Subject :

Year . Month . Date . ( )

## مدل‌های خطی رتبه ناقص (غیر کامل)

$$\underset{n\times 1}{y} = \underset{n\times(k+1)}{X}\underset{(k+1)\times 1}{\beta} + \underset{n\times 1}{\varepsilon}$$

اگر $r(X) \neq k+1 \Rightarrow$ مدل رتبه ناقص غیر کامل

برای مثال اگر $n < k+1$ یعنی تعداد داده‌ها کوچکتر از $k+1$ است یا $n \leq k$

یا اگر متغیرهای مستقل اسمی و از نوع دوگانه باشند (متغیر صفر و یک) dummy variable

($x_i = 0$ یا 1)

(نشان‌گر) Indicator variable

(صفر و یک) Binary variable

مدل رتبه ناقص است چون رتبه ماتریس $X$ از رتبه $b$ کمتر است.

مدل‌های آنالیز واریانس که در آن متغیرهای مستقل از نوع صفر و یک (Dummy) هستند

مدل‌های آنالیز واریانس که در آن متغیرهای مستقل از نوع سطوح هستند

به کاربردی که منظور بررسی سرمایه‌گذاری مصرف‌کنندگان است: (شرکت)

شاغل را به چهار رده تقسیم کرده‌اند:

| کارگران | متخصص | صنعتگران | شاغل آزاد |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |

$y_i = \mu + \alpha_i$ اثر سطح

بدیهی است که در رسیدن به جدول ردی چنین داده‌ای درست نیست مدلی که در این حالت برازش می‌کند:

| $y$ سرمایه | $x$ |
|---|---|
| ⋮ | 1 |
| ⋮ | 2 |
| ⋮ | 3 |
| ⋮ | 4 |
| ⋮ | 3 |

$$E(y_i) = b_0 + b_1 x_i$$

or

مدل به صورت زیر درست نیست

$$E(y_1) = b_0 + b_1$$
$$E(y_2) = b_0 + 2b_1$$
$$E(y_3) = b_0 + 3b_1$$
$$E(y_4) = b_0 + 4b_1$$

$y_i = \mu + \alpha_i$ برازش درست‌تر مدل

$$E(y_3) - E(y_1) = E(y_4) - E(y_2) = 2(E(y_3) - E(y_2)) = 2b_1$$

PAPCO

Scanned with CamScanner

Subject:
Year. Month. Date. ( )

با علاوه بر بررسی شغل علاقمند به بررسی سطح تحصیلات هم باشیم برای هر فرد علاوه بر شغل تحصیلات هم اندازه‌گیری شده: (از نوع گسسته)

| | | | |
|---|---|---|---|
| | زیر دیپلم | دیپلم | فوق دیپلم و بالاتر |
| تعداد دانشجویان | 1 | 2 | 3 |

در این نوع مسائل معمولاً از آنالیز واریانس دو طرفه با داده‌های نامتوازن استفاده می‌کنیم.

**مثال** فرض کنید پژوهشگری می‌خواهد اثر دو دیتامین مختلف در دو دوز متفاوت را بر افزایش وزن جوجه‌ها اندازه‌گیری کند.

دیتامین: گسسته — دوز: گسسته — وزن: پیوسته

مدل با دو متغیر گسسته → مدل دو طرفه

$\alpha_1$ $\alpha_2$ → اثر دو دیتامین

$\beta_1$ $\beta_2$ → اثر دو دوز

$y$ → پاسخ (افزایش وزن)

(فرض کنیم متقاطع تکرار برابر 1 داریم)

(چهار جوجه) 4

شکل ماتریسی مدل:

$$\begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{21} \\ y_{22} \end{pmatrix} = \underset{4\times 5}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_{11} = \mu + \alpha_1 + \beta_1 + \varepsilon_{11} \\ y_{12} = \mu + \alpha_1 + \beta_2 + \varepsilon_{12} \\ y_{21} = \mu + \alpha_2 + \beta_1 + \varepsilon_{21} \\ y_{22} = \mu + \alpha_2 + \beta_2 + \varepsilon_{22} \end{cases}$$

$\mu$: بازتابی از دیتامین یا دوز یا این مقدار انتظاری است که بدون دیتامین خاص و دوز خاص در افزایش وزن حاصل می‌شود.

$\varepsilon$: خطای تصادفی

$$\underset{\sim}{y} = X\beta + \underset{\sim}{\varepsilon}$$

تبدیل شده به یک مدل رگرسیونی

$$rank(X) = 3$$

ستون دوم − ستون اول = ستون سوم

ستون چهارم − ستون اول = ستون پنجم

P4PCO

Scanned with CamScanner

Subject :

Year . Month . Date . ( )

من چون X رتبه کامل ستون مطالب قبلی را نمی توان به کار برد چون $(X'X)^{-1}$ وجود ندارد . و در این حالت فرض صفر بودن اثر خطا و ثابت بودن واریانس خطا نیز صدق نمی کند .

پس : $$E(y_{ij}) = \mu + \alpha_i + \beta_j$$

نکته: گاهی در این مدل ها شرط های وجود دارد که باعث تغییر ماتریس X خواهد شد که ممکن است

متغیر به رتبه کامل شدن مدل هم گردد . مثلاً $\alpha_1 = -\alpha_2$ & $\beta_1 = -\beta_2$

در اینصورت پارامتر کاهش می یابد و ممکن است ماتریس X هم رتبه کامل شود .

مثال

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & +1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}_{4\times 3} \begin{pmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}_{3\times 1}$$

PqPCO

Scanned with CamScanner

Subject :

Year . Month . Date . ( )

## بررسی حالت‌های رتبه ناقص (رتبه غیر کامل)

تاکنون در خصوص مدل‌های رگرسیونی فرض $Y = X\beta + \varepsilon$ صحبت کردیم که در آنها فرض کردیم $X$ ستونی رتبه کامل است همچنین توضیح داده شد که گاهی اوقات با مدل‌های سروکار داریم که $X$ ستونی رتبه کامل نیست.

برآورد پارامتری :

$X_{n\times(k+1)}$ و

روشی که در این حالت نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد روش حداقل مربعات معمولی می‌باشد.

مدل را به صورت

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

در نظر بگیرید به طوری که $E(\varepsilon) = 0 \quad V(\varepsilon) = \sigma^2 I$ ، $r(X) < k+1$

مشابه حالت رتبه کامل داریم

$$X'X\hat{\beta} = X'Y \quad (*)$$

چون $X$ رتبه کامل نیست $(X'X)^{-1}$ وجود ندارد و لذا معادله فوق جواب منحصر به فرد ندارد

ولی همان طور که متذکر شده شد دستگاه معادلات سازگار است و دارای جواب بی‌شمار می‌باشد

و می‌توانیم مقادیر زیادی از داده‌ها تقسیم یافته برای $X'X$ پیدا کنیم و بنابراین جواب‌های $r(X'X) = r(X'X \; X'Y)$

بی‌شماری برای دستگاه می‌توان به دست آورد. فرض کنید $G$ معکوس تقسیم یافته $X'X$

باشد پس جواب معادله $AX = Y \rightarrow X = GY$ مثلاً داریم یک جواب

$$\hat{\beta}^\circ = GX'Y$$

که یکی از جواب‌های معادله $(*)$

دقت شود که $\hat{\beta}^\circ$ یک جواب برای معادله $(*)$ است و نه هر جواب.

$\hat{\beta}^\circ$ یک برآورد بی‌اریب برای $\beta$ است. به هر حال $\hat{\beta}^\circ$ یک تابع از مشاهدات $Y$ است و امید ریاضی و واریانس آن با شرح ذیل به دست می‌آید

$$a)\quad E(\hat{\beta}^\circ) = GX'E(Y) = GX'X\beta = H\beta \quad (1)$$

PqPCO

Scanned with CamScanner

نرمون کنید F داردل تقسیم یافته دیگر $X'X$ است می دانیم $GX'$ و $FX'$ از قضیه ۷ صفحه ۲۰ سیدل معلوم

تقسیم یافته X هستند پس $XGX'X = XFX'X$ همچنین از لم ۳ صفحه ۱۶ سیدل

یعنی: $GX'X = FX'X \Rightarrow GX' = FX' \Rightarrow XGX' = XFX'$

$XGX'$ نسبت به G پایاست

پس $\hat{B}^\circ$ یک برآورد نااریب برای $HB$ است و نه برای $B$.

b) $Var(\hat{B}^\circ) = GX' Var(y) XG' = GX'XG'\sigma^2$ ①

پایاست بستگی به انتخاب G دارد

در حالتی که X ستونی رتبه کامل بود $Var(\hat{B}) = (X'X)^{-1}\sigma^2$ و در این فوق نیز به صورت $G\sigma^2$ قابل بیان است برای این منظور باید یک G مناسب انتخاب کنید.

چون $X'X$ متقارن است می دانیم می توان ماتریس متعامد P پیدا کنیم که

$$P'X'XP = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \Delta \qquad (X'X)^- = P\Delta^- P'$$

$$\Delta^- = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & \vdots \\ \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots \end{bmatrix}$$

که در آن $A_{11}$ یک ماتریس مربع رتبه کامل باشد به طوری که $r(A_{11}) = r(X'X)$

پس مطابق تئوریم برای محاسبه داردل تقسیم یافته می دانیم $\begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ معکوس

تقسیم یافته ماتریس فوق است اکنون طرفین این ماتریس و $P'X'XP$ را در $P'$ و $P$ ضرب کنید

معکوس تقسیم یافته $P'X'XP$ ماتریس I

$$\text{معکوس} \begin{cases} P\underbrace{P'X'XPP'}_{I} = \underbrace{X'X}_{} = P\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}P' \\ P\begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P' = G \Rightarrow \text{معکوس تقسیم یافته} \end{cases}$$

معکوس تقسیم یافته ماتریس

برای $X'X$ است که متقارن است $G' = G$

به طوری که $GX'XG' = G$ پس رابطه ① را در این حالت می توان به صورت

$$Var(\hat{B}^\circ) = G\sigma^2$$

نوشت. همچنین می توان برای $E(y)$ نیز برآوردی به دست آورد:

$$E(\hat{y}) = \hat{\underline{y}} = X\hat{B}^\circ = XGX'y$$

صفحه ۷ صفحه ۲۰ سیدل

$\hat{y}$ عرف شده است که $E(y)$

نوشته شود

بیت به نوع انتخاب G پایاست

یعنی $XGX'$ پایاست وبستگی به نوع انتخاب G ندارد (توضیح بالای صفحه)

PAPCO

Scanned with CamScanner

Subject :

Year . Month . Date . ( )

مسئله به مدل رتبه کامل SSE نیز قابل محاسبه است داریم :

$GX'y$

$$SSE = (y - X\hat{\beta}^{\circ})'(y - X\hat{\beta}^{\circ})$$

ما هم معادله رتبه کامل

$$= y'(I - XGX')(I - XGX')y$$

خودتوان

$$= y'(I - XGX')y \quad (۳)$$

ماتریس خودتوان و متقارن

مدل رتبه کامل $X(X'X)^{-1}X'$

$$SSE = y'(I - P_X)y$$

چون $XGX'$ یا $P_X$ ماتریس SSE نیز یا ماتریس و به نوع انتخاب G بستگی ندارد

(یعنی SSE بدون همه ماتریس از حاصل ضرب یا تقسیم یا نه $X'X$ یک ماتریس است)

از رابطه (۳) :

$$SSE = y'y - y'XGX'y = y'y - \hat{\beta}^{\circ}X'y$$

SST $\quad$ $SSR = y'XGX'y$

SSE

$$E(y'(I - XGX')y) = tr((I - XGX')IG^2) + \underbrace{\beta'X'(I - XGX')X\beta}_{0}$$

$$= \sigma^2(n - r(X))$$

$E(y'Ay) = tr(A\Sigma) + \mu'A\mu$

$$tr(I - XGX') = r(I - XGX') = *$$

مقدار توان

قضیه ۷ سیدل صفحه ۲

می دانیم اگر G یکی از روابط تعمیم یافته $X'X$ باشد $GX'$ یکی از روابط تعمیم یافته $X$ است

$$XGX'X = X$$

$$r(\underset{A}{X}\ \underset{A^-}{GX'}) = r(\underset{A}{X})$$ پس

$$* = n - r(X)$$

و بنابراین

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{SSE}{n - r(X)}$$

PAPCO

Scanned with CamScanner

Subject:
Year. Month. Date. ( )

در این حالت جدول آنالیز به شرح ذیل خواهد شد

| منبع | df | SS |
|---|---|---|
| رگرسیون | $r(X)$ | $SSR = B^{\circ\prime}X'\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{y}'XGX'\underset{\sim}{y}$ ← نسبت به $G$ پایه |
| خطا | $n-r(X)$ | $SSE = SST - SSR = \underset{\sim}{y}'(I - XGX')\underset{\sim}{y}$ |
| کل | $n$ | $SST = \underset{\sim}{y}'\underset{\sim}{y}$ |

و جدول آنالیز واریانس تصحیح شده:

| منبع | df | SS |
|---|---|---|
| رگرسیون (CFms) | $r(X)-1$ | $SSR_m = \underset{\sim}{y}'(XGX' - n^{-1}11')\underset{\sim}{y}$ |
| خطا | $n-r(X)$ | $SSE = \underset{\sim}{y}'(I-XGX')\underset{\sim}{y} = SST_m - SSR_m$ |
| کل | $n-1$ | $SST_m = \underset{\sim}{y}'\underset{\sim}{y} - n\bar{y}^2 = \underset{\sim}{y}'\underset{\sim}{y} - \underbrace{\underset{\sim}{y}'n^{-1}11'\underset{\sim}{y}}_{SSm}$ |

اکنون با در نظر گرفتن فرض نرمال بودن خطا به آزمون کردن معنی داری رگرسیون خواهیم پرداخت

$$\underset{\sim}{\varepsilon} \sim N(\underset{\sim}{0}, \sigma^2 I_n) \Rightarrow \underset{\sim}{y} \sim N(X\underset{\sim}{B}, \sigma^2 I)$$

پس $\underset{\sim}{B}^{\circ}$ هم که ترکیبی خطی از $\underset{\sim}{y}$ است نرمال است:

$$\underset{\sim}{B}^{\circ} = GX'\underset{\sim}{y} \sim N(\underbrace{HB}_{GX'X\underset{\sim}{B}}, \underbrace{GX'XG'\sigma^2}_{\text{با در نظر گرفتن } G \text{ خاص}})$$

$GX'XG'\sigma^2 = G\sigma^2 I$

$Bx, x'Ax \to B\Sigma A = 0$

$B\underset{\sim}{y}$ $\quad \hat{\sigma}^2$ $\quad X'AX$

$$\underset{\sim}{B}^{\circ} = GX'\underset{\sim}{y}, \quad SSE = \underset{\sim}{y}'(I - XGX')\underset{\sim}{y} \qquad B\Sigma A = 0$$

$SSE$: $(n-r(X))$

$$\underbrace{GX'}_{B}\underbrace{\sigma^2 I}_{\Sigma}\underbrace{(I - XGX')}_{A} = G(X' - X'XGX')\sigma^2 = 0$$

$X'$ $\quad$ $\underline{0}$

اگر $G$ دارای $X'X$ باشد طبق قضیه ۷ ص ۲۰۰ سیبرل $GX'$ دارای رتبه $X$ است

$XG$ دارای رتبه $X'$ است $\Rightarrow X'XGX' = X'$

PAPCO

Scanned with CamScanner

(F1) $(X'X)(X'X)^{-1}X' = X'$

Subject: $n^{-1}11'-n^{-1}11'X(X'X)^{-1}X'$ $\quad 1'\begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1k} \\ x_{n1} & \cdots & x_{nk} \end{bmatrix}_{n\times k} = [n\bar{x}_1 \; \cdots \; n\bar{x}_k]$

Year. Month. Date. (1)

$SSE/\sigma^2 = \dfrac{y'(I-XGX')y}{\sigma^2}$ ; $\dfrac{SSE}{\sigma^2}$ می‌کنیم توزیع

$\sim \chi^2\left(r(I-XGX'), \dfrac{\beta'X'(I-XGX')X\beta}{2\sigma^2}\right)$ $\quad M'AM/2\sigma^2$

$\beta'X'X\beta - \beta'X'XGX'X\beta = 0$ $\quad X'X$ $\quad tr(A\Sigma)$

$= \sim \chi^2(n-r(X))$

به همین ترتیب و با مدل رتبه کامل عبارات زیر را ثابت کنید:

1) $SSR/\sigma^2 \sim \chi^2\left(r(X), \dfrac{\beta'X'X\beta}{2\sigma^2}\right)$ $\quad \beta'X'XGX'X\beta$ $\quad M'AM$

2) $\dfrac{SSM}{\sigma^2} \sim \chi^2\left(1, (1'X\beta)^2/2n\sigma^2\right)$ $\quad \beta'X'11'X\beta$

$\begin{cases} SSM = y'n^{-1}11'y \\ SSE = y'(I-XGX')y \end{cases}$ $\Rightarrow$ مستقلند SSE و SSM

$n^{-1}11'-n^{-1}11'XGX' = 0$

$X'XGX' = X'$ ، $X'$ در $1'$ ضرب می‌کنیم $\rightarrow$ $1'$

$1'X$

3) $\dfrac{SSR_m}{\sigma^2} \sim \chi^2\left(r(X)-1, \dfrac{\beta'X'(I-n^{-1}11')X\beta}{2\sigma^2}\right)$ (*)

$\begin{cases} SSR_m = y'(XGX'-n^{-1}11')y \\ SSE = y'(I-XGX')y \end{cases}$ $\rightarrow$ مستقلند SSE و $SSR_m$

(تمرین)

همچنین با در نظر گرفتن $X = [1 \quad X_1]$ و تعریف $X_c = X_1 - 1\bar{x}'$

و $\beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$ (مدل رتبه کامل) (تمرین)

(**), (*) $\dfrac{SSR_m}{\sigma^2} \sim \chi^2\left(r(X)-1, \beta_1'X_c'X_c\beta_1/2\sigma^2\right) \rightarrow \delta^*$

$\beta'X'(I-n^{-1}11')X\beta/2\sigma^2 = \beta_1'X_c'X_c\beta_1/2\sigma^2$

PqPCO

$X'(I-n^{-1}11')X = \begin{bmatrix} 0 & 0' \\ 0 & X_1'(I-n^{-1}11')X_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0' \\ 0 & X_c'X_c \end{bmatrix}$ (**)

Scanned with CamScanner

Subject:
Year. Month. Date. ( )

واکنون می‌توانیم آماره‌ی آزمون را تشکیل دهیم:

$$F(R) = \frac{SSR/r(X)}{SSE/n-r(X)} \sim F'\left(r, n-r(X), \frac{\beta' X' X \beta}{2\sigma^2}\right)$$

برای آزمون: $H_0: \underset{\sim}{\beta} = \underset{\sim}{0}$ $\overset{\text{H.تحت}}{\Rightarrow} \sim F(r, n-r(X))$

$$F(M) = \frac{SSM/1}{SSE/n-r(X)} \sim F'(1, n-r(X), (1'X\beta)^2/2\sigma^2)$$

$H_0: E(\bar{y}) = 0$ $\overset{\text{H.تحت}}{\Rightarrow} F(1, n-r(X))$

$$F(R_m) = \frac{SSR_m/r(X)-1}{SSE/n-r(X)} \sim F'\left(r(X)-1, n-r(X), \delta^*\right)$$

$H_0: \underset{\sim}{\beta_1} = \underset{\sim}{0}$ $\overset{\text{H.تحت}}{\Rightarrow} F(r(X)-1, n-r(X))$

مثال صفحه ۱۴۵ کامل بررسی شود.

$$X = [\underset{\sim}{1} \quad X_1]$$

$$X'(I - n^{-1}11')X = [\underset{n\times 1}{1} \quad \underset{n\times k}{X_1}]' \left(\underset{n\times n}{I} - n^{-1}11'\right)\underset{n\times n}{(1 \quad X_1)}_{n\times(k+1)}$$

$$\begin{bmatrix} 1' \\ X_1' \end{bmatrix} \to 1\times n \to (k\times n)$$

$$= \begin{bmatrix} 1'I - n^{-1}1'11' \\ X_1' - n^{-1}X_1'11' \end{bmatrix}(1 \quad X_1)$$

$(X'X)_{n\times k+1}$

$$1'1 = [1 \cdots 1]\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = n \qquad = \begin{bmatrix} \overbrace{1'I1 - n^{-1}1'11'1}^{0} & \overbrace{1'IX_1 - n^{-1}1'11'X_1}^{\underset{\sim}{0}} \\ \underbrace{X_1'1 - n^{-1}X_1'11'1}_{\underset{\sim}{0}} & X_1'X_1 - n^{-1}X_1'11'X_1 \end{bmatrix}$$

$$X_1'[I - n^{-1}11']X_1$$

PAPCO

Scanned with CamScanner

Subject :
Year . Month . Date . ( )

## توابع قابل برآورد :

تابع خطی از عناصر $\underset{\sim}{\beta}$ قابل برآورد است اگر ما بتوانیم یک تابع خطی مثل $\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{y}$ از عناصر بردار $\underset{\sim}{y}$ پیدا کنیم که همواره

$$E(\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{y}) = \underset{\sim}{q}'\underset{\sim}{\beta}$$

آن گاه می گوییم $\underset{\sim}{q}'\underset{\sim}{\beta}$ یک تابع خطی قابل برآورد از $\underset{\sim}{\beta}$ است.

$$E(\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{y}) = \underset{\sim}{t}'E(\underset{\sim}{y}) = \underset{\sim}{t}'X\underset{\sim}{\beta} = \underset{\sim}{q}'\underset{\sim}{\beta} \Rightarrow \underset{\sim}{q}' = \underset{\sim}{t}'X$$

نتیجه: پس $q'$ باید ترکیب خطی از سطرهای ماتریس $X$ باشد. if $\underset{\sim}{q}' = \underset{\sim}{t}'X \Rightarrow \underset{\sim}{q}'\underset{\sim}{\beta}$ قابل برآورد

برای مثال مدل‌های آنالیز واریانس که در فصل قبل توضیح داده شد را در نظر بگیرید.

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij} \Rightarrow E(y_{ij}) = \mu + \alpha_i \quad (q'\beta)$$

پس $\mu+\alpha_i$ قابل برآورد است به عبارت دیگر امید ریاضی هر مشاهده قابل برآورد است.

و یا

$$\left.\begin{aligned} y_{ij} &= \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij} \\ y_{i'j'} &= \mu + \alpha_{i'} + \varepsilon_{i'j'} \end{aligned}\right\} \Rightarrow E(y_{ij} - y_{i'j'}) = \alpha_i - \alpha_{i'}$$

به عبارت دیگر می توان گفت ترکیب خطی از توابع خطی قابل برآورد، قابل برآورد است

به طور کلی فرض کنید $\underset{\sim}{q}_1'\underset{\sim}{\beta} = \underset{\sim}{t}_1'E(\underset{\sim}{y})$ ، $\underset{\sim}{q}_2'\underset{\sim}{\beta} = \underset{\sim}{t}_2'E(\underset{\sim}{y})$ به عبارتی

$$c_1\underset{\sim}{q}_1'\underset{\sim}{\beta} + c_2\underset{\sim}{q}_2'\underset{\sim}{\beta} = (c_1\underset{\sim}{t}_1' + c_2\underset{\sim}{t}_2')E(\underset{\sim}{y})$$

پس هر ترکیب خطی از توابع خطی قابل برآورد، قابل برآورد است

همچنین از دیگر خصوصیات توابع قابل برآوردی توان: BLUE بودن $\underset{\sim}{q}'\underset{\sim}{\beta}$ برای $\underset{\sim}{q}'\underset{\sim}{\beta}$ اشاره کرد (رائو 1962) ① $\underset{\sim}{q}'\underset{\sim}{\beta}$ نااریب برای $\underset{\sim}{q}'\underset{\sim}{\beta}$ ۲

① $E(\underset{\sim}{q}'\underset{\sim}{\beta}^{\circ}) = E(\underset{\sim}{q}'GX'\underset{\sim}{y}) = \underset{\sim}{q}'GX'X\underset{\sim}{\beta}$

PqPCO

$$= \underset{\sim}{t}'\underbrace{XGX'X}_{X}\underset{\sim}{\beta} = \underset{\sim}{t}'X\underset{\sim}{\beta} = \underset{\sim}{q}'\underset{\sim}{\beta}$$

Scanned with CamScanner

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$q'\beta$ یک برآورد نااریب بردار $q'\beta$ است. $q' = t'X$ ، $q'\beta^\circ$ بنابراین

① $q'\beta^\circ$ دارای حداقل واریانس است.

$$Var(q'\beta^\circ) = var(t'XGX'y) = \sigma^2 t'XGX'XGX't = \sigma^2 q'Gq$$

$XGX'$

و نسبت به $G$ پایاست و به نوع انتخاب $G$ بستگی ندارد. (برعکس $var(\beta^\circ)$ که نسبت به $G$ ناپایا بود)

همچنین می‌توان گفت $q'\beta^\circ$ نسبت به $G$ و به عبارت دیگر نسبت به $\beta^\circ$ پایاست

$$q'\beta^\circ = t'X\beta^\circ = t'XGX'y$$

می‌دانیم نسبت به $G$ پایاست پس $q'\beta^\circ$ نسبت به $G$ و در نتیجه نسبت به $\beta^\circ$ پایاست وقتی $\beta^\circ$ قابل برآورد باشد پس اگر $q'\beta$ قابل برآورد باشد $q'\beta^\circ$ دارای مقادیر یکتا برای تمام جواب‌های $\beta$ معادله نرمال است.

② $q'\beta^\circ$ دارای حداقل واریانس است:

برای اینکه ثابت کنیم $q'\beta^\circ$ دارای خاصیت حداقل واریانس است یک برآورد نااریب دیگر $k'y$ را برای $q'\beta$ در نظر بگیرید به طوری که $E(k'y) = q'\beta$ به طوری که $q' = k'X$ پس

$$Cov(q'\beta^\circ, k'y) = Cov(q'GX'y, k'y) = q'GX'k\sigma^2$$

$$= q'Gq\sigma^2$$

② $var(q'\beta^\circ - k'y) = var(q'\beta^\circ) + var(k'y) - 2Cov(q'\beta^\circ, k'y)$

$> 0$

$$= var(k'y) - q'Gq\sigma^2$$

$$= var(k'y) - var(q'\beta^\circ) > 0$$

پس $q'\beta^\circ$ دارای کمترین واریانس بین برآوردهای نااریب خطی $q'\beta$ است.

Scanned with CamScanner

Subject : Date

نکته ۱: فرض کنید $q_1'\beta^\circ$ و $q_2'\beta^\circ$ دو تابع خطی برآورد BLUE برای $q_1'\beta$ و $q_2'\beta$ باشند آن‌گاه برآورد BLUE برای

$$Cov(q_1'\beta^\circ, q_2'\beta^\circ) = Cov(q_1'GX'y, q_2'GX'y)$$

$$= q_1'GX'XG'q_2\sigma^2 = t_1'XGX'XG'X't_2\sigma^2$$

$$= q_1'GQ_2\cdot\sigma^2$$

پس $q_1'\beta^\circ$ و $q_2'\beta^\circ$ مستقلند اگر $q_1'GQ_2 = 0$ باشد.

نکته ۲: برهمین ترتیب اگر $Q'\beta^\circ$ نشان‌دهنده چندین تابع خطی برآورد BLUE باشد آن‌گاه ماتریس واریانس و کوواریانس برای چندین تابع خطی برآورد $Q'\beta$

$$var(Q'\beta^\circ) = Q'GQ\sigma^2$$

است.

$$Q'\beta_{s\times k+1} = \begin{bmatrix} q_1'\beta \\ \vdots \\ q_s'\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1'X\beta \\ \vdots \\ t_s'X\beta \end{bmatrix} \qquad Q' = T'X$$

همچنین اگر $Q'\beta$ قابل برآورد باشد $E(Q'\beta^\circ) = Q'\beta$

نکته ۳: تنها توابع قابل برآوردی که دارای برآوردگرهای BLUE هستند و جهت ساخت فاصله اطمینان مناسب برای $q'\beta$ مورد استفاده قرار می‌گیرند توابع خطی قابل برآورد هستند. لذا یک فاصله اطمینان $(1-\alpha)100\%$

$$q'\beta : q'\beta^\circ \pm \hat{\sigma}\, t_{n-r(X),\alpha/2}\sqrt{q'Gq}$$

$$T = \frac{q'\beta - q'\beta^\circ}{\hat{\sigma}\sqrt{q'Gq}} \sim t_{n-r(X)}$$

MICRO

Scanned with CamScanner

Subject : Date

مثال صفحه 183 سیدل بررسی شود.

چه توابعی قابل برآوردند :

$\boxed{q' = t'X}$ ⇒ $q'\beta$ قابل برآورد است

دیدیم $q'\beta$ زمانی تابع قابل برآورد است که $q'\beta^\circ$ یک Blue برای $q'\beta$ باشد

و

$$Var(q'\beta^\circ) = q'Gq\sigma^2$$

اکنون جهتی توابع قابل برآورد مورد بررسی قرار می‌گیرند ۱) هر تابع خطی از $X\beta$ قابل برآورد است

یعنی $m'X\beta$ و برای هر بردار $m'$ ، Blue آن عبارت است از $q'\beta$

$$m'X\beta^\circ = m'XGX'y$$

$q' = m'X \equiv t'X$ ⇒ $m'X\beta$ قابل برآورد است یا واریانس

$$V(m'X\beta^\circ) = m'XGX'm\sigma^2$$

نکته : یک روش برای تشخیص قابل برآورد بودن $q'\beta$ به این صورت است که ماتریس $H = GX'X$ را در نظر می‌گیرند به طوری که می‌دانیم اگر $X'X$ نادرجه باشد $H = I$ می‌شود و اگر $X'X$ نادرجه نباشد $H$ ماتریسی از ۰ و ۱ خواهد بود (نه همه جا) آن‌گاه

کل $q'\beta$ قابل برآوردات

اگر و تنها اگر $q'H = q'$

شرط قابل برآورد بودن $q'\beta$ ⟺ هم‌ارز ⟺ شرط قابل برآورد بودن $q\beta$

$$\boxed{q' = t'X \iff q'H = q'}$$

$$\begin{cases} q'H = q'GX'X = t'\underbrace{XGX'X}_{X} = t'X = q' \end{cases}$$

$X = [X_1 \quad X_2]$

$X'X_1$ → رتبه کامل = $r(X)$

دارد ⟸ دارد

$$X'X = \begin{bmatrix} X_1'X_1 & X_1'X_2 \\ X_2'X_1 & X_2'X_2 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} (X_1'X_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

چون $X_1$ رتبه ستونی کامل $\exists M ; X_2 = X_1M$ و چون تمام عناصر $X$ ضرب یک است لذا عناصر $M$ اعداد صحیح مثبت هستند

$$H = GX'X = \begin{bmatrix} I & (X_1'X_1)^{-1}X_1'X_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & M \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Scanned with CamScanner

Subject : Date

۲) هر تابع خطی از $X'X\beta$ نیز قابل برآورد است چون $X'X\beta$ تابع خطی از $X\beta$ است و ما به حالت قبل قابل برآورد است. یا داریم:

اثبات: $S'X'X\beta$ قابل برآورد است $\Leftrightarrow S'X'X = S'X'XG$ ; $S'X'X\beta = q'\beta$

$$S'X'X\beta = S'X'X\hat{\beta}^\circ = S'X'XGX'y = S'X'y$$

$$\text{var}(S'X'X\hat{\beta}^\circ) = S'X'X\,\text{var}(\hat{\beta}^\circ)X'XS = S'X'XS\sigma^2$$

$$q'G q \qquad GX'XG'\sigma^2$$

پس برآورد BLUE تابع خطی قابل برآورد $S'X'X\beta$ ، $S'X'y$ می‌باشد

۳) هر تابع خطی از $E(\hat{\beta}^\circ)$ نیز قابل برآورد است. ($u'E(\hat{\beta}^\circ)$ مثل)

$$q'\beta = u'E(\hat{\beta}^\circ) = u'GX'X\beta$$

$GX'y$

از حالت قبل نتیجه می‌شود با $u'GX'X = q'$ در نظر گرفتن $u'G = S'$

$$q'H = u'GX'XGX'X = u'GX'X = q'$$

و BLUE برای $E(\hat{\beta}^\circ)$ عبارت است از $E(q'\hat{\beta}^\circ) = q'\beta$

$$\Rightarrow q'\hat{\beta}^\circ = u'GX'X\hat{\beta}^\circ = u'GX'XGX'y = u'GX'y = u'\hat{\beta}^\circ$$

$$G$$

$$\Rightarrow \text{var}(u'GX'X\hat{\beta}^\circ) = \text{var}(u'\hat{\beta}^\circ) = u'GX'XG'u\sigma^2$$

$$\text{var}(\hat{\beta}^\circ)$$

به همین ترتیب می‌توان تعداد زیادی توابع خطی قابل برآورد پیدا کرد که این تعداد برابر است با $r(x)$ مثل

$$\text{ثابت } t;\ q' = t'X \Rightarrow q'\beta \text{ قابل برآورد است}$$

فرض کنید $T'_{n\times n}$ یک ماتریس رتبه کامل باشد به طوری که

$$Q' = \underset{n\times n}{T'}\underset{n\times k+1}{X} \Rightarrow Q'_{n\times k+1} \Rightarrow \text{تابع خطی قابل برآورد } n \text{ تا}$$

$$Q\beta = \begin{bmatrix} t_1'X\beta \\ \vdots \\ t_n'X\beta \end{bmatrix}$$

©MICRO

Scanned with CamScanner

Subject : $Q = T'X$ ستونهای Q ترکیبی از ستونهای X هستند ⇒ Q بعضی از ستونهای X را دارد یا نه Date

بنابراین $r(Q) = r(X)$ دقیقا بعضی ستونهای X را دارد یا نه $\underset{n\times k+1}{Q}$ شامل $n$ تابع قابل برآورد است چون $\beta' Q$

$r(Q) = r(X) = r(T'X)$ تعداد ستونهای مستقل

می‌توان گفت که تنها $r(X)$ تا از ستونهای $Q$ مستقل خطی‌اند و $r(X)$ تا تابع قابل برآوردی وجود دارد که بطور خطی مستقل.

مثال:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{6\times 4} \qquad X'X = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$r(X) = r(X'X) = 3$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{4\times 4} \qquad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\beta} = \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{\beta}^\circ = \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \\ 86 \\ 32 \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{m}' = [m_1 \ \dots \ m_6]_{1\times 6}$$

$$X\underset{\sim}{\beta} = \begin{bmatrix} \mu+\alpha_1 \\ \mu+\alpha_1 \\ \mu+\alpha_1 \\ \mu+\alpha_2 \\ \mu+\alpha_2 \\ \mu+\alpha_3 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{m}'X\underset{\sim}{\beta} = (m_1+m_2+m_3+m_4+m_5+m_6)\mu + (m_1+m_2+m_3)\alpha_1 + (m_4+m_5)\alpha_2 + m_6\alpha_3$$

$q'$

برای هر $m_1 \dots m_6$ یک تابع قابل برآورد است و 13145 آن عبارت است از:

$$\underset{\sim}{m}'X\hat{\underset{\sim}{\beta}} = \underset{\sim}{m}'X\underset{\sim}{\beta}^\circ = (m_1+m_2+m_3)\underset{100}{\alpha_1} + (m_4+m_5)\underset{86}{\alpha_2} + m_6\underset{32}{\alpha_3} \quad *$$

یک $G$ دیگر:

$\underset{\sim}{m}'X = q' \rightarrow q'\hat{\beta}$ تابع برآورد

$$G_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4/3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \beta_1^\circ = \begin{bmatrix} 32 \\ 68 \\ 54 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{m}'X\hat{\underset{\sim}{\beta}} = (m_1+m_2+\dots+m_6)32 + (m_1+m_2+m_3)68 + (m_4+m_5)54 = 100(m_1+m_2+m_3) + 86(m_4+m_5) + 32m_6 \quad *$$

Scanned with CamScanner

Subject : $\underset{\sim}{W}' = (w_1 \quad w_2 \quad w_3 \quad w_4)$ ~~$\underset{\sim}{W} = [w_1 \; w_2 \; w_3 \; w_4]$~~ Date 5

$\underset{\sim}{W}'\underset{\sim}{HB} = (w_2+w_3+w_4)\mu + w_2\alpha_1 + w_3\alpha_2 + w_4\alpha_4$ است $\underset{\sim}{W}'\underset{\sim}{HB}$ یک ترکیب خطی قابل برآورد دیگر

blue $\underset{\sim}{W}'\underset{\sim}{HB}^{\circ} = 100\,w_2 + 86\,w_3 + 32\,w_4$ (**)

$\underset{\sim}{W}'\underset{\sim}{B}^{\circ}$

$q'H = W'HH = W'H = q'$

دیگر $G$ یکی $\underset{\sim}{W}_1'\underset{\sim}{H}_1\underset{\sim}{B} = w_{11}\mu + w_{12}\alpha_1 + w_{13}\alpha_2 + (w_{11}-w_{12}-w_{13})\alpha_4$ :

$\underset{\sim}{W}_1'\underset{\sim}{H}_1\underset{\sim}{B}^{\circ} = w_1'\underset{\sim}{B}^{\circ} = 32\,w_{11} + 68\,w_{12} + 54\,w_{13}$ (*)

$0 + \frac{1}{2}(132) = 99$

For $w_1 = \frac{1}{2} \quad w_3 = 0 \quad w_4 = \frac{1}{2} \Rightarrow w'\underset{\sim}{B}^{\circ} = 66$ $\quad \mu + \frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)$

$w_{11} = 1 \quad w_{12} = \frac{1}{2} \quad w_{13} = 0 \Rightarrow w_1'\underset{\sim}{B}^{\circ} = 66$ $\quad \mu + \frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)$

$32 + \frac{1}{2}(68) = 66$

• از این دو مقدار برای $w_2, w_3, w_4$ و $w_{11}, w_{12}, w_{13}$ توابع قابل برآورد خطی تولید کنند * و ** برابرند.

$w_2 = \frac{1}{3} \quad w_3 = 0 \quad w_4 = -\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3}(\alpha_1 - \alpha_4)$

$w_{12} = 0 \quad w_{12} = \frac{1}{3} \quad w_{13} = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}(\alpha_1 - \alpha_4)$

$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 32 \\ 68 \\ 54 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{68}{3}$

$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 100 \\ 86 \\ 32 \end{bmatrix} = \frac{100}{3} - \frac{32}{3} = \frac{68}{3}$

← مقدار Blue ی تابع قابل برآورد یکتا را برابرند

## آزمون فرض کلی درمورد پارامترهای رتبه غیر کامل

درمدل‌های رتبه کامل فرض کلی به صورت $K'\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{m}$ بود درحالتهای رتبه غیر کامل فرض کلی بازهم به صورت $K'\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{m}$ درنظر می‌گیریم. البته در اینجا صحبت از فرضهای قابل آزمون می‌شود (مربوط به ترکیبات خطی از $\underset{\sim}{B}$) البته قضاوت در مورد مجموعه‌ای از ترکیبات خطی بردار $\underset{\sim}{B}$ که قابل برآورد باشند را به عنوان فرضهای قابل آزمون در نظر می‌گیرند. پس ابتدا فرض می‌کنیم $K'\underset{\sim}{B}$ قابل برآورد است و می‌خواهیم آزمون انجام دهیم. فرض کنید

$S < K+1$ یک طرف به $r(K') = S$ ، $\underset{S\times K+1}{K'}\underset{\sim}{B} = \begin{pmatrix} K_1'\underset{\sim}{B} \\ \vdots \\ K_S'\underset{\sim}{B} \end{pmatrix}$



Scanned with CamScanner

$$Q = [k'(x'x)^{-1}x'y - m]'(k'(x'x)^{-1}k)^{-1}(k'(x'x)^{-1}x'y - m)$$

Subject : Date

در صورتی قابل آزمون است که تک تک $k'_1\beta, k'_2\beta, \dots$ قابل برآورد باشند و داریم:

عبارت $k' = T'X$ می دانیم برآورد BLUE بردار این مجموعه ترکیبات خطی قابل برآورد به صورت

$$BLUE(k'\beta) = k'\hat{\beta} \rightarrow \begin{cases} E(k'\hat{\beta}) = k'\beta \\ var(k'\hat{\beta}) = \sigma^2 k'Gk \end{cases}$$

$$E(k'Gx'y) = k'Gx'x\beta$$

$$= T'xGx'x\beta = T'x\beta = k'\beta$$

نوشته می شود $\hat{\beta}$ تابع دهنده نادرسته است

$$var(k'\hat{\beta}) = k'var(\beta)k = k'Gx'xG'k\sigma^2 = k'Gx'xG'x'T\sigma^2 = k'Gk\sigma^2$$

بنابراین:

$$k'\hat{\beta} - m \sim N(k'\beta - m, \sigma^2 k'Gk)$$

و اگر تعریف کنیم

$$Q = (k'\hat{\beta} - m)'(k'Gk)^{-1}(k'\hat{\beta} - m)$$

(چرا $k'Gk$ نادرسته است: دیدیم که $k'\beta$ قابل برآورد نباشد $k$ بر حسب دیترمینال $x'x$ قابل بیان است پس بادرتصرفتن $k' = S'x'x$ می دانیم $r(k') = s$ به طوری که $s \le k$ پس $s < k+1$

$$s = r(s'x'x) \le r(s'x') \le r(s') \le s$$

$$\Rightarrow r(s'x') = s$$

از طرفی چون $r(s'x') \le r(x')$ پس $s \le n$ و $n < k+1$

$$k'Gk = s'x'xGx'xs = s'x'xs$$

$$r(k'Gk) = r(s'x'xs) = r(s'x') = s \qquad r(s') = s$$

پس $k'Gk$ رتبه کامل است پس نادرتبه است.

حال

که دارای رتبه کامل

$$\frac{Q}{\sigma^2} \sim \chi'^2(s, (k\hat{\beta} - m)'(k'Gk)^{-1}(k\hat{\beta} - m)/2\sigma^2)$$

حال برای رتبه کامل Q را می توان به صورت زیر نوشت:

$$(*) \quad Q = [y - Xk(k'k)^{-1}m]'XG'k(k'Gk)^{-1}k'Gx'[y - Xk(k'k)^{-1}m]$$

$$Q = [y - Xk(k'k)^{-1}m]'x(x'x)^{-1}k(k'(x'x)^{-1}k)^{-1}k'(x'x)^{-1}x'[y - Xk(k'k)^{-1}m]$$

Subject : Date

چون $S = r(K') \times$ رتبه کامل است $(K'K)^{-1}$ وجود دارد. $(r(K'K) = r(K) = S)$

و داریم:

$$K'GX'XK(K'K)^{-1}m = T'\underbrace{XGX'X}_{X}K(K'K)^{-1}m \quad K'=T'X$$

$$= \underbrace{T'X}_{K'}K(K'K)^{-1}m = K'K(K'K)^{-1}m = m$$

و عبارت (*) را می‌توان نوشت. همچنین SSE را هم می‌توان به صورت زیر نوشت

$$(**) \quad SSE = [y - XK(K'K)^{-1}m]'(I - XGX')[y - XK(K'K)^{-1}m]$$

چون $X'(I - XGX') = 0$

و از (*) و (**) نتیجه می‌شود Q و SSE مستقلند.

$$F(H) = \frac{Q/S}{SSE/n-r(X)} \sim F'(S, n-r(X), (K'\beta - m)'(K'GK)^{-1}(K'\beta - m)/\sigma^2)$$

$$F(H) \sim F(S, n-r(X)) \; ; \quad H_0 : K'\beta = m$$ تحت فرض

بحث دیگری که در رتبه کامل داشتیم این بود که برآورد $\beta$ تحت محدودیتها چه می‌شود در اینجا با فرض

کامل آزمون بودن $K'\beta = m$ برآورد $\beta$ را به دست می‌آوریم:

اگر از بین $\beta$ های تحت شرط $K'\beta = m$ عبارت $(y - X\beta)'(y - X\beta)$ را min می‌کند؛ مشابه مدل رتبه کامل از لاگرانژ استفاده کنید

$$(y - X\beta_H^*)'(y - X\beta_H^*) + 2\theta'(K'\beta_H^* - m)$$

نسبت به $\theta$ و $\beta_H^*$ مشتق می‌گیریم

$$\begin{cases} X'X\beta_H^* + K\theta = X'y \\ K'\beta_H^* = m \end{cases}$$

و بعد مراحل را بسط دهید در نهایت

$$\beta_H^* = \beta^* - GK(K'GK)^{-1}(K'\beta^* - m)$$

$\beta^*$ در رتبه کامل $\beta^* = \hat{\beta} - (X'X)^{-1}K(K'(X'X)^{-1}K)^{-1}(K'\hat{\beta} - m)$

© MICRO

Scanned with CamScanner

ودر نهایت با جایگذاری آن در عبارت $(Y-X\underset{\sim}{B}_H^{\circ})'(Y-X\underset{\sim}{B}_H^{\circ})$ داریم :

$$SSE_H = (Y-X\underset{\sim}{B}_H^{\circ})'(Y-X\underset{\sim}{B}_H^{\circ}) = SSE + (K'\underset{\sim}{B}^{\circ}-\underset{\sim}{m})'(K'GK)^{-1}(K'\underset{\sim}{B}^{\circ}-\underset{\sim}{m})$$

↓ بدلازاء نکران

$$(\text{ص به مدل رتبه کامل}) = SSE + Q$$

اگر قرار فرض کنیم می خواهیم $H_0 : K'\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{0}$ را آزمون کنیم با این فرض که قابل برآورد باشد

$$Q = \underset{\sim}{B}^{\circ\prime}K(K'GK)^{-1}K'\underset{\sim}{B}^{\circ}$$

و برآورد $\underset{\sim}{B}$ تحت شرط $K'\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{0}$ :

$$\underset{\sim}{B}_H^{\circ} = \underset{\sim}{B}^{\circ} - GK(K'GK)^{-1}K'\underset{\sim}{B}^{\circ}$$

و جدول آنالیز واریانس به شرح ذیل می باشد :

| منبع تغییر | df | SS | |
|---|---|---|---|
| مدل کامل | $r(X)$ | $SSR = \underset{\sim}{B}^{\circ\prime}X'Y$ | $Q = \underset{\sim}{B}^{\circ\prime}K(K'GK)^{-1}K'\underset{\sim}{B}^{\circ}$ |
| فرض مدل تعدیل یافته ← | $s$ | $SSR-Q$ | |
| خطا | $n-r(X)$ | $SSE$ | |
| کل | $n$ | $SSy$ | |

جدول آنالیز واریانس بدون تصحیح به تئین

$$F(R) = \frac{SSR/r(X)}{SSE/n-r(X)}$$ بررسی معنی دار مدل کامل $H_0 : \underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{0}$

$$F(H) = \frac{Q/s}{SSE/n-r(X)}$$ $H_0 : K'\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{0}$

$$F(SH) = \frac{(SSR-Q)/r(X)-s}{SSE/n-r(X)}$$ بررسی تعدیل بین از اعمال محدودیت معنی دار مدل تعدیل یافته

تحت فرض $H_0$ اگر $F(SH)$ بزرگتر از $F$ جدول باشد می گوییم مدل تعدیل یافته کفایت

می توان به صورت زیر خلاصه نمود :



Scanned with CamScanner

Subject :

Date

| منبع تغییرات | df | SS |
|---|---|---|
| مدل کامل بعد از لحاظ کردن عرض از مبدأ | $r(X)-1$ | $SSR_m = SSR - n\bar{y}^2$ |
| فرضیه | $s$ | $Q = \underset{\sim}{\hat{B}}' K (K'GK)^{-1} K' \underset{\sim}{\hat{B}}$ |
| مدل تقلیل یافته | $r(X)-s-1$ | $SSR_m - Q$ |
| خطا | $n-r(X)$ | $SSE$ |
| کل | $n-1$ | $SST_m = SST - n\bar{y}^2 = y'y - n\bar{y}^2$ |

جدول آنالیز واریانس با تابع مقایسه

$$F(R_m) = \frac{SSR_m / r(X)-1}{SSE / n-r(X)}$$ آزمون معنی مدل کامل بعد از لحاظ کردن عرض از مبدأ

$$F(H) = \frac{Q/s}{SSE/n-r(X)}$$ آزمون فرض صفر

$$F(SH) = \frac{(SSR_m - Q)/r(X)-s-1}{SSE/n-r(X)}$$ آزمون معنی داری مدل تقلیل یافته نسبت به مدل کامل

نکته: می‌توان نشان داد که اگر $K'\underset{\sim}{\hat{B}} = \underset{\sim}{m}$ قابل برآورد نباشد آن گاه این محدودیت هیچ تغییری در $(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\hat{B}})'(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\hat{B}})$ نمی‌دهد و همان min ای خواهد شد که هیچ محدودیتی نداشتیم یعنی

$$\min (\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\hat{B}})'(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\hat{B}}) = SSE$$ ، $K'\underset{\sim}{\hat{B}} = \underset{\sim}{m}$ که قابل برآورد نیست

اما ممکن است حالتی پیش بیاید که $K'\underset{\sim}{\hat{B}} = \underset{\sim}{m}$ را بتوان به دو دسته تقسیم کنیم که مثلاً $K_1'\underset{\sim}{\hat{B}} = \underset{\sim}{m_1}$ قابل برآورد و $K_2'\underset{\sim}{\hat{B}} = \underset{\sim}{m_2}$ قابل برآورد نباشد

$$\begin{pmatrix} K_1' \\ K_2' \end{pmatrix} \underset{\sim}{\hat{B}} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{m_1} \\ \underset{\sim}{m_2} \end{pmatrix}$$

در این حالت $Q$ ای که برای $K'\underset{\sim}{\hat{B}} = \underset{\sim}{m}$ محاسبه می‌کنیم معادل است با $Q$ ای که برای $K_1'\underset{\sim}{\hat{B}} = \underset{\sim}{m_1}$ محاسبه می‌کنیم. (مطالعه بیشتر به عهده دانشجو)

MICRO

Scanned with CamScanner

Subject : تابع برآورد $q'\beta$ $\quad q' = t'x \quad$ یا $\quad q'H = q'$ Date

نکته :

دقت کنید برای اینکه $k'\beta$ قابل برآورد باشد باید $k' = T'x$ یا به طور معادل

$$k'H = k' \qquad H = Gx'x$$

یعنی به طور کلی می‌توان گفت در حالت بدل رتبه غیر کامل

$$H_0 : k'H\beta = m$$

می‌باشد که اگر $k'\beta$ قابل برآورد باشد معادل است با $H_0 : k'\beta = m$ اما اگر $k'\beta$ قابل برآورد نباشد $Q$ که محاسبه می‌کنیم برای فرض $H_0 : k'H\beta = m$ است.

$$\frac{k'H}{q'}\,H = \frac{k'H}{q'} \Rightarrow k'HB$$

حداقل قابل برآورد

منظور این است که اگر دقیقاً بدانیم $k'\beta = m$ قابل برآورد است یا خیر، به هر حال $Q$ قابل محاسبه است چون قابل برآورد بودن $k'\beta$ یک شرط کافی برای وجود $Q$ است ولی شرط لازم نیست. پس چون $k'\beta = m$ معلوم نیست قابل برآورد است یا خیر می‌توان یک فرض به صورت $k'H\beta = m$ در نظر گرفت می‌دانیم همواره قابل برآورد است پس $Q_1$ را برای این فرض بدست آوردیم. پس فرض کنیم فرضیه $k'H\beta = m$ باشد:

$$Q_1 = (k'H\beta^\circ - m)'(k'HGH'k)^{-1}(k'H\beta^\circ - m)$$

$$k'H\beta^\circ = k'GX'XG'X'y = k'G_1X'y$$

$$X'X\,(GX'XG')\,X'X = X'XG_1X'X \Rightarrow G_1 \text{ یک وارون تعمیم یافته } X'X$$

$$(X'X \quad X'X)$$

پس

$$k'H\beta^\circ = k'G_1X'y = k'\beta_1^\circ$$

که $\beta_1^\circ = G_1X'y$ یک حل از معادله $X'X\beta^\circ = X'y$ است. همچنین

$$k'HGH'k = k'G\underbrace{X'XGX'X}_{X'X}G'k = k'GX'XG'k = k'G_1k$$

پس

$$Q_1 = (k'\beta_1^\circ - m)'(k'G_1k)^{-1}(k'\beta_1^\circ - m)$$



Scanned with CamScanner

Subject : Date

به عبارت دیگر اگر $k'\beta = m$ قابل آزمون نباشد برای آزمون کردن آن از $Q_1$ استفاده می‌کنیم

$$F(H) = \frac{Q_1/s}{SSE/n-r(x)}$$

حداکثر $k'H\beta = m$ که $\beta_1^* = G_1 X' y$ را محاسبه آزمون می‌کند. پس یک آماره کلی‌تر از آماره قبل است. (چون $Q$ از راه حداقل به دست آمد به صورت $Q_1$ است که برای $k'H\beta = m$ بدست آمد)

مثال صفحه 196 بررسی شود.

محاسبه $Q$ وقتی $k'\beta$ شامل ترکیبات خطی مستقل باشد: یکی از روش‌ها در این حالت $Q$ یا $SSR$ است

بحث دیگری که در این مبحث باید بیانیم در خصوص استقلال هرکدام از مؤلفه‌های $k'\beta$ است

فرض کنید $H_0 : k'\beta = m$ قابل $k'\beta$ قابل برآورد و فرض $H_0$ قابل آزمون باشد و همه مستقل.

$$k'\beta = \begin{bmatrix} k_1'\beta \\ k_2'\beta \\ \vdots \\ k_s'\beta \end{bmatrix}$$

$$k' = T'X$$

$$r(k') = s$$

داریم $Q = (k'\beta - m)'(k'Gk)^{-1}(k'\beta - m)$ اکنون حالت خاص $m = 0$ را در نظر بگیرید

$$Q = (k'\beta^*)'(k'Gk)^{-1}(k'\beta^*)$$

$$= \beta^{*\prime} k (k'Gk)^{-1} k'\beta^*$$

چون $k'\beta$ قابل برآورد است $k'$ به صورت ترکیب خطی مستقل $X'X$ قابل بیان است

$$Q = y'XG'X'XS(S'X'XGX'XS)^{-1}S'X'XGX'y$$

$$= y'XS(S'X'XS)^{-1}S'X'y$$

($G$ معکوس تعمیم یافته $G'$ نیز $X'X$ معکوس تعمیم یافته $X'X$)

از طرفی می‌دانیم $k'$ رتبه کامل است و $r(k') = s$ و چون $r(S'X'X) = r(X)$ می‌توان نشان داد $S_{n\times k}$ $r(X) = s$ (چون تمام ترکیبات خطی مستقل $X'X$ برآوردند)

$$XS = X_1 P X_1' X_1$$

که در آن $X_1$ زیرماتریسی از $X$ است که ستونی رتبه کامل و $P$ و $X_1'X_1$ هر دو ناوردا هستند

بنابراین $X'XS(S'X'XS)^{-1}S'X'X = X'(X_1PX_1'X_1)(X_1'X_1P'X_1'X_1P'X_1'X_1)^{-1}X_1'X_1P'X_1'X_1X$

$$S(S'X'XS)^{-1}S'$$

که دارای تعیم یافته $X'X$ است (اثبات به عهده دانشجو)

$$= X'X_1P(X_1'X_1)(X_1'X_1)^{-1}P^{-1}(X_1'X_1)^{-1}P'^{-1}(X_1'X_1)^{-1}(X_1'X_1)P'X_1'X_1X = X'X_1X_1^{-1}X_1'^{-1}X_1'X_1X = X'X$$

I I I

Scanned with CamScanner

Subject : $SSR = \beta' X' y$ Date .....

when $S = r(X)$ $\quad Q = y' X G X' y = SSR$ ⊛ دنبال این

مجموعه‌ای داریم ولذا $S = r(X)$ از طرفی دیدیم هر اثر و تعداد توابع قابل برآورد بطور خطی مستقل $r(X)$ تا می‌باشد از طرفی عبارت ⊛ بیانگر این مطلب است که SSR مدل $E(y) = X\beta$ حال صورت کسر مجموع مربعات فرضیه $k\beta = 0$ است وقتی $k'\beta$ تا $r(X)$ تابع قابل برآورد مستقل خطی باشند. برای آزمون (یعنی اگر $k\beta$ تا $r(X)$ تابع قابل برآورد مستقل خطی باشند آنگاه $Q = SSR$ دارد این بدین معنی می‌باشد اگر $k_i'$ سطری از $k$ است و صورت کسر مجموع مربعات برای هم زمان آزمون کردن $k_i'\beta = 0$ $\quad i = 1, 2, \dots, r(X)$ برابر با SSR است و این یعنی اگر $k_i'\beta = 0$ مجزا آزمون شوند لزوماً صورت کسر مجموع مربعات برای آزمون کردن هر کدام SSR نیست و فقط در بعضی حالات این اتفاق می‌افتد که توضیح می‌دهیم :

فرض کنید $k_i'$ و $k_j'$ سطر $k'$ هستند بنابراین :

$$q_i = \beta' k_i (k_i' G k_i)^{-1} k_i' \beta = y' X G' k_i (k_i' G k_i)^{-1} k_i' G X' y \quad (A)$$

$$q_j = \beta' k_j (k_j' G k_j)^{-1} k_j' \beta = y' X G' k_j (k_j' G k_j)^{-1} k_j' G X' y \quad (B)$$

صورتهای کسر مجموع مربعات برای آزمون کردن فرضیه $k_i'\beta = 0$ و $k_j'\beta = 0$ می‌باشند و با فرض نرمال بودن $y$ ، $q_i$ و $q_j$ مستقلند اگر کمی تعمق کنیم

$y'Ay$ و $y'By$ $\quad k_i' G k_j = 0$

$$AG^2 I B' = 0 \Rightarrow AB' = 0$$

$$X G' k_i (k_i' G k_i)^{-1} k_i' G X' X G' k_j (k_j' G k_j)^{-1} k_j' G X' = 0$$

که شرط کافی برای صفر بودن آن $k_i' G X' X G' k_j = 0$ است . از طرفی چون $k_j'\beta$ قابل برآورد است $k_j' = t_j' X$ و بنابراین شرط فوق

$$k_i' G X' X G' t_j = k_i' G X' t_j = k_i' G k_j = 0$$

(**)

MICRO

$\text{Cov}(k_i'\beta, k_j'\beta)$

Subject : Date

سپس ~~(**) شرط استقلل~~ $q_i$ و $q_j$ است، و لذا به ازای $i=1,\dots,r$

$$(K'GK)^{-1} = diag\{(k_i' G k_i)^{-1}\}$$

و $Q$ در این صورت به صورت

$$Q = \sum_{i=1}^{r(X)} \tilde{B}^{\circ\prime} k_i (k_i' G k_i)^{-1} k_i' \tilde{B}^{\circ}$$

$$= \sum_{i=1}^{r(X)} \frac{(k_i' \tilde{B}^{\circ})^2}{k_i' G k_i} = \sum_{i=1}^{r(X)} q_i \overset{*}{=} SSR$$

~~از عرفی می دانیم~~ ~~$Cov(k_i' B^{\circ}, k_j' B^{\circ}) = k_i' G k_j \sigma^2$~~

$$Cov(k_i' \tilde{B}^{\circ}, k_j' \tilde{B}^{\circ}) = k_i' G k_j \sigma^2$$

سپس از (*) استقلل $k_i' \tilde{B}^{\circ}$ و $k_j' \tilde{B}^{\circ}$ نیز نتیجه می شود. لذا وقتی $k'\tilde{B}$ شامل $r(X)$ تابع مستقل خطی $k_i' \tilde{B}$ ، $i=1,\dots,r(X)$ هستند و $k_i' \tilde{B}$ ها مستقلند آن گاه صورت کسر مجموع مربعات $Q$ برای آزمون کردن $k'\tilde{B}=0$ یعنی SSR است یک برای $\sum_{i=1}^{r} q_i$ است وقتی فرضیه $k_i' \tilde{B}=0$ ، $i=1,\dots,r(X)$ آزمون می شوند

سپس وقتی $k_i' \tilde{B}$ قابل برآورد باشند برای $i=1,\dots,r(X)$ و

① ( $k_i' = k_i' H$ ، $k_i' G k_j = 0$ For $i \neq j$
، $k_i' \tilde{B}$ ها مستقل خطی اند آن گاه )

$$F(H) = \frac{Q}{r\hat{\sigma}^2} = \frac{SSR}{r\hat{\sigma}^2} \quad H: k'\tilde{B} = 0$$

$$F(H_i) = \frac{q_i}{\hat{\sigma}^2} \qquad H_i : k_i' \tilde{B} = 0$$

که $Q = SSR = \sum_{i=1}^{r(X)} q_i$ (فقط در این حالت ①) مثال بررسی شود.

MICRO

Scanned with CamScanner

Subject : تحلیل رگرسیونی

Date

# Restricted models مدلهای محدود شده

مدل کلی به صورت

$$y = X\beta + \varepsilon \qquad var(\varepsilon) = \sigma^2 I \qquad E(\varepsilon) = 0$$

را در نظر بگیرید که ممکن است رتبه کامل یا غیر کامل باشد. اما حالتهایی پیش می آید که بین عناصر $\beta$ رابطه‌ای برقرار است مثلاً $P'\beta = \delta$ که آن گاه به این مدل با این محدودیت مدل محدود شده می گویند.

$$\begin{cases} y = X\beta + \varepsilon & var(\varepsilon) = \sigma^2 I \quad E(\varepsilon) = 0 \\ P'\beta = \delta & r(P') = q < k+1 \quad , \quad r(P') > r(X) \end{cases}$$

$P'$ : $q \times (k+1)$

حالت کلی

$r(X) < q < k+1$ در محاسبات اکثر مشکل بروز می کند

بایه $P$ سطری رتبه کامل باشد.

برآورد $\tilde{\beta}$ : برآوردی که در شرایطی که مدل رتبه غیر کامل باشد بایه $P'\beta$ قابل برآورد باشد)

برای برآورد $\beta$ دیدیم باید $(y - X\beta)'(y - X\beta)$ را مینیمم کنیم. اکنون عبارت فوق تحت محدودیت $P'\beta = \delta$ مینیمم شود

$$\min (y - X\beta)'(y - X\beta) \qquad (*)$$
$$P'\beta = \delta$$

که مشابه آزمون فرض $K\beta = m$ تابع لاگرانژ را تشکیل می دهیم

$$(y - X\hat{\beta}_r)'(y - X\hat{\beta}_r) + 2\theta'(P'\hat{\beta}_r - \delta)$$

و در نهایت دستگاه معادلات نرمال

$$\begin{cases} X'X\hat{\beta}_r + P\theta = X'y \\ P'\hat{\beta}_r = \delta \end{cases} \Rightarrow \hat{\beta}_r = \hat{\beta}^0 - GP(P'GP)^{-1}(P'\hat{\beta}^0 - \delta)$$

که $\hat{\beta}^0$ مخصوص است بخصوص به فرد است چون $\hat{\beta}^0$ یکتا نیست.

(چون رتبه کامل حالت خاصی از رتبه غیر کامل است در اینجا فرض کردیم مدل رتبه غیر کامل است)

(اگر مدل رتبه کامل باشد $\hat{\beta}_r$ یک برآوردگر است لذا مدل رتبه غیر کامل یکی از جوابهای دستگاه است)

Scanned with CamScanner

Subject : سوال امتحانی $E(\beta_r)$ $V(\beta_r)$ $SSE_r$ Date p/

$E(B_r^\circ) = HB - GP(P'GP)^{-1}(P'HB - \delta)$

$= HB$ $\quad P'B = \delta$, $E(B^\circ)$

$P'H = P'$ چون $E(B^\circ) = HB$ و چون فرض کردیم $P'B$ قابل برآورد است پس

$E(B_r^\circ) = HB$ ← بنابراین : و با استفاده از قضیه زیر :

$var(B_r^\circ) =$

$var\{[I - GP(P'GP)^{-1}P']B^\circ\} = G(X'X - P(P'GP)^{-1}P')G'\sigma^2$

(اثبات (تمرین))

$var(\beta_r^\circ) = var(B^\circ - GP(P'GP)^{-1}P'B^\circ - \text{ثابت}) = Var[(I - GP(P'GP)^{-1}P')B]$

خود توان

$= (I - GP(P'GP)^{-1}P')\, GX'XG'\sigma^2$

$= GX'XG'\sigma^2 - GP(P'GP)^{-1}P'HG'\sigma^2$ ($P' = H$)

$= G(X'X - P(P'GP)^{-1}P')G'\sigma^2$

$A^2 = AA$

$\min(y - X\beta)'(y - X\beta)$ : ⊛ در $B_r^\circ$ اکنون باید بگذاریم

$B^\circ - GP(P'GP)^{-1}(P'B^\circ - \delta)$

$SSE_r = \min(y - X\beta)'(y - X\beta) = (y - XB_r^\circ)'(y - XB_r^\circ)$

$P'\beta = \delta$

$= SSE + (P'B^\circ - \delta)'(P'GP)^{-1}(P'B^\circ - \delta)$ ← سپس بر $G$ پایا

$E_r = (y - X(B^\circ - GP(P'GP)^{-1}(P'B^\circ - \delta))'(y - X(B^\circ - GP(P'GP)^{-1}(P'B^\circ - \delta))$

$= (y - XB^\circ)'(y - XB^\circ) + (P'B^\circ - \delta)'(P'GP)^{-1}\underbrace{P'G'X'X}_{P'}GP(P'GP)^{-1}(P'B^\circ - \delta)$ ($H$)

$= SSE + (P'B^\circ - \delta)'(P'GP)^{-1}(P'B^\circ - \delta)$ ($I$)

$X'$ $A$ $X$

$E(SSE_r) = (n - r(X))\sigma^2 + \sigma^2 q = \sigma^2(n - r(X) + q)$

©MICRO

$E(X'AX) = tr(A\Sigma) + \mu'A\mu = \sigma^2 tr(I_q) + (P'B^\circ - \delta)(P'GP)^{-1}(P'B^\circ - \delta)$

$(P'B^\circ - \delta)'(P'GP\sigma^2)$ $\quad (P'_{\cdot} \cdot GP +$

Scanned with CamScanner

Subject : Date

و بنابراین برآورد واریانس برای مدل محدود شده به قید $p'\beta = \delta$ عبارت است از :

$$\hat{\sigma}^2_r = \frac{SSE_r}{n - r(X) + q} \quad \text{(برآورد ناریب واریانس)} \quad \star$$

نکته : مقدار الصقا قابل برآورد بودن در مدل با محدودیت با مدل بدون محدودیت یکی در قبل تفاوتی فرقی نخواهد کرد. یعنی اگر $k'\beta$ یک در مدل بدون محدودیت قابل برآورد باشد در مدل با محدودیت قابل برآورد است و همچنین باید از محدودیت تبعیت کند یعنی $k'\beta$ باید از $p'\beta = \delta$ تبعیت کند.

مثال : فرض کنید $k'\beta = \mu + \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$ و $p'\beta = \delta \Rightarrow \alpha_1 - \alpha_2 = 0$

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$$

$$Y_{11} = \mu + \alpha_1 + \varepsilon_{11} \qquad Y_{21} = \mu + \alpha_2 + \varepsilon_{21}$$
$$Y_{12} = \mu + \alpha_1 + \varepsilon_{12} \qquad Y_{22} = \mu + \alpha_2 + \varepsilon_{22}$$

بدون توجه به قید محدودیت :

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \Rightarrow k' = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad X'X = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$H = GX'X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad k'H = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = k'$$

پس $k'\beta$ قابل برآورد

با در نظر گرفتن محدودیت :

$$\alpha_1 = \alpha_2 \rightarrow k'\beta = \mu + \alpha_1$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{k'} \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \mu + \alpha_1 \quad \text{or} \quad k'\beta = \mu + \alpha_2$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{k'} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{H} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{k'}$$

پس با در نظر گرفتن محدودیت هم قابل برآورد است.

یعنی با توجه به محدودیت فقط شکل $k'\beta$ عوض شد ولی قابل برآورد بودن تغییری نمی‌کند.



Scanned with CamScanner

به صورت کلی می‌توان هر تابع قابل آورد را به صورت $k'\beta$ برای توان در مدل با محدودیت

به صورت $(p'\beta - \delta)'\lambda + k'\beta$ تغییر داده شود که در نحوه اعمال تابعی متناظر بر حسب $\beta$ باشد (باید $\lambda'\delta = 0$ باشد که در آن $\lambda$ می‌تواند هر بردار با بعد $\delta = 0$ است)

که در این صورت $k'\beta$ تبدیل شود به:

$$k'\beta + \lambda'p'\beta = (k' + \lambda'p')\beta \Rightarrow$$

(تابعی از $\beta$ و قابل برآورد) — (ضرب توابع قابل برآورد) — (قابل برآورد) — (قابل برآورد)

$\Rightarrow$ که به این معنی است، تابع فوق در مدل بدون محدودیت هم قابل برآورد است.

آزمون فرض در مدل محدود شده

$$\begin{cases} y = X\beta + \varepsilon & E(\varepsilon) = 0 \quad var(\varepsilon) = \sigma^2 I \\ p'\beta = \delta & \text{فرض کنید مدل محدود شده است و فرض} \end{cases}$$

$$H_0 : k'\beta = m$$

می‌خواهیم در این مدل آزمون کنیم. دقت کنید در اینجا باید دو شرط برقرار باشد:

۱) $k'\beta$ برآوردنی باشد که $H_0$ قابل آزمون باشد.

۲) $k'\beta = m$ و $p'\beta = \delta$ سازگار باشد.

(مثلاً $H_0 : \alpha_1 - \alpha_2 = 4$ و $p'\beta = \alpha_1 - \alpha_2 = 0$ سازگار نداریم)

اکنون می‌خواهیم عبارت $(y - X\beta)'(y - X\beta)$ را تحت دو عبارت $k'\beta = m$ و $p'\beta = \delta$ مینیمم کنیم:

$$SSE_{r,H} = \min (y - X\beta)'(y - X\beta)$$

دو شرط را ادغام می‌کنیم

$$\begin{cases} p'\beta = \delta \\ k'\beta = m \end{cases} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} p' \\ k' \end{pmatrix}}_{Q'}\beta = \underbrace{\begin{pmatrix} \delta \\ m \end{pmatrix}}_{l} \rightarrow Q'\beta = l$$

چون $p'$ و $k'$ هر دو سطری رتبه کامل هستند پس سطرهای $Q'$ مستقل خطی‌اند و $Q'$ سطری رتبه کامل

و چون فرض کردیم $k'\beta$ و $p'\beta = \delta$ قابل برآوردند $Q'\beta$ قابل برآورد است.

Subject :

Date

$$SSE_{r,H} = \min (\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\beta})'(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\beta}) \qquad Q'\underset{\sim}{\beta} = \underset{\sim}{l}$$

پس

که مشابه قبل پس از شکل لاگرانژ :

$$\underset{\sim}{\beta}^{\circ}_{r,H} = \underset{\sim}{\beta}^{\circ} - GQ(Q'GQ)^{-1}(Q'\underset{\sim}{\beta}^{\circ} - \underset{\sim}{l})$$

و مشابه قبل :

$$SSE_{r,H} = SSE_r + (Q'\underset{\sim}{\beta}^{\circ} - \underset{\sim}{l})'(Q'GQ)^{-1}(Q'\underset{\sim}{\beta}^{\circ} - \underset{\sim}{l})$$

که می‌توان نشان داد

$$SSE_{r,H} = \underbrace{SSE_r}_{SSE+*} + A$$

و فرض $H_0 : K'\underset{\sim}{\beta} = \underset{\sim}{m}$ را می‌توان بر اساس آماره زیر آزمون کرد :

$$F(H_r) = \frac{(SSE_{r,H} - SSE_r)/s}{\underbrace{SSE_r}/n-r(x)+q} \overset{H_0}{\sim} F(s, n-r(x)+q) \qquad \hat{\sigma}^2_r = \frac{SSE_r}{n-r+q}$$

که اگر $H_0$ درست باشد می‌توان نشان داد توزیع $F$ غیر مرکزی است .

نکته : در فرض $H_0 : K'\underset{\sim}{\beta} = \underset{\sim}{m}$ آزمون قابل آزمون بصورت ~~آزمون~~ قابل آزمون در مدل بدون محدودیت، قابل آزمون در مدل با محدودیت می‌باشد به شرطی که محدودیت مدل با فرض سازگاری داشته باشد

مثال :

$$K'\underset{\sim}{\beta} = \mu + \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) \Rightarrow$$ در مدل بدون محدودیت قابل برآورد است

الف) در مدل بدون محدودیت قابل آزمون است $\Rightarrow K'\underset{\sim}{\beta} = \mu + \frac{\alpha_2}{2}$ $\Leftarrow$ $p'\underset{\sim}{\beta} = \delta \equiv \alpha_1 = 0$ تحت محدودیت

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij} \qquad i = 1, \dots, t \qquad j = 1, \dots, r$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \overset{r}{\cdots} & \vdots \\ 1 & 0 & & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & & 1 \end{bmatrix} \overset{r}{\Big\}} \qquad X'X = \begin{pmatrix} tr & r & \cdots & r \\ \hline r & r & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & r & 0 \\ r & 0 & 0 & r \end{pmatrix} \qquad r(X'X) = t$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \frac{1}{r} I \end{pmatrix} \rightarrow H = GX'X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \frac{1}{r} I & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} tr & r & \cdots & r \\ r & r & & \\ \vdots & & & \\ r & & & r \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & I_{t} & \end{pmatrix}$$

©MICRO

Scanned with CamScanner

Subject : Date

$$k' = (1 \; 0 \; \tfrac{1}{2} \; 0 \; \dots \; 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & & 0 \\ \vdots & 0 & & 1 \end{pmatrix} \neq k'$$

$H$

اگر $\mu + \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$ $\quad k' = (1 \; \frac{1}{2} \; \frac{1}{2} \; 0 \; \dots \; 0)$

$$k'H = (1 \; \tfrac{1}{2} \; \tfrac{1}{2} \; 0 \; \dots \; 0) \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 1 & & \\ \vdots & & 1 \end{pmatrix} = (1 \; \tfrac{1}{2} \; \tfrac{1}{2} \; 0 \; \dots \; 0) = k'$$

در اینجا تابل برآورد است (حتی در مدل بدون محدودیت هم برآورد محدودیت)

نکته: اگر $p'\underset{\sim}{\beta} = \underset{\sim}{\delta}$ تابل برآورد نباشد (یعنی نتوانیم ماتریس $T$ پیدا کنیم که $T'X = P$) محدودیت روی SSE کمیچ تأثیری ندارد و جواب $(\underset{\sim}{Y} - X\underset{\sim}{\beta})'(\underset{\sim}{Y} - X\underset{\sim}{\beta})$ را مینیمم می‌کند $\underset{\sim}{\beta}^0$ است

$$\underset{\sim}{B}^0_r = \underset{\sim}{B}^0 \quad \text{or}$$

و آماره آزمون هیچ تغیری نخواهد کرد.

$$\begin{cases} \underset{\sim}{B}^0_r = \underset{\sim}{B}^0 + (H - I)Z_1 \longrightarrow p'(H-I)Z_1 = \delta - p'GX'y \\ p'\underset{\sim}{B}^0 = \delta \rightarrow p'\underset{\sim}{B}^0 + p'(H-I)Z_1 = \delta \end{cases}$$

انواع محدودیت:

$\underset{\sim}{B}^0$ برداری از محدودیت

دیدیم یکی از مشکلات اصلی در مدلهای غیر رتبه کامل این است، معادلات نرمال $X'X\underset{\sim}{B}^0 = X'\underset{\sim}{y}$ دارای جواب منحصر بفرد نیست. پس ممکن است محدودیت روی پارامترها طوری تعریف شود که معادلات جواب منحصر بفرد داشته باشیم پس به طور کلی می‌توان گفت محدودیتها می‌توانند به صورت زیر باشند:

انواع محدودیتها:

- محدودیت طبیعی: $p'\underset{\sim}{\beta} = \underset{\sim}{\delta}$
- محدودیت فرض: $k'\underset{\sim}{\beta} = \underset{\sim}{m}$
- محدودیت روی جوابها

مثلاً فرض کنید $Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_j$ و $i = 1,2,3$ و $j = 1,2$ معادله نرمال ~~مقدار~~: را تشکیل می‌دهیم:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad X'X = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad X'\underset{\sim}{y} = \begin{bmatrix} y_{..} \\ y_{1.} \\ y_{2.} \\ y_{3.} \end{bmatrix}$$

©MICRO

Scanned with CamScanner

Subject : Date

$$X'X\hat{\beta}^{\circ} = X'y \Rightarrow \begin{cases} 6\mu^{\circ} + 2\alpha_1^{\circ} + 2\alpha_2^{\circ} + 2\alpha_3^{\circ} = y_{\circ\circ} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} y_{ij} \\ 2\mu^{\circ} + 2\alpha_1^{\circ} = y_{1\circ} = y_{11} + y_{12} \quad \bar{y}_1 = y_{1\circ}/2 \\ 2\mu_{\circ} + 2\alpha_2^{\circ} = y_{2\circ} = y_{21} + y_{22} \quad \bar{y}_2 = y_{2\circ}/2 \\ 2\mu^{\circ} + 2\alpha_3^{\circ} = y_{3\circ} = y_{31} + y_{32} \quad \bar{y}_3 = y_{3\circ}/2 \end{cases}$$

بدیهی است، بینهایت جواب داریم چون ۳ پارامتر معلوم و چهار پارامتر مجهول داریم اکنون

فرض کنید آن دسته از جوابهای $X'X$ که بینهایت آوردیم، شرط $\alpha_1^{\circ} + \alpha_2^{\circ} + \alpha_3^{\circ} = 0$ را برقرار کنند. پس می توان گفت در اینصورت تنها جواب منحصر بفرد برای این دستگاه

$$\mu = \bar{y} \quad \alpha_1^{\circ} = \bar{y}_1 - \bar{y} \quad \alpha_2^{\circ} = \bar{y}_2 - \bar{y} \quad \alpha_3^{\circ} = \bar{y}_3 - \bar{y}$$

$$6\mu^{\circ} = y_{1\circ} + y_{2\circ} + y_{3\circ} \Rightarrow \mu^{\circ} = \bar{y} \Rightarrow 2\alpha_1^{\circ} = y_{1\circ} - 2\bar{y} \Rightarrow \alpha_1^{\circ} = \bar{y}_1 - \bar{y}$$

پس به طور کلی حیه محدودیتی را روی دستگاه معادلات $X'X\hat{\beta} = X'y$ در مدل رتبه غیر کامل بگذاریم تا $\hat{\beta}$ یکتایی بدست آید. یعنی ناگزیریم محدودیتهایی روی فضای $\hat{\beta}^{\circ}$ وضع کنیم.

برای مثال فرض کنید $C'\hat{\beta}^{\circ} = \gamma$ می خواهیم احمال کنیم که یکدیسته جواب داشته باشد

اکنون می خواهیم $(y - X\hat{\beta})'(y - X\hat{\beta})$ را تحت محدودیت $C'\hat{\beta}^{\circ} = \gamma$ مینیم کنیم از ضرایب لاگرانژ استفاده می کنیم:

$$\begin{cases} X'X\hat{\beta}^{\circ} + C\theta = X'y \\ C'\hat{\beta}^{\circ} = \gamma \end{cases}$$

بنابراین:

$$\begin{pmatrix} X'X & C \\ C' & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{\beta}^{\circ} \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X'y \\ \gamma \end{pmatrix}$$

↳ می خواهیم نامزده باشد یک معکوس داشته باشد باید شرایطی $C'$ مستقل از $X'X$ باشد تقریباً شرایطی $C'$ به گونه‌ای باشد که به $X'X$ توانائی باعث میشود که ماتریس فوق رتبه کامل باشد

پس $C'$ می تواند به صورت $C' = T'X$ باشد یعنی $C'\hat{\beta} = \gamma$ باید طوری باشد که $C'\hat{\beta}$ قابل برآورد باشد

Scanned with CamScanner

Subject : Date

لذا در تقابل شرط حد محدودیت ما را به سمت جواب منحصر به فرد می برد بطوریکه با به ازای c مناسب انتخاب شود تا عکس نقیض قضیه فوق وجود داشته باشد.

حالت خاصی را در نظر می گیریم و این c را فرض می کنیم (با توجه به مسئله ای که داریم فقط باید دقت داشته باشیم که c را طوری انتخاب کنیم که ماتریس فوق را نامنفرد کند و $B^{\circ}$ قابل بدست آوردن باشد) ابتدا حالت خاص بررسی می شود.

حالت خاص: قرار می دهیم $B^{\circ}_i = 0$ : (ادامه صفحه ۵۵)

در داده های متقارن (تقارن برای همه سطوح تیمارها یکسان باشد) دیدیم (در مثال قبل یک طرح متقارن بود) محدودیت $\sum \alpha_i^{\circ} = 0$ به راحتی قابل استفاده و جواب مشخص می شوند در طرح های غیر متقارن به این راحتی نمی باشد و فرض کنیم $p-r$ عنصر از $B^{\circ}$ برابر صفر است که r درجه رتبه X و p تعداد سطرهای X است و سپس برای آنها ماتریس $\begin{bmatrix} X'X & C \\ C' & 0 \end{bmatrix}$ را پیدا کنیم که نامنفرد باشد

سپس مرحله اول $X'X$ تشکیل می دهیم و رتبه X را مشخص می کنیم. مثال فرض کنید معادلات نرمال به صورت زیر باشند:

$$6\mu^{\circ} + 3\alpha_1^{\circ} + 2\alpha_2^{\circ} + \alpha_3^{\circ} = 504$$
$$3\mu^{\circ} + 3\alpha_1^{\circ} = 300$$
$$2\mu^{\circ} + 2\alpha_2^{\circ} = 172$$
$$\mu^{\circ} + \alpha_3^{\circ} = 32$$

قید $\alpha_3^{\circ} = 0$

$4-3=1 \Rightarrow \alpha_3^{\circ}=0$

$p=4, r=3 \rightarrow p-r=1$

$\Rightarrow \alpha_3^{\circ} = 0$

که مشخص است طرح غیر متقارن بوده است.

مرحله ۱:

$$X'X = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

$r(X'X) = 3 = r$

$p = 4$

مرحله دوم: $p-r$ سطر و ستون متناظر آن را از $X'X$ حذف می کنیم و ماتریس حدید که رتبه کامل است $(X'X)_m$ بنامید. سپس سطر و ستونهای متناظرش را حذف کنید که ماتریس حاصل رتبه کامل شود.

Scanned with CamScanner

Subject :

Date

مرحله ۲ :

$$(X'X)_m = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

در مرحله سوم متناظر با سطرهای که از $X'X$ حذف کرده‌اید عناصر $X'y$ را حذف نکنید و $(X'y)_m$ بنا بسید.

مرحله ۳ :

$$(X'y)_m = \begin{bmatrix} 504 \\ 300 \\ 172 \end{bmatrix}$$

در مرحله چهارم $\hat{B}^{\circ}_m$ را که به صورت $\hat{B}^{\circ}_m = [(X'X)_m]^{-1}(X'y)_m$ است محاسبه کنید

مرحله ۴ :

$$\hat{B}^{\circ}_m = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & \frac{4}{3} & 1 \\ -1 & 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 504 \\ 300 \\ 172 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 68 \\ 54 \end{bmatrix}$$

در مرحله ۵ در بردار $\hat{B}^{\circ}$ عنصر متناظر با سطر حذف شده را صفر قرار دهید و بقیه عناصر همان مقادیر محاسبه شده در $\hat{B}^{\circ}_m$ را قرار دهید.

مرحله ۵ :

$$\hat{B}^{\circ\prime} = [32 \quad 68 \quad 54 \quad 0]$$

در مرحله ۶ ، عناصر $(X'X)^{-1}_m$ را در یک ماتریس قرار دهید و به جای سطر و ستون حذف شده در این ماتریس صفر اضافه کنید ماتریس حاصل $G$ در دترمینان ضرب یافته $X'X$ است

مرحله ۶ :

$$G = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4/3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

همین مثال را می‌توان به صورت زیر نیز انجام داد :

$$(X'X)_m = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(سطر اول و ستون اول حذف شود)

$$(X'y)_m = \begin{pmatrix} 504 \\ 172 \\ 32 \end{pmatrix}$$



Scanned with CamScanner

Subject : Date

$$\underset{\sim}{B}^{\circ}_{m} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 504 \\ 172 \\ 32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ -14 \\ -68 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{B}^{o\prime} = [100 \quad 0 \quad -14 \quad -68]$$

$$G = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

اول صفحه بعد

حل

اکنون فرض کنید قید به صورت $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ باشد

$$X'X = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$P'\underset{\sim}{B}^{*} = 0 \Rightarrow P' = [0 \ 1 \ 1 \ 1]$

که $P'B$ قابل برآورد است

حال با اعمال قید θ به عنوان ضریب قید

داریم: معادلات نرمال: $\begin{pmatrix} X'X & P \\ P' & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B^{\circ} \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X'y \\ 0 \end{pmatrix}$

$r = 3$

$X'X$ $\quad P$

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mu^{\circ} \\ \alpha_1^{\circ} \\ \alpha_2^{\circ} \\ \alpha_3^{\circ} \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 504 \\ 300 \\ 172 \\ 321 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$P'$

$p = 4$
$r = 3$

$(X'X)_m$ ←

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \mu^{\circ} \\ \alpha_1^{\circ} \\ \alpha_2^{\circ} \\ \alpha_3^{\circ} \\ \theta \end{bmatrix} = \frac{1}{54}\begin{bmatrix} 11 & -5 & -2 & 7 & -18 \\ -5 & 17 & -4 & -13 & 18 \\ -2 & -4 & 20 & -16 & 18 \\ 7 & -13 & -16 & 29 & 18 \\ -18 & 18 & 18 & 18 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 504 \\ 300 \\ 172 \\ 32 \\ 0 \end{bmatrix}$$

I

$$\Rightarrow \underset{\sim}{B}^{o\prime} = \left[\frac{۲۱۸}{۳} \quad \frac{۸۲}{۳} \quad \frac{۴۰}{۳} \quad -\frac{۱۲۲}{۳}\right]$$

که قید فوق یعنی $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ را ارضا نمی‌کند. پس به طور کلی این قیدها را نباید

MICRO

Scanned with CamScanner

(۵۴) $P'\underset{\sim}{B}=\delta \Rightarrow$ محدودیت‌های برآورد نشدنی $P'\underset{\sim}{\beta}$ : $\underset{\sim}{\beta}^{\circ}=GX'y+(\underbrace{GX'X}_{H}-I)Z$ $\leftarrow (X=Gy+(GA-I)z)$

$P'\underset{\delta}{\underbrace{\underset{\sim}{\beta}^{\circ}}}=P'GX'y+P'(H-I)Z$

Subject : Date

$$P'(H-I)Z_1=\delta-P'GX'y \quad (\star)$$

محدودیت روی مدل — محدودیت روی پارامتر

مثال : فرض کنید $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0$ ، $\alpha_3^{\circ}=0$

$P'=[0\ 1\ 1\ 1]$

دیم برای قید $\alpha_3=0$ با حذف سطر دستون سوم از $X'X$ و روش مرحله‌ای رسیم

$$\begin{cases} 6\mu^{\circ}+3\alpha_1^{\circ}+2\alpha_2^{\circ}+\alpha_3^{\circ}=504 \\ 3\mu^{\circ}+3\alpha_1^{\circ}=300 \Rightarrow \alpha_3^{\circ}=68 \\ 2\mu^{\circ}+2\alpha_2^{\circ}=172 \Rightarrow \alpha_2^{\circ}=54 \\ \mu^{\circ}+\alpha_3^{\circ}=32 \xrightarrow{\alpha_3^{\circ}=0} \mu^{\circ}=32 \end{cases}$$

از این تخمین رسیدیم که $\underset{\sim}{B}^{\circ\prime}=[32\ 68\ 54\ 0]$

ماتریس H : از مرحله‌ی G بدست آمد :

$$H=GX'X=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

اکنون از رابطه $(\star)$ صفحه‌ی قبل :

$$\underset{\sim}{B}^{\circ}_{r,0}=\underbrace{\begin{bmatrix}32\\68\\54\\0\end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{B}^{\circ}_{\circ}}+\underbrace{\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&-1\\0&0&0&-1\\0&0&0&-1\end{bmatrix}}_{(H-I)}Z_1$$

و از رابطه $(\star\star)$

$$\underset{1\times4}{\begin{bmatrix}0&1&1&1\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&-1\\0&0&0&-1\\0&0&0&-1\end{bmatrix}Z_1=0-\begin{bmatrix}0&1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}32\\68\\54\\6\end{bmatrix}$$

$$\underset{1\times4}{\begin{bmatrix}0&0&0&-3\end{bmatrix}}Z_1=\begin{bmatrix}+122\end{bmatrix}$$

$$(H-I)\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\\\frac{122}{3}\end{pmatrix}_{4\times1}$$

$$\Rightarrow Z_1'=\begin{bmatrix}Z_1&Z_2&Z_3&\frac{122}{3}\end{bmatrix}$$

(۱۱) دن دلیل :

$$\underset{\sim}{B}^{\circ}_{r,0}=\begin{bmatrix}32\\68\\54\\0\end{bmatrix}+\frac{122}{3}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴۱/۸\\۸۲/۳\\۴۰/۳\\-۱۲۲/۳\end{bmatrix}$$

©MICRO

$\underset{\sim}{B}^{\circ}_{r,0}$ ، با در نظر گرفتن $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0$ و قید اضافه $\alpha_3^{\circ}=0$ و با قرار دادن رابطه (۵)

همان $\underset{\sim}{B}^{\circ}$ برای قید برداری $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0$ می‌باشد

Scanned with CamScanner

Subject :

Date

ویک مثال دیگر فرض کنید مقدار روی یا سمبه صورت $3\alpha_1^\circ + 2\alpha_2^\circ + \alpha_3^\circ = 0$ باشد که باید
بعد از جمع شدن جواب خواهد شد که جوابها $\underset{\sim}{B}^\circ_{r,0}$ تغییری نخواهند کرد. (محدودیت روی مدل $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0$)
معادله نرمال به صورت زیر بود:

$$\begin{cases} 6\mu^\circ + 3\alpha_1^\circ + 2\alpha_2^\circ + \alpha_3^\circ = 504 \\ 3\mu^\circ + 3\alpha_1^\circ = 300 \Rightarrow \alpha_1^\circ = 16 \\ 2\mu^\circ + 2\alpha_2^\circ = 172 \Rightarrow \alpha_2^\circ = 2 \\ \mu^\circ + \alpha_3^\circ = 32 \Rightarrow \alpha_3^\circ = -52 \end{cases} \xrightarrow{\text{با قید } \alpha_1^\circ+\alpha_2^\circ+\alpha_3^\circ=0} \mu^\circ = 84$$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{B}^\circ = [84 \;\; 16 \;\; 2 \;\; -52]$$

اکنون می خواهیم تحت محدودیت با کاری یا سمبه محدودیت $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0$ روی مدل داشته باشیم.
سن باید از رابطه ① استفاده کنیم:

$$\underset{\sim}{B}^\circ_{r,0} = \underset{\sim}{B}^\circ_0 + (H-I)Z_1 \quad ①$$

~~از $3\alpha_1^\circ + 2\alpha_2^\circ + \alpha_3^\circ = 0$ به صورت زیر~~ :

$$X'X = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & \cdot & \cdot \\ 2 & \cdot & 2 & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{B}^\circ = GX'y \Rightarrow \begin{bmatrix} 84 \\ 16 \\ 2 \\ -52 \end{bmatrix}_{4\times 1} = G \begin{bmatrix} 504 \\ 300 \\ 172 \\ 32 \end{bmatrix}_{4\times 1} \qquad G = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$504/6 \quad 96/6 \quad 12/6 \quad 312/6$$

$$H = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & 5 \end{bmatrix} \qquad H-I = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 0 & -1/2 & -1/3 & -1/6 \\ 0 & -1/2 & -1/3 & -1/6 \\ 0 & -1/2 & -1/3 & -1/6 \end{bmatrix}$$

و درنهایت

$$\underset{\sim}{B}^\circ_{r,0} = \begin{bmatrix} 84 \\ 16 \\ 2 \\ -52 \end{bmatrix} + \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}$$

$P'\underset{\sim}{B} = \delta \rightarrow P' = [0 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1] \qquad \delta = 0$

$$P'(H-I)Z_1 = \delta - P'GX'y \qquad \text{می دانیم}$$

($P'GX'y = \underset{\sim}{B}^\circ$)

$$[0 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1]\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \end{bmatrix} Z_1 = -[0 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1]\begin{bmatrix} 84 \\ 16 \\ 2 \\ -52 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow -(3z_2 + 2z_3 + z_4) = 68$$



Scanned with CamScanner

Subject : Date

فرض کردیم $C'\underset{\sim}{B}^{\circ} = 0$ ، ابتدا با توجه به قید مذکور، دستگاه معادلات نرمال به صورت

$$\begin{pmatrix} X'X & C \\ C' & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \underset{\sim}{B}^{\circ} \\ \underset{\sim}{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X'\underset{\sim}{y} \\ \underset{\sim}{0} \end{pmatrix}$$

ویرایش بعنی $B_i^{\circ} = 0$

می‌شود اکنون با در نظر گرفتن ماتریس $R$ به طوری که $R'R = I$ ، $C'R = [0 \; I]$ (p-r) (p-r)×r

طرفین معادله بالا را در $\begin{bmatrix} R' & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ ضرب کنید

$$\begin{bmatrix} R' & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X'X & C \\ C' & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \underset{\sim}{B}^{\circ} \\ \underset{\sim}{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R' & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X'\underset{\sim}{y} \\ \underset{\sim}{0} \end{bmatrix}$$

از طرفی چون $\begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R' & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ معادله فوق را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\begin{bmatrix} R' & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X'X & C \\ C' & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R' & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \underset{\sim}{B}^{\circ} \\ \underset{\sim}{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R' & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X'\underset{\sim}{y} \\ \underset{\sim}{0} \end{bmatrix}$$

در نتیجه می‌شود:

$$\begin{bmatrix} R'XXR & R'C \\ C'R & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R'\underset{\sim}{B}^{\circ} \\ \underset{\sim}{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R'X'y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (*)$$

اکنون فرض کنید $R'X'XR$ را به صورت ماتریس بلوکی زیر در نظر بگیریم

$$R'X'XR = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$$

$$R'\underset{\sim}{B}^{\circ} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{B}_1^{\circ} \\ \underset{\sim}{B}_2^{\circ} \end{bmatrix} \qquad R'X'\underset{\sim}{y} = \begin{bmatrix} (X'y)_1 \\ (X'y)_2 \end{bmatrix}$$

به طوری که $Z_{11}$ رتبه کامل است و $Z_{11} = (X'X)_m$

و $\underset{\sim}{B}_1^{\circ}$ از معادلات اصلاح شده به دست آمده و $\underset{\sim}{B}_2^{\circ}$ ، $B_i^{\circ}$ ها برابر با صفر است



Scanned with CamScanner

Subject :

Date

سی معادله ① به صورت

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & 0 \\ Z_{21} & Z_{22} & I \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (X'y)_1 \\ (X'y)_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

می شود که در نهایت از حل آن:

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_1^0 \\ \hat{\beta}_2^0 \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11}^{-1} & 0 & -Z_{11}^{-1}Z_{12} \\ 0 & 0 & I \\ -Z_{21}Z_{11}^{-1} & I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (X'y)_1 \\ (X'y)_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

و بنابراین

$$\hat{\beta}_1^0 = Z_{11}^{-1}.(X'y)_1 \quad (۲)$$

اکنون معکوس تعمیم یافته موارد که در ② را می توان پیدا کرد (معکوس تعمیم یافته ای که از ابتدا در $\hat{\beta}^0 = GX'y$ به کار بردیم) برسیم، داریم

$$R'\hat{\beta}^0 = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1^0 \\ \hat{\beta}_2^0 \end{bmatrix} \quad , \quad R'R = I \quad , \quad \hat{\beta}_1^0 = Z_{11}^{-1}(X'y)_1$$

$$\hat{\beta}^0 = RR'\hat{\beta}^0 = R\begin{bmatrix} \hat{\beta}_1^0 \\ \hat{\beta}_2^0 \end{bmatrix} = R\begin{bmatrix} Z_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} R'X'y \quad (۳)$$

$$\Rightarrow G = R\begin{bmatrix} Z_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} R' \quad (۴)$$

$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0$

$x = Gy + (GA-I)z$

نکته: اگر محدودیت روی مدل داشتیم به طوری که این محدودیت به صورت $P'\beta = \delta$ باشد و $P'\beta$ قابل برآورد باشد آنگاه اگر $P'$ رتبه کامل سطری باشد $r(P') = p - r$ آنگاه باید معادلات زیر حل شوند:

$$\begin{bmatrix} X'X & P \\ P' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}^0 \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'y \\ \delta \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta}_r^0 = \hat{\beta}^0 + (H-I)z_1$$
$$GX'y + (GX'X - I)z_1$$

و حل معادله برآورد BLUE از $\beta$ است البته ممکن است بعضی از $\hat{\beta}_i^0$ ها هم صفر شوند یعنی علاوه بر محدودیت مدل بعضی از مجهولها را هم صفر کنیم که از روش بالا می توان استفاده کرد آنگاه

$$\hat{\beta}_{r_{00}}^0 = \hat{\beta}_0^0 + (H+I)z_1 \quad (۵)$$

→ برای بدست آوردن برآورد پارامترهای محدود شده و متقید نمودن

که برای $\hat{\beta}_0^0$ از رابطه ③ به بعد از رابطه ④ با استفاده از G، H قابل محاسبه است. و $z_1$ از رابطه

Scanned with CamScanner

Subject : $(H-I)\,Z_1$ Date

$$\begin{bmatrix}84\\16\\2\\-52\end{bmatrix} + \frac{1}{6}\begin{bmatrix}0&3&2&1\\0&-3&-2&-1\\0&-3&-2&-1\\0&-3&-2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\z_3\\z_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}84\\16\\2\\-52\end{bmatrix} + \frac{1}{6}\begin{bmatrix}-68\\68\\68\\68\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}۶۸/۳\\۸۴/۳\\۶۰/۳\\-۱۳۴/۳\end{bmatrix}$$

$\underset{\sim}{\beta}^{\circ}$

$$3z_4 + 2z_3 + z_4 = -68$$
$$-2z_2 - 2z_3 - z_4 = 68$$

III

مشاهده می کنیم که از حد سوم حالت درنظر گرفته شده I و II و III یکی می شود

قید رو مدل $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$

سه حالت

| | I | II | III |
|---|---|---|---|
| | بدون قیدرو یا لخ | $\alpha_3^{\circ} = 0$ | $3\alpha_1^{\circ} + 2\alpha_2^{\circ} + \alpha_3^{\circ} = 0$ |

به طور خلاصه می توان گفت اگر $p'\underset{\sim}{\beta} = \underset{\sim}{\delta}$ قیدی با شکل روی مدل وجود دارد

آن گاه اگر $p'\underset{\sim}{\beta}$ قابل برآورد باشد آن گاه می توانیم $\underset{\sim}{\beta}_r^{\circ}$ را به صورت زیر

جواب مدل بدون محدودیت — به دست آوردیم

بصورت برداری $\rightarrow \underset{\sim}{\beta}_r^{\circ} = \underset{\sim}{\beta}^{\circ} - GP(P'GP)^{-1}(P'\underset{\sim}{\beta}^{\circ} - \underset{\sim}{\delta})$

اما اگر $p'\underset{\sim}{\beta}$ قابل برآورد نباشد

$$\begin{cases}\underset{\sim}{\beta}_r^{\circ} = \underset{\sim}{\beta}^{\circ} + (H-I)Z_1\\ p'(H-I)Z_1 = \underset{\sim}{\delta} - p'GX'\underset{\sim}{y}\end{cases}$$

و دیدیم که می توانیم برای راحتی محاسبات قیودی هم خودمان روی پاسخها بگذاریم و در نهایت

$$\underset{\sim}{\beta}_{r,0}^{\circ} = \underset{\sim}{\beta}_0^{\circ} + (H-I)Z_1$$

$\underset{\sim}{\beta}_0^{\circ}$ ای که تحت محدودیت روی پاسخها بدست آمده است

که $\alpha_3^{\circ} = 0$ یا $3\alpha_1^{\circ} + 2\alpha_2^{\circ} + \alpha_3^{\circ} = 0$

©MICRO

Scanned with CamScanner

## مدل تعمیم یافته

مطلب دیگری که ممکن است در بعضی موارد با آن مواجه شویم این است که فرض کنید در مدل

$$\underset{\sim}{y} = X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon}$$

به جای اینکه $var(\underset{\sim}{\varepsilon}) = \sigma^2 I$ باشد:

که فرض کنیم $V$ متقارن و نامنفرد باشد $\rightarrow var(\underset{\sim}{\varepsilon}) = \sigma^2 V$

و فرض کنید مدل رتبه غیر کامل است در این شرایطی خواهیم برآوردگر ارائه دهیم.

چون $V$ ماتریس متقارن نامنفرد است همین خواص را $V^{-1}$ دارد پس داریم هر ماتریس متقارن نامنفرد را می‌توان بصورت $V^{-1} = LL'$ نوشت که $L$ نامنفرد است داریم

$$V = (LL')^{-1} = (L')^{-1}(L^{-1})$$

و مدل اصلی را تغییر دهیم:

$$\underset{\sim}{y} = X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon} \xrightarrow{\text{در } L' \text{ ضرب}} L'\underset{\sim}{y} = L'X\underset{\sim}{\beta} + L'\underset{\sim}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{y}^* = X^*\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon}^*$$

اکنون در مدل جدید:

$$var(y^*) = var(\varepsilon^*) = var(L'\underset{\sim}{y}) = L'\,var(y)\,L$$

طبق فرض در مدل رتبه کامل

$$= L'\sigma^2(LL')^{-1}L = \sigma^2 I$$

پس برای مدل $\underset{\sim}{y}^* = X^*\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon}$ کل شرایط اولیه برقرار است. و همان فرمهای قبل را می‌توان گفت با این تفاوت که بجای $X$ از $X'$ و بجای $y$ از $y'$ استفاده می‌شود. مثلاً دستگاه معادلات نرمال:

$$X'X\underset{\sim}{\beta}^\circ = X'\underset{\sim}{y} \Rightarrow X^{*\prime}X^*\underset{\sim}{\beta}^\circ = X^{*\prime}\underset{\sim}{y}^*$$

Scanned with CamScanner

Subject :

Date

$$\Rightarrow (L'X)'(L'X)\underset{\sim}{B}^{\circ} = (L'X)'(L'\underset{\sim}{y})$$

$$\Rightarrow X'LL'X\underset{\sim}{B}^{\circ} = X'LL'\underset{\sim}{y} \Rightarrow X'V^{-1}X\underset{\sim}{B}^{\circ} = X'V^{-1}\underset{\sim}{y}$$

پس دستگاه معادلات نرمال در اینجا :

$$X'V^{-1}X\underset{\sim}{B}^{\circ} = X'V^{-1}\underset{\sim}{y}$$

می دانیم که این دستگاه بینهایت جواب دارد
و فرض میکنیم $F$ یکی از وارونه های تعمیم یافته $X'V^{-1}X$ باشد داریم

$$\underset{\sim}{B}^{\circ} = FX'V^{-1}\underset{\sim}{y}$$

در بعضی مواقع ممکن است $V$ ویژه باشد به طوری که بتوان بردار $\underset{\sim}{y}$ را به دو مولفه تقسیم کرد :

در این حالت بردار $\underset{\sim}{y}$ را به دو مولفه تقسیم می کنیم :

$$\underset{\sim}{y} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{y_1} \\ A\underset{\sim}{y_1} \end{bmatrix}$$

هیچ ارتباطی بین عناصر وجود ندارد و ماتریس کواریانس آنها ناویژه است

تابع خطی برحسب یکدیگرند (از $\underset{\sim}{y}$)

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}$$

$$V = var(\underset{\sim}{y}) = \begin{pmatrix} var(y_1) & Cov(y_1, Ay_1) \\ Cov(Ay_1, y_1) & var(Ay_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{11}A' \\ A\Sigma_{11} & A\Sigma_{11}A' \end{pmatrix}$$

چون اگر سطر اول را در $A$ ضرب کنیم سطر دوم به دست می آید پس رتبه آن برابر با
پس $V$ یک ماتریس ویژه است پس بردار $\underset{\sim}{y}$ را به صورت زیر
در نظر میگیریم :

$$r(V) = r(\Sigma_{11} \quad \Sigma_{11}A') = r(\Sigma_{11})$$

$$\underset{\sim}{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} I \\ A \end{bmatrix}}_{M} \underset{\sim}{y_1}$$

ماتریس کواریانس ناویژه

ستون رتبه کامل

به طوری که فرض می کنیم

$$\underset{\sim}{y_1} = T\underset{\sim}{B} + \underset{\sim}{\varepsilon}$$

$$var(\underset{\sim}{y_1}) = \sigma^2 \underbrace{\Sigma_{11}}_{\text{ناویژه}}$$

© MICRO

Scanned with CamScanner

M ستونی رتبه کامل $V = MM' \rightarrow r(M) = r(V)$ $\quad X = \begin{pmatrix} T \\ AT \end{pmatrix}$

Subject : $X = MT \rightarrow r(T) = r(X)$ Date .....

طرفین را در M ضرب کنیم $\quad My_1 = MT\beta + M\varepsilon$

$var(My_1) = var(M\varepsilon) = \sigma^2 \underbrace{MM'}_{V} \rightarrow$ (یک ماتریس ویژه است)

حال $\begin{pmatrix} I \\ A \end{pmatrix}(I\ A') = \begin{pmatrix} I & A' \\ A & AA' \end{pmatrix}$ سطر اول در A ضرب کنیم مساوی دوم برابر می‌شود

$r(M) = r(MM')$

می‌توان نشان داد در چنین حالتی که می‌توان بردار $y$ را به دو مولفه تجزیه کرد به صورت فوق

آن گاه یکی از جوابهای دستگاه معادلات :

$$\begin{cases} y = X\beta + \varepsilon \\ var(y) = \sigma^2 V \end{cases} \xrightarrow{\text{یک جواب برای مدل بردار}} \hat{\beta}^{\circ} = (X'V^{-}X)^{-}X'V^{-}y$$

ویژه

حال

$$\begin{cases} y_1 = T\beta + \varepsilon & (1) \\ y = My_1 = \underbrace{MT}_{X}\beta + \underbrace{M\varepsilon}_{\varepsilon} & V = MM' \end{cases}$$

از (1) :

$$T'T\hat{\beta}^{\circ} = T'y_1 \quad (*)$$

معکوس تعمیم یافته V را به صورت $V^{-} = (MM')^{-}$ در نظر می‌گیریم چون قضیه ۲ صدق می‌کند $M'(MM')^{-}M$ نسبت به انتخاب $V^{-}$ یکتاست و چون M ستونی رتبه کامل است $M(M'M)^{-2}M'$ معکوس تعمیم یافته V است

$$M'V^{-}M = M'(MM')^{-}M = M'M(M'M)^{-2}M'M = I$$

و از (2) :

$$T'ITB^{\circ} = T'Iy_1$$

$$T'M'V^{-}MTB^{\circ} = T'M'V^{-}My_1$$

$$X'V^{-}X\hat{\beta}^{\circ} = X'V^{-}y \quad : MT = X \text{ از طرفی } r(X) = r(T)$$

$$\Rightarrow \hat{\beta}^{\circ} = (X'V^{-}X)^{-}X'V^{-}y$$

که در آن $V^{-}$ هر معکوس تعمیم یافته از V می‌تواند باشد و $(X'V^{-}X)^{-}$ نیز هر معکوس تعمیم یافته از $X'V^{-}X$ می‌باشد - در این حالت $SSE = y'y - \hat{\beta}^{\circ\prime}T'y_1$

اکنون با در نظر گرفتن $SSE = y'V^{-}y - \hat{\beta}^{\circ\prime}X'V^{-}y$ ، $X = MT$ ، $y = My_1$

$$E(SSE) = E(y_1'y - \hat{\beta}^{\circ\prime}T'y_1) = r(y_1) - r(T)\sigma^2 = [r(M) - r(T)]\sigma^2 \rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{SSE}{r(V) - r(X)}$$

Scanned with CamScanner

Subject : Date

در حالت کلی :

$$SSE = \underset{\sim}{y}_1'\underset{\sim}{y}_1 - \underset{\sim}{\beta}^{0\prime} T' \underset{\sim}{y}_1$$

اکنون با در نظر گرفتن $X = MT \Rightarrow \underset{\sim}{y} = M\underset{\sim}{y}_1$

$$SSE = \underset{\sim}{y}' V^{-} \underset{\sim}{y} - \underset{\sim}{\beta}^{0\prime} X' V^{-} \underset{\sim}{y}$$

$$E(SSE) = E(\underset{\sim}{y}_1'\underset{\sim}{y}_1 - \underset{\sim}{\beta}^{0\prime} T' \underset{\sim}{y}_1) = r(\underset{\sim}{y}_1) - r(T)\sigma^2$$

$$= [r(M) - r(T)]\sigma^2$$

M ستون‌های کامل

$V = MM' \rightarrow r(M) = r(V)$

$X = MT \rightarrow r(T) = r(X)$

$X = \begin{pmatrix} T \\ AT \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{SSE}{r(V) - r(X)}$$

(بقای دهایول فال)

برآورد در مدل پارامتری : (فصل سوم) ۲۲۶-۲۶۱ ۵۵ ۹۸-۷۰ ۹۵-۴۸ ۱۰ ۱۱ ۱۲

در این مبحث به معرفی دو مدل خطی ۱. مدل با رسته بندی یک طرفه و مدل با رسته بندی دو طرفه می پردازیم.

در این مدلها ، متغیر یا پاسخ پیوسته و متغیرهای توضیحی گسسته می باشند.

مدل با رسته بندی یک طرفه :

به این مدل ، مدل با اثرات ثابت یا در طرح آزمایشها طرح کاملاً تصادفی نیز می گویند. مدل به صورت

یک عامل با a سطح (a تیمار)

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij} \qquad \begin{matrix} i = 1, \dots, a \\ j = 1, \dots, n_i \end{matrix}$$

در نظر گرفته می شود و فرضیات مدل :

$$E(\varepsilon_{ij}) = 0 \quad , \quad E(y_{ij}) = \mu + \alpha_i$$

$$var(\varepsilon_{ij}) = \sigma^2 \quad , \quad Cov(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij''}) = 0 \qquad (j \neq j'')$$

پس در این مدل $\varepsilon_{ij}$ ها نابسته و $\varepsilon_{ij}$ ها تنها عامل تصادفی هستند مدل

MICRO

Scanned with CamScanner

Subject : Date

## دسته‌بندی یک‌طرفه (one-way classification) و طرح کاملاً تصادفی (CRD)

Completely Randomized design (CRD)

اکنون با تعریف یک ماتریس طرح مدل را به صورت مدل رگرسیونی می‌نویسیم :

$$\underset{\sim}{y} = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ \vdots \\ y_{1n_1} \\ y_{21} \\ y_{22} \\ \vdots \\ y_{2n_2} \\ \vdots \\ y_{a1} \\ \vdots \\ y_{ana} \end{bmatrix}_{N\times 1} \quad \begin{matrix} \} n_1 \\ \\ \\ \} n_2 \\ \\ \\ \} n_a \end{matrix}$$

$$\underset{\sim}{\beta} = \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_a \end{bmatrix}_{(a+1)\times 1} = \begin{bmatrix} \mu \\ \underset{\sim}{\alpha} \end{bmatrix}$$

$$X = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{1} \quad X_1} \begin{matrix} \} n_1 \\ \\ \\ \} n_2 \\ \\ \\ \} n_a \end{matrix}$$

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \vdots \\ \varepsilon_{1n_1} \\ \varepsilon_{21} \\ \vdots \\ \varepsilon_{2n_2} \\ \vdots \end{bmatrix}_{N\times 1}$$

$$(X)_{N\times(a+1)}$$

$$N = n_1 + n_2 + \cdots + n_a$$

(اگر $n_1 = \cdots = n_a$ طرح متعادل است.)

$$\underset{\sim}{y} = X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon} \qquad Var(\underset{\sim}{\varepsilon}) = Var(\underset{\sim}{y}) = \sigma^2 I$$

همان طور که از ماتریس X مشخص است این مدل رتبه ناقص است و همچنین روابط مدل فرض می‌کنیم $\boxed{N \geq a}$

$r(X) = a+1-1 = a$ ← مدل با رتبه غیرکامل

دیدیم استفاده معادلات نرمال :

$$X'X\,\underset{\sim}{\beta}^{\circ} = X'\underset{\sim}{y}$$

$$X'X = \begin{bmatrix} N & n_1 & n_2 & \cdots & n_a \\ n_1 & n_1 & 0 & \cdots & 0 \\ n_2 & 0 & n_2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ n_a & 0 & 0 & \cdots & n_a \end{bmatrix}_{(a+1)(a+1)}$$

$$r(X'X) = a$$

$$X'\underset{\sim}{y} = \begin{bmatrix} y_{..} = \sum\sum y_{ij} \\ y_{1.} = \sum_{j=1}^{n_1} y_{1j} \\ \vdots \\ y_{a.} = \sum_{j=1}^{n_a} y_{aj} \end{bmatrix}$$

Scanned with CamScanner

Subject : Date

یکی از روشهای تقسیم ماتریس $X'X$ :

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{n_1} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \frac{1}{n_a} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & \underset{\sim}{0}' \\ \hline \underset{\sim}{0} & D(\frac{1}{n_i}) \end{array}\right] \qquad H = GX'X = \begin{bmatrix} 0 & \underset{\sim}{0}' \\ 1_a & I_a \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{B}^{\circ} = GX'\underset{\sim}{y} = \begin{bmatrix} 0 & \underset{\sim}{0}' \\ \underset{\sim}{0} & D(1/n_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{..} \\ y_{1\cdot} \\ \vdots \\ y_{a\cdot} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{y_{1\cdot}}{n_1} \\ \vdots \\ \frac{y_{a\cdot}}{n_a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{y}_{1\cdot} \\ \vdots \\ \bar{y}_{a\cdot} \end{bmatrix}$$

بنابراین یک دسته از جوابهای دستگاه معادلات نرمال :

$$\underset{\sim}{B}^{\circ} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{y}_{1\cdot} \\ \vdots \\ \bar{y}_{a\cdot} \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \mu^{\circ} \\ \rightarrow \alpha_1 \\ \\ \rightarrow \alpha_a \end{matrix}$$

مثال :

| | $i$ : سطح تحصیلات | $n_i$ = تعداد افراد | $y_{ij}$ : پاسخها | جمع |
|---|---|---|---|---|
| (زیر دیپلم) | 1 | 3 | 74, 68, 77 | $219 = y_{1\cdot}$ |
| (دیپلم) | 2 | 2 | 76, 80 | $156 = y_{2\cdot}$ |
| (مدرک دانشگاهی) | 3 | 2 | 85, 93 | $178 = y_{3\cdot}$ |

$$\underset{\sim}{y} = \begin{bmatrix} 74 \rightarrow y_{11} \\ 68 \rightarrow y_{12} \\ 77 \rightarrow y_{13} \\ 76 \rightarrow y_{21} \\ 80 \rightarrow y_{22} \\ 85 \rightarrow y_{31} \\ 93 \rightarrow y_{32} \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{7 \times 4} \qquad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{B}^{\circ} = GX'\underset{\sim}{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{y}_{1\cdot} \\ \bar{y}_{2\cdot} \\ y_{3\cdot} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 219/3 \\ 156/2 \\ 178/2 \end{bmatrix}$$

©MICRO

Scanned with CamScanner

Subject : Date

آنالیز واریانس:

$$SSR = \underset{\sim}{B}^{0\prime} X' \underset{\sim}{y} = \begin{bmatrix} \bar{y}_{1\cdot} \\ \vdots \\ \bar{y}_{a\cdot} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} y_{1\cdot} \\ \vdots \\ y_{a\cdot} \end{bmatrix} = \bar{y}_{1\cdot} y_{1\cdot} + \cdots + \bar{y}_{a\cdot} y_{a\cdot}$$

$$= \sum_{i=1}^{a} \bar{y}_{i\cdot} y_{i\cdot} = \sum_{i=1}^{a} \frac{y_{i\cdot}^2}{n_i}$$

$$SSR = \sum_i \frac{y_{i\cdot}^2}{n_i} = \sum n_i \bar{y}_{i\cdot}^2$$

مثال:

$$SSR = \frac{219^2}{3} + \frac{156^2}{2} + \frac{178^2}{2} = 43997$$

$$SSM = N\bar{y}^2 = 7(553/7)^2 = 43687$$

$$SST = \sum_{ij} y_{ij}^2 = 74^2 + 68^2 + 77^2 + 76^2 + 80^2 + 85^2 + 93^2 = 44079$$

$$SSE = SST - SSR = 44079 - 43997 = 82$$

$$SSE = \sum_{ij} y_{ij}^2 - \sum n_i \bar{y}_{i\cdot}^2$$

$$SSR_m = SSR - SSM = 43997 - 43687 = 310$$

$$SST_m = SST - SSM = 44079 - 43687 = 392$$

| منبع | درجه آزادی $r(X)=1$ | SS | MS | F |
|---|---|---|---|---|
| مدل بعد از متغیر | $a-1=2$ | $SSR_m = 310$ | $310/2 = 155$ | $F(R_m) = 7.56$ |
| خطا | $N-a=4$ | $SSE = 82$ | $82/4 = 20.5$ | |
| کل | $N-1=6$ | $SST_m = 392$ | | |

$$\hat{\sigma}^2 = MSE = \frac{SSE}{N-a} = 20.5 \qquad R^2 = \frac{SSR_m}{SST_m} = \frac{310}{392} = 0.79$$

$$F(R_m) = 7.56 > 6.94 = F_{2,4,0.05} \Rightarrow \text{RH}_0 \quad H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$$

$$H_0: E(\bar{y}) = 0$$

$$F(m) = \frac{43.687/1}{20.5} = 2131.1 > F_{1,4} \Rightarrow \text{RH}_0$$

MICRO

Scanned with CamScanner

Subject : Date

توابع قابل برآورد :

اکنون نشان می دهیم $E\bar{y}_{i\cdot} = \mu + \alpha_i$ قابل برآورد است.

$$q_1' = [1\ 1\ 0 \cdots 0] \qquad q_1'\beta = \mu + \alpha_1$$

$$q_1'H = (1\ 1\ 0 \cdots 0)\begin{pmatrix} 0 & 0' \\ 1_a & I_a \end{pmatrix} = (1\ 1\ 0 \cdots 0) = q_1'$$

بنابراین ترکیب بین $E\bar{y}_{i\cdot} = \mu + \alpha_i$ قابل برآورد است.

پس برآورد $\mu$ قابل برآورد است

$$q_2' = [1\ 0 \cdots 0] \qquad q_2'\beta = \mu \qquad q_2'H = (1\ 0 \cdots 0)\begin{pmatrix} 0 & 0' \\ 1_a & I_a \end{pmatrix} = q_2'$$

$$(1\ 0 \cdots 0)\begin{pmatrix} 0 & 0 \cdots 0 \\ 1 & \\ \vdots & \ddots \\ 1 & \end{pmatrix} = (0\ 0\ 0 \cdots 0) \neq q_2' \rightarrow \mu \text{ قابل برآورد نیست}$$

به همین ترتیب می توان نشان داد که هیچکدام از $\alpha_i$ ها هم قابل برآورد نیست.

نکته : اگر همه توابع قابل برآورد با هم قابل برآورد است

$\mu + \alpha_1$ قابل برآورد

$\mu + \alpha_2$ قابل برآورد $\rightarrow 2\mu + \alpha_1 + \alpha_2$ قابل برآورد

به همین شکل $\sum_{i=1}^{a} \lambda_i(\mu + \alpha_i)$ قابل برآورد است. می دانیم اگر $q_1'\beta$ قابل برآورد باشد آن گاه $q_1'\hat{\beta}$ یک برآوردگر BLUE برای آن است و $var(q_1'\hat{\beta}) = q_1'Gq_1\sigma^2$

$$\hat{\mu + \alpha_1} = [1\ 1\ 0 \cdots 0]\begin{bmatrix} \bar{y}_{1\cdot} \\ \vdots \\ \bar{y}_{a\cdot} \end{bmatrix} = \bar{y}_{1\cdot} = q_1'\hat{\beta}$$

$$V(\hat{\mu + \alpha_1}) = var(\bar{y}_{1\cdot}) = \frac{\sigma^2}{n_1} = q_1'Gq_1\sigma^2$$

$\lambda_1(\mu + \alpha_1)$ یا $\sum_{i=1}^{a} \lambda_i(\mu + \alpha_i)$ قابل برآورد است

$$q_1' = [\lambda_1\ \lambda_1\ 0 \cdots 0]$$

$$\lambda_1\hat{(\mu + \alpha_1)} = \lambda_1\bar{y}_{1\cdot}$$

$$\sum_{i=1}^{a} \lambda_i\hat{(\mu + \alpha_i)} = \sum_{i=1}^{a} \lambda_i\bar{y}_{i\cdot}$$

$$var\left(\sum \lambda_i\hat{(\mu + \alpha_i)}\right) = \frac{\sum \lambda_i^2}{n_i}\sigma^2$$

MICRO

Scanned with CamScanner

Subject :

Date

و یک تابع فاصله اطمینان $100(1-\alpha)$ ٪ برای ترکیب خطی قابل برآورد بدست آوردیم که برابر است با آن

$$\sum \lambda_i (\hat{\mu + \alpha_i}) \pm \hat{\sigma}\, t_{n-r(x),\alpha/2} \sqrt{\sum \lambda_i^2 / n_i}$$

$$= \sum \lambda_i \bar{y}_{i\cdot} \pm \hat{\sigma}\, t_{n-r(x),\alpha/2} \sqrt{\sum \lambda_i^2 / n_i}$$

مثال: فرض کنید مثال قبل $\lambda_1 = 1$ ، $\lambda_2 = -1$ ، $\lambda_3 = 0$

$$\sum \lambda_i (\mu + \alpha_i) = \alpha_1 - \alpha_2$$

$$\hat{\alpha_1 - \alpha_2} = \bar{y}_{1\cdot} - \bar{y}_{20} = 73 - 78 = -5$$

$$V(\hat{\alpha_1 - \alpha_2}) = \left[\frac{1^2}{3} + \frac{-1^2}{2}\right] \cdot 6^2 = \frac{5}{6} 6^2$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 : -5 \pm \underbrace{\hat{\sigma}}_{20.5}\, t_{4,0.025} \sqrt{\frac{5}{6}}$$

یا فرض کنید $\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = 2 \quad \lambda_3 = -5$

$$\sum \lambda_i (\mu + \alpha_i) = 3\alpha_1 + 2\alpha_2 - 5\alpha_3$$

$$\hat{3\alpha_1 + 2\alpha_2 - 5\alpha_3} = 3(73) + 2(78) - 5(89)$$

$$var(3\hat{\alpha_1} + 2\hat{\alpha_2} - 5\alpha_3) = \left(\frac{3^2}{3} + \frac{2^2}{2} + \frac{5^2}{2}\right) 6^2$$

از عبارت $\sum \lambda_i (\mu + \alpha_i)$ می‌توان استفاده کرد و گفت که دارد $\mu$ قابل برآورد است

$$\sum \lambda_i (\mu + \alpha_i) = \sum \lambda_i \mu + \sum \lambda_i \alpha_i \xrightarrow[\sum \lambda_i = 1]{\sum \lambda_i \alpha_i = 0} \mu$$

بدین است $\sum \lambda_i \alpha_i = 0$ وقتی برقرار است که $\sum \lambda_i = 1$ و $\sum \lambda_i \neq 1$ که در اینصورت $\alpha_i = 0$ برقرار نخواهد بود پس $\alpha_i$ ای وجود ندارد که $\sum \lambda_i (\mu + \alpha_i)$ مغیر شود به $\mu$.

به همین ترتیب از رابطه $\sum \lambda_i (\mu + \alpha_i)$ می‌توان گفت که $\alpha_i$ قابل برآورد است و یا می‌توان گفت که دارد $\sum \lambda_i \alpha_i$ قابل برآورد است.



Scanned with CamScanner

Subject :

Date

به طور کلی فرض کنید $q_h' = [q_0\ q_1 \dots q_a]$ این عناصر از چه خصوصیتی برخوردار باشند که $q_h'\beta$ قابل برآورد باشد (در طرح کامل تقاطعی)

$$H = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \underset{\sim}{0} \\ 1_a & I_a \end{pmatrix}}_{\text{در طرح کامل تقاطعی}} \qquad \underbrace{q_h'H = q_h'}_{\text{اگر برقرار باشد}} \quad : \text{داریم}$$

$q_h'\beta$ قابل برآورد

$$q'H = [q_0 \dots q_a]\begin{bmatrix} 0 & \underset{\sim}{0} \\ 1_a & I_a \end{bmatrix} = \left(\sum_{i=1}^{a} q_i\ q_1 \dots q_a\right)$$

پس برای اینکه این عبارت برابر با $q'$ باشد باید $\sum_{i=1}^{a} q_i = q_0$

چند مثال : $\alpha_1 - \alpha_2$ ، $2\alpha_3 - \alpha_1 - \alpha_2$

$2\mu + \alpha_1 + \alpha_2$

سوال : اگر دو تابع قابل برآورد داشته باشیم مثل $q_1'\beta$ ، $q_2'\beta$ به طوری که

$q_i' = (q_0\ q_{1i} \dots q_{ai})$ $i = 1, 2$

دیدیم اگر $q_{0i} = \sum_{j=1}^{a} q_{ji}$ ، $q_i'\beta$ قابل برآورد است تحت چه شرایطی $q_1'\beta$ و $q_2'\beta$ از هم مستقلند.

آزمون فرض در حالت با رتبه بندی کامل :

فرض عمومی $H_0 : k'\beta = m$ را در نظر بگیرید در مدل‌های رتبه غیر کامل باید $k'\beta$ قابل برآورد باشد که فرض فوق آزمون پذیر باشد و بعد از این که قابل آزمون بودن آن را احراز کردیم Q را محاسبه می‌کردیم و آماره آزمون $F(H)$ را محاسبه می‌کردیم.

$$Q = (k'\hat{\beta} - m)'(k'Gk)^{-1}(k'\hat{\beta} - m)$$

$$F(H) = \frac{Q/s}{\hat{\sigma}^2} = \frac{Q/s}{SSE/n-r(x)}$$

© MICRO

Scanned with CamScanner

Subject : Date

به مثال فرض کنید

$$H_0: \begin{cases} \alpha_2 - \alpha_1 = 9 \\ 2\alpha_3 - \alpha_1 - \alpha_2 = 30 \end{cases}$$

$$K' = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 4} \qquad K'\beta = \begin{bmatrix} 9 \\ 30 \end{bmatrix}$$

$$\hat{K'B} = K'B^{\circ} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 73 \\ 78 \\ 89 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 27 \end{bmatrix}$$

$$(K'GK)^{-1} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 17 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad K'\underset{\sim}{\beta}^{\circ} - \underset{\sim}{m} = \begin{bmatrix} 5 \\ 27 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$Q = (-4 \quad -3)\frac{1}{14}\begin{pmatrix} 17 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{341}{14}$$

$$S = r(K') = 2 \qquad \hat{\sigma}^2 = 20.5 \qquad F(H) = \frac{(341/14)/2}{20.5} < 1$$

$$F_{2,24,0.05} = 6.94$$

فرض $H_0$ رد نمی شود.

فرض $E(\bar{y}) = 0$ معادل است با فرض $H_0: N\mu + \sum n_i\alpha_i = 0$ چون

$$E(\bar{y}) = 0 \Rightarrow NE(\bar{y}) = N\mu + \sum n_i\alpha_i = 0 \qquad y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$$

$N\mu + \sum n_i\alpha_i$ که می دانیم $\bar{y} = \sum_{ij} y_{ij}/n = \mu + \sum_{i=1}^{a} n_i\alpha_i/n + \sum_{ij}\varepsilon_{ij}/n$ قابل برآورد است.

$$[\underbrace{N}_{q.} \; n_1 \; n_2 \cdots n_a] \qquad \sum q_i = q.$$

$$NE(\bar{y}) = N\mu + \sum_{i=1}^{a} n_i\alpha_i$$

پس می توان $H_0$ را به صورت

$$H_0: \lambda'\underset{\sim}{\beta} = 0$$

همزمان نوشت که در آن

$$\lambda' = [N \; n_1 \; n_2 \cdots n_a]$$

$$\lambda'\underset{\sim}{\beta}^{\circ} = \sum n_i\bar{y}_{i.} = N\bar{y}_{..} \qquad \lambda'G = [0 \quad 1'] \qquad \lambda'G\lambda = \sum n_i = N$$

MICRO

Scanned with CamScanner

(۴۲)

Subject : Date

$$Q = \underset{\sim}{B}^{\circ\prime} \underset{\sim}{d} (\underset{\sim}{d}' G \underset{\sim}{d})^{-1} \underset{\sim}{d}' \underset{\sim}{B}^{\circ} = N\bar{y}_{\cdot\cdot}^2 = SSM$$

$$F(M) = \frac{MSSM}{MSE}$$

در مثال $H_0 : 7\mu + 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0$

$$\underset{\sim}{d}'\underset{\sim}{B}^{\circ} = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 73 \\ 78 \\ 89 \end{bmatrix} = 553 \qquad \underset{\sim}{d}' G \underset{\sim}{d} = 7$$

$$Q = SSM = 553(7^{-1})553 = 43687$$

$$\star \quad F(H) = \frac{Q/s}{\hat{\sigma}^2} = F(M) = \frac{MSSM}{MSE} = 2131.1$$

معادل با $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ در مثال $H_0 :$ همه $\alpha$ ها برابر با صفر

$$H_0 : \alpha_1 - \alpha_2 = \alpha_1 - \alpha_3 = 0$$

$$H_0 : \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$k'\underset{\sim}{B}^{\circ} = \begin{bmatrix} -5 \\ -16 \end{bmatrix} \qquad (k'Gk)^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 10 & -4 \\ -4 & 10 \end{bmatrix} \qquad r(k') = s = 2$$

$$Q = \begin{bmatrix} -5 & -16 \end{bmatrix} \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ -4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ -16 \end{bmatrix} = 310 = SSR_m$$

$$\star \quad F(H_1) = \frac{Q/s}{\hat{\sigma}^2} = \frac{MSSR_m}{MSE} = F(R_m) = 7.56$$

سپس آزمون براساس $F(R_m)$ که متناظر دیده بودید در مدل‌های بازسته بندی شده را بر اساس بررسی فرض همه $\alpha$ ها برابرند: $H_0$ به کار می‌رود.

به طور کل $H_0 : k'\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{0}$ که در آن $k' = \begin{bmatrix} 0 & I_{a-1} & 1_{a-1} & -I_{a-1} \end{bmatrix}$ معادل با آزمون همه $\alpha$ ها برابرند است

$$Q = SSR_m \qquad F(H) = F(R_m)$$

Scanned with CamScanner

Subject : Date

برای $\alpha$ تا $a$ :

$$k' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

$$H_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_a \equiv \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_3 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1 - \alpha_a = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_{ij} = \mu + \varepsilon_{ij} \\ y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij} \end{cases} \Rightarrow$$

یعنی این دو مدل مقایسه می شوند

مدل فقط $\mu$ دارد — مدل کامل SSR

و به همین دلیل $SSM = R(\mu)$ و $SSR = R(\mu, \alpha)$ هم نشان می دهند. یعنی SSR تحت فرض $H_0$ تبدیل به SSM خواهد شد.

$$R(\alpha|\mu) = R(\mu, \alpha) - R(\mu) = SSR_m$$

مدل تصحیح شده SSR

وقتی دو مدل $y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$ با هم مقایسه می شوند که ببینیم $\alpha_i$ ها در صورتی که پذیرفته شود مدل به صورت $y_{ij} = \mu + \varepsilon_{ij}$ می شود که می توان به صورت $y_{ij} = \mu' + \varepsilon_{ij}$ نوشت و مجموع مربعات برای این مدل برابر با مجموع مربعات مدل $y_{ij} = \mu + \varepsilon_{ij}$ است. پس فرض همه $\alpha$ ها برابر صفر با همه $\alpha$ ها صفر نمودن برای همین منظور دیدیم از $F(R_m)$ هم برای فرض $\beta_1 = 0$ استفاده می شد که درست است که بگوییم $F(R_m)$ همه $\alpha$ ها برابرند را آزمون می کند.

و با توجه به عبارتهای برای کل R جدول آنالیز واریانس به صورت زیر هم قابل نوشتن است

| منبع | df | مجموع مربعات |
|---|---|---|
| میانگین | 1 | $R(\mu) = SSm$ |
| مدل تعدیل شده میانگین | $a-1$ | $R(\alpha\|\mu) = SSR_m$ |
| باقیمانده | $N-a$ | $SSE = SST - R(\mu, \alpha) = SST - SSR$ |
| کل | $N$ | $SST$ |

$$R^2 = \frac{SSR_m}{SST_m} = \frac{R(\alpha|\mu)}{SST - R(\mu)} = 1 - \frac{SSE}{SST - R(\mu)}$$

$$SST - R(\mu) - SSE = SSR - R(\mu) = R(\mu, \alpha) - R(\mu) = R(\alpha|\mu)$$

©MICRO

Scanned with CamScanner

Subject :

Date

## مدل‌های دسته‌بندی یک‌طرفه با محدودیت :

در تقدیر فرض محدودیت در این مدل‌ها: بعضی از توابع که در مدل بدون محدودیت قابل برآورد هستند با اعمال یک محدودیت تبدیل به تابع قابل برآورد می‌شود.

پس در مدل‌های با دسته‌بندی یک‌طرفه بعضی از محدودیت‌ها بیشتر جنبه علامتی است برای مثال حالت اول :

فرض کنید در این مدل‌ها محدودیت $\sum n_i \alpha_i = 0$ در تقدیر گیریم می‌دانیم تابع $\mu + \sum n_i \alpha_i / n$ قابل برآورد است (در مدل بدون محدودیت) و با اعمال محدودیت $\mu$ قابل برآورد است. یعنی $\mu$ در مدل بدون محدودیتی دانیم قابل برآورد نیست اما اگر $\sum n_i \alpha_i = 0$ را به عنوان یک محدودیت روی مدل در تقدیر گیریم آن‌گاه $\mu$ در مدل با محدودیت قابل برآورد خواهد بود و

$$\hat{\mu} = \bar{y}_{..}$$

فرض $E(\bar{y}) = 0$ که به صورت $H_0 : N\mu + \sum n_i \alpha_i = 0$ نوشته شد در مدل با محدودیت تبدیل به $H_0 : \mu = 0$ خواهد شد و $F(M)$ برای آزمون این فرض استفاده می‌شود

حالت دوم :

با فرض کنید محدودیت $\sum \alpha_i = 0$ روی مدل در تقدیر گرفته شود در مدل بدون محدودیت

$\mu + \sum \alpha_i / a$ قابل برآورد است با برآورد Blue : $\sum \bar{y}_{i.} / a$

$$\begin{cases} \sum \lambda_i \mu + \sum \lambda_i \alpha_i \\ \lambda_i = \frac{n_i}{N} \rightarrow \mu + \sum \frac{n_i}{N} \alpha_i \\ \lambda_i = 1/a \rightarrow \mu + \frac{1}{a} \sum \alpha_i \end{cases}$$

و اگر مدل با محدودیت $\sum \alpha_i = 0$ در تقدیر گرفته شود آن‌گاه $\mu$ قابل برآورد با Blue

$$\sum \bar{y}_{i.} / a = \hat{\mu}$$

است. در این حالت فرض $H_0 : \mu = 0$ با همان آماره آزمون مدل بدون محدودیت بصورت فرضیه $H_0 : \mu + \sum \alpha_i / a = 0$ آزمون می‌شود. پس

$k' = [1 \quad a^{-1} 1']$

$[1 \quad \frac{1}{a} \quad \frac{1}{a} \quad \cdots \quad \frac{1}{a}]$

©MICRO

Scanned with CamScanner

Subject : Date

$H_0: k'\beta = 0$ $\quad k'\hat{\beta}^0 = \sum \bar{y}_{i.}/a$

$(k'Gk) = a^{-2}\sum(1/n_i)$ $\quad Q = (\sum \bar{y}_{i.})^2 / \sum n_i^{-1}$

$$F(H) = \frac{(\sum \bar{y}_{i.})^2}{\hat{\sigma}^2 \sum n_i^{-1}} \qquad S = 1$$

حالت کلی:

محدودیت یکبری که ما در این بررسی‌ها می‌توانیم برقرار کنیم است $\sum w_i \alpha_i = 0$ که آن ما برای تعیین از $w_i$ $\mu$ قابل برآورد است و

$$\hat{\mu} = \sum w_i \bar{y}_{i.} / \sum w_i$$

که همان Blue برای مدل بدون محدودیت می‌باشد.

و آماره آزمون عدل با محدودیت که فرض $\sum w_i \alpha_i = 0$ $H_0: \mu = 0$ را آزمون می‌کند همان F ای است که در مدل بدون محدودیت $H_0: \mu + \sum w_i \alpha_i / \sum w_i = 0$ را آزمون می‌کند

$$k' = \left[1 \quad \frac{w_1}{w_0} \quad \dots \quad \frac{w_a}{w_0}\right] \qquad w_0 = \sum w_i$$

$$\begin{cases} k'Gk = \left(\sum \frac{w_i^2}{n_i}\right)/w_0^2 \\ k'\hat{\beta} = \sum w_i \bar{y}_{i.}/w_0 \end{cases} \rightarrow F(H) = \frac{(\sum w_i \bar{y}_{i.})^2}{\hat{\sigma}^2 (\sum w_i^2/n_i)}$$

که حالت کلی‌تر از دو حالت اول است اگر

$w_i = n_i \rightarrow$ حالت اول

$w_i = 1 \rightarrow$ حالت دوم

در مدلهای نامتعادل معمولاً قید $\sum n_i \alpha_i = 0$ روی پارامترها در نظر گرفته می‌شود که حالت نرمال را حل می‌شوند

$$\mu^0 = \bar{y}_{..} \qquad \alpha_i^0 = \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}$$

روی پارامترها

یا در مدلهای متعادل $\sum \alpha_i = 0$ را در نظر می‌گیرند

$$\hat{\mu} = \bar{y}_{..} \qquad \hat{\alpha}_i = \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}$$

که اگر محدودیت $\sum \alpha_i = 0$ در نظر گرفته شود $\mu$ و $\alpha_i$ قابل برآورد و

$$\hat{\mu} = \bar{y}_{..} \qquad \hat{\alpha}_i = \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}$$

روی مدل

و آزمونها روی $\mu$ و $\alpha$ هم قابل برآوردی می‌شوند.

Scanned with CamScanner

## مدل بارسته بندی دوطرفه آشیانه ای
## 2-way nested classification model

مدلهای بارسته بندی دوطرفه به دو قسمت تقسیم می شوند :

① 2-way nested classification models

② 2-way Crossed classification models

این قسمت به معرفی مدل از نوع اول یعنی مدل بارسته بندی دوطرفه آشیانه ای پرداخته می شود. اما قبل از دوم از مدلهایی که در فصل بعد بررسی می شود به صورت های مختلف قابل بیان است. طرحهای دوعاملی و طرحهای بلوکی تصادفی در دسته دوم قرار می گیرند. که به مدلهای بارسته بندی دوطرفه با اثر متقابل یا بدون اثر متقابل هم معروفند. در طرح بلوکی معمولاً عامل بلوک مهم نیست و به عنوان پارامتر مزاحم است و به همین دلیل در طرح بلوکی اثر متقابل در نظر گرفته نمی شود اما در طرح دوعاملی معمولاً اثر متقابل هم مهم است مثلاً بخواهیم اثر سه نوع کود و دو روش آبیاری را روی عملکرد یک محصول بررسی می کنیم دو عامل کود و روش آبیاری داریم یک طرح دوعاملی داریم که اثر متقابل دوعامل هم ممکن است مهم باشد

مدل بارسته بندی دوطرفه متقاطع (طرح دوعاملی) $\rightarrow y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$

مدل بارسته بندی دوطرفه بدون اثر متقابل (طرح بلوکی) $\rightarrow y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ijk}$

اما مدل آشیانه ای که بحث این قسمت می باشد به این صورت است که باز هم با دو عامل سروکار داریم که هر دو عامل مهم اند ولی اثر متقابل هیچ جا در نظر گرفته نمی شود چون در این مدلها یک عامل در درون عامل دیگر است که اثر متقابل بصورت پنهان در نظر گرفته می شود و این مدلها به صورت زیر بیان می شوند

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_{j(i)} + \varepsilon_{ij)k} \qquad \begin{matrix} i = 1, \dots a \\ j = 1, \dots b_i \\ k = 1, \dots n_{ij} \end{matrix}$$

به این صورت هم نمایش داده می شوند $\rightarrow y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_{ij} + \varepsilon_{ijk}$

اگر $n_{ij}$ ها برابر باشند طرح آشیانه ای دو مرحله ای متعادل و اگر برابر نباشند غیر متعادل است.

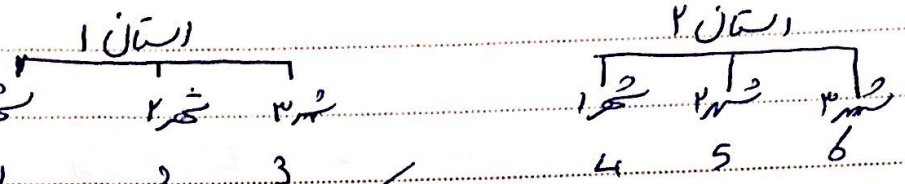
مثلاً فرض کنید عامل اول استانها باشند که دارای سه سطح (استان ۱، استان ۲، استان ۳) است و عامل دوم شهرهایی که درون استانها آشیانه کرده اند. عامل B، شهرها هستند اما شهرهایی که با توجه

MICRO
Scanned with CamScanner

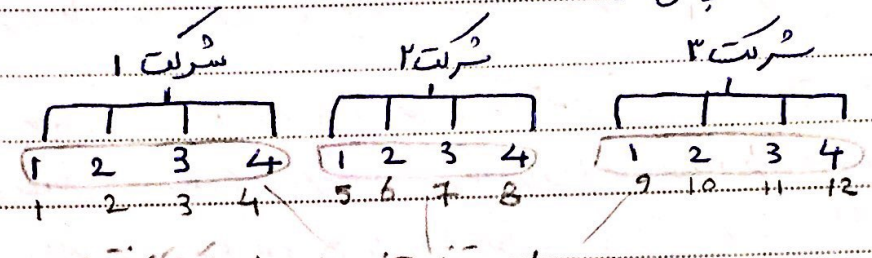
Subject : Date

به استان تغییر می کند به صورت نمودار به شکل زیر نمایش می دهند

استان A عامل




فرض کنید یک کارخانه مواد اولیه مورد نیاز خود را از سه شرکت متقاوت تهیه می کند به طوری که هر شرکت چهار دسته مواد اولیه به کارخانه ارائه می کند و مدیر کارخانه می خواهد میزان خالص مواد اولیه خریداری شده از سه شرکت متفاوت را بررسی کند




ام متفاوت تند چون ربط به شرکتها ندارند

به این نحوه طرح، طرح آشیانه ای یا سلسله مراتبی دو مرحله ای می گویند، در کل مواد با دسته بندی دو طرفه قرار می گیرد. دقت کنید که این طرح را نمی توان به صورت طرح دو عاملی در نظر گرفت چون دسته ای مواد اولیه شرکت یک متفاوت مربوط به شرکت ۱ است و متفاوت از شرکت ۲ و ۳ است و همین ترتیب برای دو شرکت دیگر. به همین دلیل بهتر است به جای اعداد 4 و 3 و 2 و 1 برای هر سه شرکت از اعداد 12 — و 4 و 3 و 2 و 1 استفاده کرد. یا در مثال استانها، سطوح عامل B شهرها هستند اما شهرها برای هر استان متفاوت از استان دیگر است.

مثال : فرض کنید سه نوع قابلمه ساخته شده توسط سه کارخانه (طرح دو عاملی) 4 مارک متفاوت احتراق گاز

عامل A : چهار سطح W , Z , J , X ← Brand of stove

عامل B : سه سطح

سه نوع قابلمه ← A , B, C

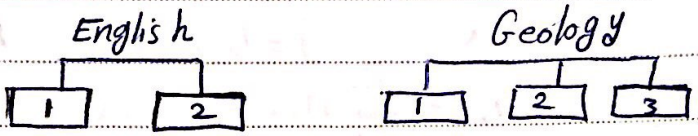
ثانیه‌ای بیشتر از سه دقیقه زمانی که برای ۲ لیتر آب به جوش بیاید ← پاسخ



Scanned with CamScanner

Subject : Date

مثال آشیانه ای :




$i = 1,2$ $\quad \alpha_1 \quad \alpha_2$

$b_1 = 2$ $\quad \beta_{1(1)} \quad \beta_{2(1)} \quad \beta_{1(2)} \quad \beta_{2(2)} \quad \beta_{3(2)}$

$b_2 = 3$ $\quad \beta_{11} \quad \beta_{12} \quad \beta_{21} \quad \beta_{22} \quad \beta_{23}$

$\alpha_1$ $\qquad$ $\alpha_2$

$y_{ijk}$ : نمره دانشجوی kام در شعبه j ام

دوره آموزشی ام

دوره آموزشی انگلیسی به دو شعبه تقسیم کرده ایم و در دو مرحله از دانشجویان نمره خواهی شده است همین ترتیب دوره زمین شناسی به سه شعبه تقسیم و سر به از دانشجویان نمره خواهی شده است

| دوره | مرحله دوره | پاسخ | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| English | 1 | 5 | 5 | $n_{11}=1$ | $n_{1.}=4$ |
| | 2 | 8, 10, 9 | 27 | $n_{12}=3$ | $n_{..}=12$ |
| Geology | 1 | 8, 10 | 18 | $n_{21}=2$ | |
| | 2 | 6, 2, 1, 3 | 12 | $n_{22}=4$ | $n_{2.}=8$ |
| | 3 | 3, 7 | 10 | $n_{23}=2$ | |

$y_{...} = 72 \rightarrow \bar{y}_{...} = 6$

$$
\begin{bmatrix} y_{111} \\ y_{121} \\ y_{122} \\ y_{123} \\ y_{211} \\ y_{212} \\ y_{221} \\ y_{222} \\ y_{223} \\ y_{224} \\ y_{231} \\ y_{232} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 10 \\ 9 \\ 8 \\ 10 \\ 6 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_{11} \\ \beta_{12} \\ \beta_{21} \\ \beta_{22} \\ \beta_{23} \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} \varepsilon_{111} \\ \varepsilon_{121} \\ \varepsilon_{122} \\ \varepsilon_{123} \\ \varepsilon_{211} \\ \varepsilon_{212} \\ \varepsilon_{221} \\ \varepsilon_{222} \\ \varepsilon_{223} \\ \varepsilon_{224} \\ \varepsilon_{231} \\ \varepsilon_{232} \end{bmatrix}
$$

انگلیسی — زمین شناسی

$\underset{\sim}{Y}$ $\qquad$ $X$ $\qquad$ $\underset{\sim}{\beta}$

Scanned with CamScanner

Subject : Date

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + B_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

این مدل به صورت نوشته می‌شود به طوری که

$i = 1, 2, \dots, a \qquad j = 1, 2, \dots, b_i \qquad k = 1, 2, 3, \dots, n_{ij}$

$$n_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{b_i} n_{ij} \qquad n_{\cdot\cdot} = \sum_{i=1}^{a} n_{i\cdot}$$

که در مثال $a=2$ ، $b_1=2$ ، $b_2=3$ ، $n_{2\cdot}=8$ ، $n_{1\cdot}=4$ ، $n_{\cdot\cdot}=12$

$n_{11}=1$ $n_{12}=3$ $n_{21}=2$ $n_{22}=4$ $n_{23}=2$

حالا ماتریس را تشکیل می‌دهیم:

(مشخص است که مدل رتبه غیر کامل است) پس معادلات نرمال:

$$X'X\,\underset{\sim}{B^\circ} = X'\underset{\sim}{y}$$

جمع ستون پنجم و چهارم = ستون دوم ۲ ، هفت ستون آخر = ستون ۱

سه ستون آخر = ستون ۳

$$\underbrace{\begin{bmatrix}
12=n_{\cdot\cdot} & 4=n_{1\cdot} & 8=n_{2\cdot} & 1=n_{11} & 3=n_{12} & 2=n_{21} & 4=n_{22} & 2=n_{23} \\
4=n_{1\cdot} & 4=n_{1\cdot} & 0 & 1=n_{11} & 3=n_{12} & 0 & 0 & 0 \\
8=n_{2\cdot} & 0 & 8=n_{2\cdot} & 0 & 0 & \underbrace{2}_{n_{21}} & \underbrace{4}_{n_{22}} & \underbrace{2}_{n_{23}} \\
1=n_{11} & 1=n_{11} & 0 & \underbrace{1}_{n_{11}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3=n_{12} & 3=n_{12} & 0 & 0 & \underbrace{3}_{n_{12}} & 0 & 0 & 0 \\
2=n_{21} & 0 & 2=n_{21} & 0 & 0 & \underbrace{2}_{n_{21}} & 0 & 0 \\
4=n_{22} & 0 & 4=n_{22} & 0 & 0 & 0 & \underbrace{4}_{n_{22}} & 0 \\
2=n_{23} & 0 & 2=n_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & \underbrace{2}_{n_{23}}
\end{bmatrix}}_{X'X}
\begin{bmatrix} \mu^\circ \\ \alpha_1^\circ \\ \alpha_2^\circ \\ \beta_{11}^\circ \\ \beta_{12}^\circ \\ \beta_{21}^\circ \\ \beta_{22}^\circ \\ \beta_{23}^\circ \end{bmatrix}
= \underbrace{\begin{bmatrix} y_{\cdot\cdot\cdot} \\ y_{1\cdot\cdot} \\ y_{2\cdot\cdot} \\ y_{11\cdot} \\ y_{12\cdot} \\ y_{21\cdot} \\ y_{22\cdot} \\ y_{23\cdot} \end{bmatrix}}_{X'\underset{\sim}{y}}
= \begin{bmatrix} 72 \\ 32 \\ 40 \\ 5 \\ 27 \\ 18 \\ 12 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$\underset{\sim}{B^\circ}$

به طور کلی در مدل رتبه نرمال

$r(X'X) = 5$ (8-3)

$$r(X'X) = b_\cdot$$

تعداد پارامتری $\Rightarrow p = a + b_\cdot + 1$

و یا در پارامتری: بدیهی است اگر بخواهیم برآوردی یکتا داشته باشیم باید $X'X$ رتبه کامل باشد پس باید $a+1$ پارامتر را برابر صفر قرار دهیم آن گاه می‌توان گفت برای $b_\cdot$ پارامتر بی‌نهایت حل می‌توان برآوردی یکتا بدست آورد

در این صورت که یک جواب

$$\underset{\sim}{B^{\circ\prime}} = [\underset{\sim}{0'}_{1\times(a+1)} \quad \bar{y}']$$

برای معادلات نرمال $X'X\,\underset{\sim}{B^\circ} = X'\underset{\sim}{y}$ است. و داریم

$B^\circ_{ij} = \bar{y}_{ij\cdot}$

Scanned with CamScanner

Subject : Date

در مثال $\underset{\sim}{\beta}' = [\underset{\mu}{0} \ \underset{\alpha_1}{0} \ \underset{\alpha_1}{0} \ \underset{\beta_{11}}{5} \ \underset{\beta_{12}}{9} \ \underset{\beta_{21}}{9} \ \underset{\beta_{22}}{3} \ \underset{\beta_{23}}{5}]$ ، $\underset{\sim}{y}' = [5 \ 9 \ 9 \ 3 \ 5]$

و همگن تعمیم یافته در این حالت به صورت

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D(1/n_{ij}) \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} i = 1, \sim a \\ j = 1, \sim b_i \end{matrix}$$

آنالیز واریانس

مدل فقط $\mu$ دارد $R(\mu) = SSM = n_{..} \bar{y}_{...}^2$

مدل کامل $R(\mu, \alpha, \underset{\alpha \text{ داخل } \beta}{\beta : \alpha}) = SSR = \underset{\sim}{\beta}' \underset{\sim}{X}' \underset{\sim}{y} = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b_i} y_{ij.}^2 / n_{ij}$

مدل تصحیح شده با $\mu$ $R(\alpha, \beta : \alpha \mid \mu) = SSRm = R(\mu, \alpha, \beta : \alpha) - R(\mu)$

$$SST = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b_i} \sum_{k=1}^{n_{ij}} y_{ijk}^2$$

$$SSE = SST - R(\mu, \alpha, \beta : \alpha)$$

در مثال :

$$R(\mu) = 12 (b^2) = 432$$

$$R(\mu, \alpha, \beta : \alpha) = \frac{5^2}{1} + \frac{27^2}{3} + \frac{18^2}{2} + \frac{12^2}{4} + \frac{10^2}{2} = 516$$

$$R(\alpha, \beta : \alpha \mid \mu) = 516 - 432 = 84$$

$$SST = 5^2 + 8^2 + \dots + 7^2 = 542 \qquad SSE = 542 - 516 = 26$$

جدول آنالیز واریانس

| منبع | df | | SS | MS | F |
|---|---|---|---|---|---|
| میانگین | 1 | = 1 | $R(\mu) = 432$ | 432 | $F(m) = 116.3$ |
| مدل تصحیح شده با میانگین | $r(X) - 1 = b_0 - 1 =$ | 4 | $R(\alpha, \beta : \alpha \mid \mu) = 84$ | 21 | $F(Rm) = 5.7$ |
| خطا | $N - b_0 = n_{..} - b_0 =$ | 7 | $SSE = 26$ | $26/7$ | |
| کل | $N$ | = 12 | $SST = 542$ | | |

MICRO

Scanned with CamScanner

Subject : Date

$H_0 : E(\bar{y}_{..}) = 0 \quad F(M) = 116.3 > F_{1,7} = 5.59 \xrightarrow{\alpha=0.05} RH_0$

یعنی مدل تصحیح شده : $F(R_m) = 5.7 > F_{4,7} = 4.12 \Rightarrow RH_0$

فرض کنید برای مثال فوق یک مدل با دسته بندی تو در تو برازش شود :

$$\text{(*)} \quad y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ijk}$$

$$R(\mu) = SSM = n_{..}\bar{y}_{...}^2 = 12(6^2) = 432$$

$$R(\mu,\alpha) = \sum y_{i..}^2 / n_{i.} = \frac{32^2}{4} + \frac{40^2}{8} = 456$$

مدل درجا با ترتیب $\beta$

$$R(\beta:\alpha \mid \mu,\alpha) = R(\mu,\alpha,\beta:\alpha) - R(\mu,\alpha) = 516 - 456 = 60$$

$\beta'X'y \qquad \beta'X'y \qquad y'(X(X'X)^-X' - X_1(X_1'X_1)^-X_1')y$

$$R(\alpha \mid \mu) = R(\mu,\alpha) - R(\mu) = 456 - 432 = 24$$

$\beta'X'y \qquad y'\bar{n}^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}'y \qquad = y'(X_1(X_1'X_1)^-X_1' - n^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}')y$

$$R(\alpha,\beta:\alpha \mid \mu) = R(\mu,\alpha,\beta:\alpha) - R(\mu)$$

$$= \underbrace{R(\mu,\alpha,\beta:\mu) - R(\mu,\alpha)}_{R(\beta:\alpha \mid \mu,\alpha)} + \underbrace{R(\mu,\alpha) - R(\mu)}_{R(\alpha \mid \mu)}$$

$$= 60 + 24 = 84$$

(*) جدول آنالیز واریانس

| منبع | df | SS | MS | F |
|---|---|---|---|---|
| میانگین | 1 | $R(\mu) = 432$ | 432 | 116.3 |
| مدل * بعد از تصحیح میانگین | $a-1 = 1$ | $R(\alpha \mid \mu) = 24$ | 24 | 6.5 |
| $\beta:\alpha$ بعد از $\alpha, \mu$ | $b_0 - a = 3$ | $R(\beta:\alpha \mid \mu,\alpha) = 60$ | 20 | 5.4 |
| باقیمانده | $N - b_0 = 7$ | $SSE = 26$ | $26/7$ | |
| کل | $N = 12$ | $SST = 542$ | | |

$F_{1,7} = 5.59 \quad , \quad F_{3,7} = 4.35$

به بیان این مطلب است، برازش $\alpha$ بعد از $\mu$، $\beta:\alpha$ بعد $\mu$ و $\alpha$ هر دو تا تاثیر گذار روی مقادیر $y$ است

Scanned with CamScanner

Subject : (الهی) Date

توابع قابل برآورد :

مشابه مدل با رسته بندی یکطرفه

$E(y_{ijk}) = \mu + \alpha_i + \beta_{ij}$

قابل برآورد است $q'\beta = [1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0]$

برای مثال $\mu + \alpha_1 + \beta_{11}$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D(n_{ij}) \end{bmatrix} \qquad q'H = [1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0]H = [1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0] = q'$$

$$G = \begin{bmatrix} 0_{(a+1)(a+1)} & 0_{(a+1)b_0} \\ 0_{b_0(a+1)} & \begin{bmatrix} \frac{1}{n_{11}} & \frac{1}{n_{12}} & \cdots & \frac{1}{n_{23}} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} 0_{(a+1)(a+1)} & 0_{(a+1)b_0} \\ \begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

به همین ترتیب $\mu + \alpha_i + \beta_{ij}$ قابل برآورد است

$\mu + \alpha_i + \beta_{ij} = ?$

$$\hat{\mu} + \hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_{11} = [1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0] \begin{bmatrix} \vdots \\ \bar{y}_{110} \\ \bar{y}_{120} \end{bmatrix} = \bar{y}_{11\cdot}$$

$$\hat{\mu} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_{ij} = \bar{y}_{ij\cdot}$$ بنابراین :

$$var(\hat{\mu} + \hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_{11}) = var(\bar{y}_{ij\cdot}) = \frac{\sigma^2}{n_{ij}}$$

به همین ترتیب می توان هنوز تابع قابل برآورد بشرح جدول ذیل برای این مدل معرفی کرد:



Scanned with CamScanner

Subject : Date

| تابع قابل برآورد | Blue |
|---|---|
| $\mu+\alpha_i+\beta_{ij}$ | $\bar{y}_{ij.}$ |
| $\beta_{ij}-\beta_{ij'};\ j\neq j'$ | $\bar{y}_{ij.}-\bar{y}_{ij'.}$ |
| $\mu+\alpha_i+\sum_{j=1}^{b_i} w_{ij}\beta_{ij},\ \sum_{j=1}^{b_i} w_{ij}=1$ | $\sum_{j=1}^{b_i} w_{ij}\bar{y}_{ij.}$ |
| $\alpha_i-\alpha_{i'}+\sum_{j=1}^{b_i} w_{ij}\beta_{ij}-\sum_{j=1}^{b_{i'}} w_{i'j}\beta_{i'j}$ | $\sum_{j=1}^{b_i} w_{ij}\bar{y}_{ij.}-\sum_{j=1}^{b_{i'}} w_{i'j}\bar{y}_{i'j.}$ |
| $\sum w_{ij}=1$ <br> $\sum w_{i'j}=1$ | |

واریانس هرکدام عبارتست از :

$$var(\bar{y}_{ij.})=\frac{\sigma^2}{n_{ij}} \qquad var(\bar{y}_{ij.}-\bar{y}_{ij'.})=\sigma^2\left(\frac{1}{n_{ij}}+\frac{1}{n_{ij'}}\right)$$

$$var\left(\sum_{j=1}^{b_i} w_{ij}\bar{y}_{ij.}\right)=\sigma^2\left(\sum_{j=1}^{b_i} w_{ij}^2/n_{ij}\right)$$

$$var\left(\sum w_{ij}\bar{y}_{ij.}-\sum w_{i'j}\bar{y}_{i'j.}\right)=\sigma^2\left(\sum \frac{w_{ij}^2}{n_{ij}}+\frac{\sum w_{i'j}^2}{n_{i'j}}\right)$$

آزمون فرض در مدل رگرسیونی :

مجدداً فرض عمومی $H_0: K'\beta=m$ را در نظر می گیریم در مدلهای رتبه غیر کامل $K'\beta$ باید قابل برآورد باشد برای مثال در جدول بالا دیدیم $\beta_{ij}-\beta_{ij'}$ قابل برآورد است و یک فرض مورد علاقه برای آزمون

$$H_0: \beta_{i1}=\beta_{i2}=\cdots=\beta_{ib_i}$$

که از جدول آنالیز واریانس صفحه قبل ⊛ دیدیم

$$F(H)=\frac{R(\beta:\alpha|\mu,\alpha)/b_0-a}{SSE/n-b_0}$$

که به صورت زیر قابل بیان است در مثال :

$$K'=\left[\begin{array}{ccc|cccc} 0&0&0&1&-1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&-1\\ 0&0&0&0&0&1&0 \end{array}\right.\quad \left.\begin{array}{c} 0\\ 0\\ -1 \end{array}\right]$$

©MICRO°

Scanned with CamScanner

Subject :

Date

$$k'\underset{\sim}{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_{11} - \beta_{12} \\ \beta_{21} - \beta_{22} \\ \beta_{21} - \beta_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{cases} \beta_{11} = \beta_{12} \\ \beta_{21} = \beta_{22} = \beta_{23} \end{cases}$$

$$k'\underset{\sim}{\beta}^{\circ} = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad (k'Gk)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3/2 \end{bmatrix}$$

$$Q = [-4 \quad 6 \quad 4] \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} = 60$$

$$= R(\beta : \alpha \mid \mu, \alpha) \qquad F = \frac{Q/s}{\hat{\sigma}^2} = \frac{60/3}{26/7}$$

مانند مثل $k' = [0 \quad 1 \quad -1 \quad \frac{1}{4} \quad \frac{3}{4} \quad -\frac{2}{8} \quad -\frac{4}{8} \quad -\frac{2}{8}]$ را در تابع قابل برآورد $H_0 : k'\underset{\sim}{\beta} = \underset{\sim}{0}$

$$k'\underset{\sim}{\beta} = \alpha_1 - \alpha_2 + (\beta_{11} + 3\beta_{12})/4 - (2\beta_{21} + 4\beta_{22} + 2\beta_{23})/8$$

که شبیه آزمون تابع جدول صفحه قبل است و قابل برآورد است. که در این جا :

$$w_{ij} = \frac{n_{ij}}{n_{i\cdot}} \qquad k'\underset{\sim}{\beta}^{\circ} = 3 \qquad k'Gk = 3/8$$

$$Q = 3^2 \cdot \frac{8}{3} = 24 = R(\alpha \mid \mu)$$

که فرضیه فوق به صورت کلی $H_0 : \alpha_i + \sum n_{ij}\beta_{ij}/n_{i\cdot} = \alpha_{i'} + \sum n_{i'j}\beta_{i'j}/n_{i'\cdot}$ باشد

که دیدیم $Q$ برای آزمون این فرض $R(\alpha \mid \mu)$ است که قبلاً دیدیم

برای بررسی معنی داری اثر متقابل در عناصر $\beta$ که هم به کار رفت پس $\begin{cases} H_0 : \text{همه } \alpha \text{ ها برابرند} \\ Q = R(\alpha \mid \mu) \end{cases}$

و برای فرضیه کلی $H_0 : \beta_{ij} = \beta_{i'j'}$ $\quad j = j'$

$Q = R(\beta : \alpha \mid \mu, \alpha)$ مانند

Scanned with CamScanner

Subject : Date

## مدل با محدودیت :

در مدل کی آستیاژ ای محمولا محدودیت $\begin{cases}\sum_{j=1}^{b_i} w_{ij}\beta_{ij}=0 \\ \sum w_{ij}=1\end{cases}$ و $w_{ij}=\frac{n_{ij}}{n_{i\cdot}}$ است مورد نظر است.

همون طور که در این مدل ها دیدیم $\mu+\alpha_i$ و $\alpha_i-\alpha_{i'}$ تابل برآورد درجه قابل آزمون می باشند با در نظر گرفتن $w_{ij}=\frac{n_{ij}}{n_{i\cdot}}$ محدودیت $\sum_{j=1}^{b_i} w_{ij}\beta_{ij}=0$ معادل می شود با

$\sum_{j=1}^{b_i} n_{ij}\beta_{ij}=0$ (که بر روی سطری برابر $n_{i\cdot}$) و آن گاه فرضیه

$$H: \alpha_i+\sum_j n_{ij}\beta_{ij}/n_{i\cdot}=\alpha_{i'}+\sum_j n_{ij}\beta_{ij}/n_{i'}$$

تبدیل می شود به همه $\alpha_i$ ها برابرند $H_0$ که دیدیم با $F(\alpha|\mu)$ آزمون می شود

$$F(\alpha|\mu)=\frac{R(\alpha|\mu)/a-1}{\hat{\sigma}^2}$$

و صدت $F(\alpha|\mu)$ مستقل از

صدت $F(\beta:\alpha|\mu,\alpha)$ است که فرضیه همه $\beta$ ها برابرند $H_0$ را آزمون می کند.
(درون عامل)

به هر حال شدت کند که اگر $w_{ij}\neq\frac{n_{ij}}{n_{i\cdot}}$ ولی $\sum_{j=1}^{b_i} w_{ij}=1$ برای مثال $w_{ij}=\frac{1}{b_i}$

فرض همه $\alpha_i$ ها برابرند $H_0$ راهی توان آزمون کرد را $F(\alpha|\mu)$ ، آماره آزمون نیست و صدت کسر آماره این آزمون مستقل از $F(\beta:\alpha|\mu,\alpha)$ نخواهد بود.

در مدل متعادل $(n_{ij}=n)$

نکته: در نظر گرفتن بعضی تعدیل ها تنها در این مدل ها معنی دار است مثل $\sum_{i=1}^{a}\alpha_i^0=0$ و

چون دستگاه معادلات نرمال ساده حل می شود.

$$\sum_{j=1}^{b_i}\beta_{ij}^0=0$$

$$\mu^0=\bar{y}_{...} \qquad \alpha_i^0=\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...}$$

$$\beta_{ij}^0=\bar{y}_{ij.}-\bar{y}_{i..}$$

©MICRO

Scanned with CamScanner

Subject : Date

همچنین فرض می‌شود $\sum_{i=1}^{a} \alpha_i = 0$ و $\sum_{j=1}^{b_i} \beta_{ij} = 0$ روی مدل محاسبات در نظر گرفته می‌شود

آن‌گاه $\mu$ و $\alpha_i$ و $\beta_{ij}$ مقدار آن‌ها برآورد نشده برآوردهای BLUE یا Blue هستند

$$\hat{\mu} = \bar{y}_{...} \qquad \hat{\alpha}_i = \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...}$$

$$\hat{\beta}_{ij} = \bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..}$$



Scanned with CamScanner