تعداد غلطهای چاپی در ۱۰۰ صفحه یک کتاب به شرح

زیر آورده شده است. آیا توزیع پواسون در سطح معنی‌دار ۰/۰۵ بر داده‌ها برازنده است.

تعداد غلطها i	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
تعداد صفحات o_i	۳۶	۴۰	۱۹	۲	۰	۲	۱

حل اگر X تعداد غلطهای چاپی در یک صفحه کتاب باشد آنگاه آزمون

$$\begin{cases} H_{\circ} : X \sim P(\mu) \\ H_{1} : X \sim P(\mu) \end{cases}$$

مورد نظر است. در ابتدا به وسیلهٔ مشاهدات، μ میانگین توزیع پواسون را برآورد می‌کنیم.

$$\hat{\mu}=\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i x_i=\frac{1}{100}\left[(0\times 36)+(1\times 40)+\ldots+(6\times 1)\right]=1$$

بنابراین تحت فرض $H_{\circ}$ داریم که $f_X(x)=\frac{e^{-1}1^x}{x!}=\frac{1}{x!}e^{-1} \qquad x=0,1,2,\ldots$

در نتیجه

$$p_{\circ}^{\circ}=P(X=0)=e^{-1}=0/3679 \;\Rightarrow\; e_{\circ}=np_{\circ}^{\circ}=100(0/3679)=36/79$$

$$p_{1}^{\circ}=P(X=1)=e^{-1}=0/3679 \;\Rightarrow\; e_{1}=36/79$$

با محاسبهٔ مقادیر دیگر e_i به طور مشابه، جدول زیر را به دست می‌آوریم.

i	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	جمع
o_i	۳۶	۴۰	۱۹	۲	۰	۲	۱	۱۰۰
e_i	۳۶/۷۹	۳۶/۷۹	۱۸/۳۹	۶/۱۳	۱/۵۳	۰/۳۱	۰/۰۵	۱۰۰

چون ۳ طبقهٔ آخر دارای مقادیر مورد انتظار کمتر از ۵ هستند پس ۴ طبقهٔ آخر را با هم ادغام می‌کنیم و جدول زیر به دست می‌آید

i	۰	۱	۲	بزرگتر از ۲	جمع
o_i	۳۶	۴۰	۱۹	۵	۱۰۰
e_i	۳۶/۷۹	۳۶/۷۹	۱۸/۳۹	۸/۰۲	۱۰۰

بنابراین

$$X^2=\sum_{i=0}^{3}\frac{(o_i-e_i)^2}{e_i}=\frac{(36-36/79)^2}{36/79}+\ldots+\frac{(5-8/02)^2}{8/02}=1/454$$

$$d.f.=k-1-t=4-1-1=2 \;\Rightarrow\; \chi^2_{1-\alpha}(k-1-t)=\chi^2_{0/95}(2)=5/99$$

چون $۵/۹۹=(k-۱-t)\chi^{۲}_{۱-\alpha} \not< X^{۲}=۱/۴۵۴$ پس $H_{۰}$ رد نمی‌شود، یعنی توزیع پواسون بر داده‌ها برازنده است.

مثال ۳.۳.۸ طول عمر ۱۰۰۰ لامپ یک کارخانه را اندازه‌گیری کرده‌ایم و اطلاعات جدول زیر به دست آمده است همچنین $\sum x_i=۲۰۰۰۰۰$.
سرپرست کارخانه ادعا دارد که طول عمر لامپها دارای توزیع نمایی است. آیا ادعـــای او را در سطح معنی‌دار ۰/۰۱ می‌پذیرید.

طول عمر t	تعداد
t≤۱۵۰	۵۴۳
۱۵۰<t≤۳۰۰	۲۵۸
۳۰۰<t≤۴۵۰	۱۲۰
۴۵۰<t≤۶۰۰	۴۸
۶۰۰<t≤۷۵۰	۲۰
۷۵۰<t	۱۱

حل اگر X طول عمر لامپ تولیدی کارخانه باشد آنگاه آزمون $\begin{cases} H_{۰}: X\sim E(\theta) \\ H_{۱}: X \not\sim E(\theta)\end{cases}$ مورد نظر است. در ابتدا θ میانگین توزیع نمایی را بوسیله مشاهدات برآورد می‌کنیم.

$$\hat{\theta}=\bar{x}=\frac{۱}{n}\sum x_i=\frac{۲۰۰۰۰۰}{۱۰۰۰}=۲۰۰$$

بنابراین تحت فرض $H_{۰}$ داریم که
$$f_X(x)=\frac{۱}{۲۰۰}e^{-\frac{۱}{۲۰۰}x} \qquad x>۰$$

در نتیجه

$$p_۱^{\circ}=P(X\leq ۱۵۰)=\int_{۰}^{۱۵۰}\frac{۱}{۲۰۰}e^{-\frac{۱}{۲۰۰}x}dx=۰/۵۲۷۷ \Rightarrow e_۱=۱۰۰۰p_۱^{\circ}=۵۲۷/۷$$

$$p_۲^{\circ}=P(۱۵۰<X\leq ۳۰۰)=\int_{۱۵۰}^{۳۰۰}\frac{۱}{۲۰۰}e^{-\frac{۱}{۲۰۰}x}dx=۰/۲۴۹۲ \Rightarrow e_۲=۲۴۹/۲$$

با محاسبهٔ مقادیر دیگر e_i به طور مشابه، جدول زیر را به دست می‌آوریم.

i	۱	۲	۳	۴	۵	۶	جمع
o_i	۵۴۳	۲۵۸	۱۲۰	۴۸	۲۰	۱۱	۱۰۰۰
e_i	۵۲۷/۷	۲۴۹/۲	۱۱۷/۷	۵۵/۶	۲۶/۳	۲۳/۵	۱۰۰۰

بنابراین

$$X^{۲}=\sum_{i=۱}^{۶}\frac{(o_i-e_i)^{۲}}{e_i}=\frac{(۵۴۳-۵۲۷/۷)^{۲}}{۵۲۷/۷}+\ldots=۹/۹۹۶$$

$$d.f.=k-۱-t=۶-۱-۱=۴ \Rightarrow \chi^{۲}_{۱-\alpha}(k-۱-t)=\chi^{۲}_{۰/۹۹}(۴)=۱۳/۳$$

چون $۱۳/۳=(k-۱-t)\chi^{۲}_{۱-\alpha}\not> X^{۲}=۹/۹۹۶$ پس $H_۰$ رد نمی‌شود، یعنی توزیع نمایی برازنده بر داده‌ها است.

۳۴ نمره‌های یک درس آمار در ترم بخصوصی به صورت زیر گزارش شده است

نمره	A	B	C	D	F
تعداد	۱۴	۱۸	۱۲	۲۰	۱۶

در سطح معنی‌دار ۰/۰۱ آیا توزیع یکنواخت بر داده‌ها برازنده است؟

۳۵ مشاهدات زیر تعداد قطعات خراب در ۱۵۰ کارتن محتوی قطعات تولید شده توسط یک کارخانه را نشان می‌دهد

تعداد قطعات خراب	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
تعداد کارتنها	۲۳	۳۹	۴۳	۲۳	۱۰	۷	۴	۱

آیا تعداد قطعات خراب در کارتنهای این کارخانه از توزیع پواسون پیروی می‌کند؟

۳۷ یک سکه را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا اینکه یک شیر بیاید. اگر X برابر تعداد پرتاب این سکه باشد، بعد از تکرار این آزمایش در ۲۵۶ بار، نتایج زیر حاصل می‌شود

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
تعداد پرتاب	۱۳۶	۶۰	۳۴	۱۲	۹	۱	۳	۱

آیا در سطح معنی‌دار ۰/۰۵ می‌توان ادعا کرد که توزیع هندسی با پارامتر $\frac{۱}{۲}$ بر داده‌ها برازنده است؟

۳۸ داده‌های زیر میزان محصول ذرت را در ۱۰۰ مزرعه نشان می‌دهد. اگر در این مزارع $\sum x_i = ۹۱۴۰۰$ و $s = ۳۳۱/۸$ باشد، آیا میزان محصول ذرت این مزارع از توزیع نرمال پیروی می‌کند؟

محصول (برحسب کیلوگرم)	تعداد مزارع
۹۹/۵ ≤ x < ۲۹۹/۵	۳
۲۹۹/۵ ≤ x < ۴۹۹/۵	۷
۴۹۹/۵ ≤ x < ۶۹۹/۵	۱۵
۶۹۹/۵ ≤ x < ۸۹۹/۵	۲۶
۸۹۹/۵ ≤ x < ۱۰۹۹/۵	۲۲
۱۰۹۹/۵ ≤ x < ۱۲۹۹/۵	۱۳
۱۲۹۹/۵ ≤ x < ۱۴۹۹/۵	۹
۱۴۹۹/۵ ≤ x < ۱۶۹۹/۵	۵