X}_1}=\rho_{\underset{\sim}{Y}_2,\underset{\sim}{X}_2}=0 \quad , \quad \rho_{\underset{\sim}{Y}_2,\underset{\sim}{X}_3}=\frac{\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\sigma_{33}}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$$

چون مولفه‌ی سوم بی اهمیت است لذا از بقیه‌ی همبستگی ها می‌توان صرف نظر کرد.

به‌دست آوردن مولفه های اصلی از متغیرهای استاندارد:

مولفه های اصلی را می‌توان برای متغیرهای استاندارد شده به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$Z_1=\frac{X_1-\mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}},\dots\dots\dots,Z_p=\frac{X_p-\mu_p}{\sqrt{\sigma_{pp}}}$$

با نماد ماتریسی می‌توان نوشت:

$$\underset{\sim}{Z}=(V^{\frac{1}{2}})^{-1}(\underset{\sim}{X}-\underset{\sim}{\mu}) \quad , \quad Z=\begin{bmatrix} z_1\\ \vdots \\ z_p\end{bmatrix}$$

$$V=diag(\sigma_{11},\dots,\sigma_{pp})=\begin{bmatrix}\sqrt{\sigma_{11}} & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \sqrt{\sigma_{pp}}\end{bmatrix}$$

که قبلا دیدیم:

$$V^{\frac{1}{2}}\rho V^{\frac{1}{2}}=\Sigma \qquad , \qquad \begin{cases}\rho=(V^{\frac{1}{2}})^{-1}\Sigma(V^{\frac{1}{2}})^{-1}\\ E(\underset{\sim}{Z})=0\end{cases} \qquad , \quad Cov(Z)=\rho$$

پس مولفه های اصلی Z را می‌توان از بردارهای ویژه ماتریس همبستگی ρ به‌دست آورد.

نتیجه:

مولفه‌ی اصلی iام متغیرهای استاندارد شده $\underset{\sim}{Z}'=[Z_1,\dots,Z_p]$ با $Cov(Z)=\rho$ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\underset{\sim}{Y}_i=\underset{\sim}{e}'_i\underset{\sim}{Z}=\underset{\sim}{e}'_i(V^{\frac{1}{2}})^{-1}(\underset{\sim}{X}-\underset{\sim}{\mu}) \qquad i=1,\dots,p$$

و:

$$\rho_{\underset{\sim}{Y}_i,\underset{\sim}{Z}_k}=e_{ki}\sqrt{\lambda_i} \qquad , \qquad \sum_{i=1}^{p}Var(Y_i)=\sum_{i=1}^{p}Var(Z_i)=p$$

در این حالت:

$(\lambda_1,e_1),(\lambda_2,e_2),\dots,(\lambda_p,e_p)$ زوج های مقدار ویژه _بردار ویژه ρ با شرط زیر هستند:

$$\lambda_1\ge\lambda_2\ge\cdots\ge\lambda_p\ge 0$$

می‌دانیم واریانس کل جامعه متغیرهای استاندارد شده برابر p یعنی مجموع اعضای قطری ماتریس ρ است.

پس داریم:

$$\text{سهم کل واریانس جامعه مربوط به مولفه اصلی } k\text{ام}=\frac{\lambda_k}{p} \qquad k=1,2,\dots,p$$

مثال2.7)

ماتریس کوواریانس و ماتریس همبستگی آن را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\Sigma=\begin{bmatrix}1&4\\4&100\end{bmatrix}, \quad \rho=\begin{bmatrix}1&0.4\\0.4&1\end{bmatrix}$$

زوج‌های مقدار ویژه_بردار ویژه Σ عبارتند از:

$$\lambda_1=100.16 \quad , \quad e_1'=[0.040,0.999]$$

$\lambda_2 = 0.84 \quad , \quad e_2' = [0.999, -0.040]$

به‌طور مشابه زوج‌های مقدار ویژه_ بردار ویژه حاصل از ρ ، عبارتند از:

$\lambda_1 = 1 + \rho = 1.4 \quad , \quad e_1' = [0.707, 0.707]$

$\lambda_2 = 1 - \rho = 0.6 \quad , \quad e_2' = [0.707, -0.707]$

مولفه های اصلی مربوطه به‌صورت زیر به‌دست می آیند:

بر اساس $\sum$:

$Y_1 = 0.040X_1 + 0.999X_2 \quad , \quad Y_2 = 0.999X_1 - 0.040X_2$

و بر اساس ρ:

$$Y_1 = 0.707Z_1 + 0.707Z_2 = 0.707\left(\frac{X_1 - \mu_1}{1}\right) + 0.707\left(\frac{X_2 - \mu_2}{10}\right)$$

$$= 0.707(X_1 - \mu_1) + 0.707(X_2 - \mu_2)$$

$$Y_2 = 0.707Z_1 - 0.707Z_2 = 0.707\left(\frac{X_1 - \mu_1}{1}\right) - 0.707\left(\frac{X_2 - \mu_2}{10}\right)$$

$$= 0.707(X_1 - \mu_1) - 0.707(X_2 - \mu_2)$$

X_2 به خاطر واریانس بزرگی که دارد اولین مولفه‌ی اصلی تعیین شده از $\sum$ را کاملا تحت تاثیر قرار می‌دهد. علاوه بر این مولفه‌ی اصلی یک نسبت

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{100.16}{101} = 0.992$$

از واریانس کل جامعه را بیان می‌کند. در عین حال وقتی متغیرهای X_1 و X_2 را استاندارد می‌کنیم متغیرهای حاصل سهمی یکسان در مولفه های اصلی تعیین شده از ρدارند.

بنابراین داریم:

$$\rho_{Y_1, Z_1} = e_{11}\sqrt{\lambda_1} = 0.707\sqrt{1.4} = 0.837$$

و

$$\rho_{Y_1,Z_2} = e_{21}\sqrt{\lambda_1} = 0.707\sqrt{1.4} = 0.837$$

در این حالت اولین مولفه‌ی اصلی یک نسبت

$$\frac{\lambda_1}{p} = \frac{1.4}{2} = 0.7$$

از واریانس کل جامعه(استاندارد شده)را بیان می‌کند.

می‌دانیم در بعضی مسایل که مقیاس‌های متغیرها با هم خیلی تفاوت دارند باید حتما استاندارد شوند. پس مواقع لازم است از متغرهای استاندارد شده استفاده شود و در نتیجه نیاز به مولفه های اصلی داریم که از متغیرها به-دست می آیند.

نکته:

در عمل $\sum$ مجهول است و اگر $S = \{S_{ik}\}$ ماتریس واریانس نمونه $p \times p$ باشد مقادیر ویژه و بردارهای ویژه S را به‌دست می آورید و مولفه‌ی اصلی نمونه iام با:

$$\underset{\sim}{\hat{Y}}_{i} = \underset{\sim}{\hat{e}}'_{i}\underset{\sim}{X} \qquad i = 1, \dots, p$$

داده می‌شود که : $\hat{\lambda}_1 \geq \cdots \geq \hat{\lambda}_p \geq 0$

و:

$$V(\hat{Y}_k) = \hat{\lambda}_k \qquad , \qquad Cov(\hat{Y}_i, \hat{Y}_k) = 0 \qquad i \neq k$$

$$\sum_{i=1}^{P} S_{ii} = \hat{\lambda}_1 + \cdots + \hat{\lambda}_p \qquad , \qquad r_{\hat{Y}_i, X_k} = \frac{\hat{e}_{ki}\sqrt{\hat{Y}_i}}{\sqrt{S_{kk}}} \qquad i, k = 1, \dots, p$$

و به‌همین ترتیب برای مشاهدات استاندارد شده از ماتریس کواریانس R استفاده می‌شود.

توجه: مسایل زیر از کتاب ذکر شده در چکیده انتخاب شده است.

مثال 1.6 صفحه‌ی 276 با نرم افزار R)

(این مثال در فصل 6 این پروژه به‌طور کامل بررسی و تحلیل شده است.)

```
> dim(x)
[1] 11 4
> x1=x[,1:2]
> x2=x[,3:4]

> source("Behrens.R")
> Behrens(x1,x2)

[1] "Estimate of v: "
[1] 18.7012
[1] "Test result:"

[,1]
Test-T2 12.66480498
p.value 0.01028599
```

نتیجه: چون مقدار معنی داری کوچکتر از 0.05 است بنابراین فرض H_0 رد می‌شود.

مثال فوق از روش باکس مولر:

```
> source("Box_M.R")
> mm=Box_M(y,nv)
[1] "Test result:"
[,1]
Box.M-C 4.0572053
p.value 0.2553529
> names(mm)
[1] "Box.M" "Test.Stat" "p.value"
```

مثال 6.6 صفحه‌ی 298 با نرم افزار R)

نمونه های مستقل زیر را در نظر می‌گیریم.

جامعه1)9,6,9 , جامعه 2)2,0 , جامعه 3)2,1,3

مطلوبست بررسی $ANOVA$؟

ابتدا داده ها را به‌صورت زیر فراخوانی می‌کنیم:

```
> x=c(1,1,1,2,2,3,3,3)
> y=c(9,6,9,0,2,3,1,2)
> g1=factor(x)
> g1

[1] 1 1 1 2 2 3 3 3

Levels: 1 2 3

> help(aov)
> m1=aov(y~g1)
> m1

Call:
aov(formula = y ~ g1)

Terms:
g1 Residuals
Sum of Squares 78 10
Deg. of Freedom 2 5

Residual standard error: 1.414214
Estimated effects may be unbalanced
```

خروجی بالا مجموع مربعات تیمار را 78 و درجه‌ی آزادی آن را 2 نشان می‌دهد. همچنین مجموع مربعات باقیمانده را 10 و درجه‌ی آزادی آن را 5 نشان می‌دهد. همچنین خطای استاندارد باقیمانده نیز مشاهده می‌شود.

```
> summary(m1)
Df Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
g1 2 78 39 19.5 0.004353 **
Residuals 5 10 2
```

مشاهده می‌کنیم مقدار آماره‌ی F برابر 19.5 می‌باشد.

```
> source("Box_M.R")
> mm=Box_M(y,nv)
[1] "Test result:"
```

```
[,1]
Box.M-C 4.0572053
p.value 0.2553529
> names(mm)
[1] "Box.M" "Test.Stat" "p.value"
```

مقدار معنی داری نیز 0.255 می‌باشد که چون کوچکتر از 0.99 می‌باشد(در سطح 1٪) فرض H_0 رد می-شود.(نبودن اثر تیمار رد می‌شود).

تمرین 21.6 صفحه‌ی 339 با نرم افزار *R*)

این تمرین را با استفاده از مبحث آنالیز مقطعی آزمون کنید.

```
> source("profile.R")
> da=read.table(``T6-14.DAT'')
> x1=da[1:30,1:4]
> x2=da[31:60,1:4]
> cbind(x1,x2)
   V1 V2  V3 V4 V1 V2 V3 V4
1   2   3   5   5   4    4   5   5
2    5  5    4    4    4     5    5     5
3    4    5     5     5   4     4     5     5
4 4 3 4 4 4 5 5 5
5 3 3 5 5 4 4 5 5
6 3 3 4 5 3 3 4 4
7 3 4 4 4 4 3 5 4
8 4 4 5 5 3 4 5 5
9 4 5 5 5 4 4 5 4
10 4 4 3 3 3 4 4 4
11 4 4 5 5 4 5 5 5
12 5 5 4 4 5 5 5 5
13 4 4 4 4 4 4 5 5
```

14 4 3 5 5 4 4 4 4
15 4 4 5 5 4 4 5 5

16 3 3 4 5 3 4 4 4
17 4 5 4 4 5 5 5 5
18 5 5 5 5 4 5 4 4

19 5 5 4 4 3 4 4 4
20 4 4 4 4 5 3 4 4
21 4 4 4 4 5 3 4 4

22 4 4 4 4 4 5 4 4
23 3 4 5 5 2 5 5 5
24 5 3 5 5 3 4 5 5

25 5 5 3 3 4 3 5 5
26 3 3 4 4 4 4 4 4
27 4 4 4 4 4 4 5 5

28 3 3 5 5 3 4 4 4
29 4 4 3 3 4 4 5 4
30 4 4 5 5 4 4 5 5

> profile(x1,x2)

بررسی موازی بودن مقاطع:

[1] "Are the profiles parallel?"

[,1]
Test-T2 8.01617
p.value 0.06256

چون سطح معنی داری بزرگتر از 0.05 شده است بنابراین فرض H_0 پذیرفته می‌شود و این مقاطع برای زن و شوهر موازیند.

بررسی منطبق بودن مقاطع:

[1] "Are the profiles coincident?"
[,1] [,2]

Test-T2 8.01617 1.5328
p.value 0.06256 0.2207

با توجه به سطح معنی داری که بزرگتر از 0.05 شده است نتیجه می‌شود مقاطع تطابق دارند.

[1] "Are the profiles level?"
[,1] [,2] [,3]

Test-T2 8.01617 1.5328 2.482e+01
p.value 0.06256 0.2207 1.554e-04

[,1] [,2] [,3]
Test-T2 8.01617132 1.5327696 2.482071e+01
p.value 0.06255945 0.2206853 1.554491e-04

تمرین 17.7 صفحه‌ی 426 کتاب با نرم افزار R)

مطلوبست دستورات رگرسیونی؟

داده ها با دستور زیر فراخوانی می‌شوند:

> setwd("C:/Users/rst/teaching/ama")
> da=read.table("T7-5.DAT",header=T)

> da

z1 z2 z3 z4 z5 y

1 0.375 3.13 60.0 40 2.00 101
2 1.000 3.13 76.8 30 1.99 141

3 1.000 3.13 60.0 20 2.00 96
4 1.000 3.13 60.0 20 1.98 125

5 1.625 3.13 43.2 10 2.01 43
6 1.625 3.13 60.0 20 2.00 16

7 1.625 3.13 60.0 20 2.02 188
8 0.375 5.00 76.8 10 2.01 10

9 1.000 5.00 43.2 10 1.99 3
10 1.000 5.00 43.2 30 2.01 386

11 1.000 5.00 100.0 20 2.00 45
12 1.625 5.00 76.8 10 1.99 2

13 0.375 1.25 76.8 10 2.01 76
14 1.000 1.25 43.2 10 1.99 78

15 1.000 1.25 76.8 30 2.00 160

```
16 1.000 1.25 60.0 0 2.00 3
17 1.625 1.25 43.2 30 1.99 216
18 1.625 1.25 60.0 20 2.00 73
19 0.375 3.13 76.8 30 1.99 314
20 0.375 3.13 60.0 20 2.00 170
> y=log(da$y)
> x=as.matrix(da[,1:5])
> x
      z1  z2  z3  z4  z5
[1,] 0.375 3.13 60.0 40 2.00
[2,] 1.000 3.13 76.8 30 1.99
[3,] 1.000 3.13 60.0 20 2.00
[4,] 1.000 3.13 60.0 20 1.98
[5,] 1.625 3.13 43.2 10 2.01
[6,] 1.625 3.13 60.0 20 2.00
[7,] 1.625 3.13 60.0 20 2.02
[8,] 0.375 5.00 76.8 10 2.01
[9,] 1.000 5.00 43.2 10 1.99
[10,] 1.000 5.00 43.2 30 2.01
[11,] 1.000 5.00 100.0 20 2.00
[12,] 1.625 5.00 76.8 10 1.99
[13,] 0.375 1.25 76.8 10 2.01
[14,] 1.000 1.25 43.2 10 1.99
[15,] 1.000 1.25 76.8 30 2.00
[16,] 1.000 1.25 60.0 0 2.00
[17,] 1.625 1.25 43.2 30 1.99
[18,] 1.625 1.25 60.0 20 2.00
[19,] 0.375 3.13 76.8 30 1.99
[20,] 0.375 3.13 60.0 20 2.00
```

پکیج زیر برای مقایسه‌ی تمام مدل‌های رگرسیونی به‌کار می‌رود.

```
> library(leaps)
> help(leaps)
>
> leaps(x,y,nbest=3)
$which
      1     2     3    4    5
1 FALSE FALSE FALSE TRUE FALSE
1 FALSE TRUE FALSE FALSE FALSE
1 TRUE FALSE FALSE FALSE FALSE
2 FALSE TRUE FALSE TRUE FALSE
2 FALSE FALSE FALSE TRUE TRUE
2 FALSE FALSE TRUE TRUE FALSE
3 FALSE TRUE FALSE TRUE TRUE
3 TRUE TRUE FALSE TRUE FALSE
3 FALSE TRUE TRUE TRUE FALSE
4 TRUE TRUE FALSE TRUE TRUE
4 FALSE TRUE TRUE TRUE TRUE
4 TRUE TRUE TRUE TRUE FALSE
5 TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE

$label
[1] "(Intercept)" "1" "2" "3" "4"
[6] "5"

$size
[1] 2 2 2 3 3 3 4 4 4 5 5 5 6

$Cp
[1] 4.086863 22.044063 24.296971 2.604347 4.670782 5.514947 2.879936
[8] 4.148842 4.440754 4.429345 4.699115 5.746078 6.000000

> > leaps(x,y,nbest=1)

$which
```

```
      1    2   3    4    5
1 FALSE FALSE FALSE TRUE FALSE
2 FALSE TRUE FALSE TRUE FALSE
3 FALSE TRUE FALSE TRUE TRUE
4 TRUE TRUE FALSE TRUE TRUE
5 TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE

$label
[1] "(Intercept)" "1" "2" "3" "4"
[6] "5"

$size
[1] 2 3 4 5 6

$Cp
[1] 4.086863 2.604347 2.879936 4.429345 6.000000
```

دستور زیر برای بررسی رگرسیون خطی ساده می‌باشد:

```
> x1=data.frame(x)
> nn=lm(y~.,data=x1)

> step(nn)
Start: AIC=7.58
y ~ z1 + z2 + z3 + z4 + z5

Df Sum of Sq RSS AIC

- z3 1 0.4917 16.523 6.1810

- z1 1 0.8006 16.832 6.5514
<none> 16.032 7.5768

- z5 1 1.9995 18.031 7.9275
- z2 1 3.9387 19.971 9.9705
- z4 1 24.5815 40.613 24.1673

Step: AIC=6.18
y ~ z1 + z2 + z4 + z5

Df Sum of Sq RSS AIC

- z1 1 0.5160 17.039 4.7960
```

```
<none> 16.523 6.1810

- z5 1 1.9690 18.492 6.4327
- z2 1 4.5731 21.097 9.0675
- z4 1 24.3922 40.916 22.3156

Step: AIC=4.8
y ~ z2 + z4 + z5

Df Sum of Sq RSS AIC
<none> 17.039 4.7960
- z5 1 1.9747 19.014 4.9890

- z2 1 4.3410 21.380 7.3349
- z4 1 25.8384 42.878 21.2524

Call:
lm(formula = y ~ z2 + z4 + z5, data = x1)

Coefficients:
(Intercept) z2 z4 z5
-64.4322 -0.3365 0.1175 33.5971

>
> m1=step(nn,trace=F)
> m1

Call:
lm(formula = y ~ z2 + z4 + z5, data = x1)

Coefficients:
(Intercept) z2 z4 z5
-64.4322 -0.3365 0.1175 33.5971

> m2=lm(y~z2+z4+z5,data=x1)
```

دستور زیر آزمون صفربودن تک تک ضرایب را نشان می‌دهد:

```
> summary(m2)

Call:
lm(formula = y ~ z2 + z4 + z5, data = x1)
```

که مقادیر کمینه و بیشینه و چارک‌ها را در خروجی زیر می‌بینیم:

```
Residuals:
```

Min 1Q Median 3Q Max
-1.7954 -0.7995 0.2129 0.6183 1.4406

Coefficients:
Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)

(Intercept) -64.43215 49.34720 -1.306 0.210121
z2 -0.33647 0.16666 -2.019 0.060573

z4 0.11754 0.02386 4.926 0.000152 ***
z5 33.59708 24.67298 1.362 0.192161

در قسمت زیرمقدار ضریب تعیین مدل و آماره F و آزمون معناداری مدل وسطح معناداری آن قابل مشاهده می-باشد:

Residual standard error: 1.032 on 16 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.6421, Adjusted R-squared: 0.575
F-statistic: 9.568 on 3 and 16 DF, p-value: 0.0007419