

(5)

Subject :

Date

رستگاه معادلات خطی و معادلات تقیم یافته

فرض کنید رستگاه معادلات $AX = Y$ مد نظر است اگر A^{-1} وجود داشته باشد پس می توانیم $X = A^{-1}Y$ می دانیم رستگاه همیشه جواب دارد و تقسیم پذیر است اما اگر $|A| = 0$ باشد رستگاه ممکن است سازگار باشد و یا نه اگر رستگاه سازگار باشد و G دایره تقیم یافته از A باشد به روش جوابها (تقداریها جواب) بدست می آیند

دارد تقیم یافته A

① تقیم یافته سبیل: رستگاه معادلات $AX = Y$ دارای حلی به صورت $X = GY$ است اگر تنها اگر $AGA = A$

$$AGA = A \Rightarrow AGAX = AX \Rightarrow A(GY) = Y \Rightarrow X = GY$$

② تقیم یافته سبیل: فرض کنید A دارای q ستون و r سطر و G دایره تقیم یافته A باشد آن گاه رستگاه معادلات $AX = Y$ دارای حلی به صورت

$$\tilde{X} = GY + (GA - I)Z$$

است که در آن Z برداری دلخواه است

$$AX = A(GY + (GA - I)Z) = AGY + AGAZ - AZ = AGY \quad \text{از ۱} \quad AX = GY$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} 7 \\ 21 \end{bmatrix} \quad |A| = 0$$

$$r(A) = 1 \quad A^+ = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 6 & 21 \end{pmatrix} \quad r(A^+) = r(A^+) = 1$$

رستگاه معادلات سازگار است

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_G \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ 21 \end{pmatrix}}_Y + \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_G \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}}_A - \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_I \right) Z$$

$$= \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) Z$$

$$x_1 = 7 \quad x_2 = -1 \quad \leftarrow Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{برای مثال}$$

$$x_1 = 11 \quad x_2 = -2 \quad \leftarrow Z = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

مسئله 9 سید

با توجه به مثال 9 می دانیم معکوس تعمیم یافته کمترین مربعات و در این مثال با استفاده از رد

معکوس تعمیم یافته خواص پیدا می شود و رابطه بین Z و $\tilde{X}$ در این مثال

$$\tilde{X} = (G - G^0)Y + (I - G^0A)Z$$

است. لذا می توان گفت با توجه به ارتباطی که بین $\tilde{X}$ و Z وجود دارد در نهایت تمام حل در ضمن دستگاه معادلات سازگار با یک رابطه زیر قابل بیان است

$$\tilde{X} = GY + (GA - I)Z$$

نمونه 12 سید

فرض کنید $H = GA$ و $r(A) = r$ و A راوی q ستون باشد و r سطر

$$r(I - H) = q - r \quad \text{و} \quad r(H) = r(GA) \leq r(A) = r$$

$$r(H) = r(GA) \leq r(A) = r \quad \text{از طرفی} \quad AH = AGA = A \quad \text{پس} \quad r(A) = r(H) \quad \text{و} \quad r(H) = r$$

$$\text{پس} \quad r(H) = r$$

چون H خود توان است $I - H$ خود توان است و چون I $q \times q$ است $r(I) = q$

$$\text{از طرفی در ماتریس خود توان رتبه} \quad \text{tr} \quad \text{برابر است پس:} \quad r(I - H) = \text{tr}(I - H) = q - \text{tr}(H) = q - r$$

قضیه 4 سید: فرض کنید A ماتریس q ستون و $r(A) = r$ باشد و

به q کمترین گاه تعداد حل های مستقل خطی دستگاه معادلات $AX = Y$ برای $q - r + 1$ باشد

$$\tilde{X} = GY + (GA - I)Z$$

چون $r(I - H) = q - r$ پس فقط $q - r$ بردار در Z وجود دارد و بقیه بردارها تکراری

از همین $q - r$ بردار هستند و فقط $q - r$ بردار مستقل خطی $(H - I)Z$ وجود دارد و با

به کار بردن همین $q - r$ بردار مستقل خطی در $\tilde{X}$ ، $q - r$ حل مستقل خطی ایجاد می شود

که برای $q - r + 1$ و $q - r + 2$ فرض کنید $\tilde{X} = GY + (H - I)Z$ این حل های مستقل

باشند از طرفی می دانیم $\tilde{X} = GY$ یکی حل دستگاه است فرض کنید یکی حل داشته $\tilde{X}$ است

پس طبق تعریف وابسته خطی برای λ_i هایی که همگی صفر نیستند

$$GY = \sum \lambda_i \tilde{X}_i = \sum \lambda_i (GY + (H - I)Z)$$

$$G\mathbf{y} = G\mathbf{y} \sum \lambda_i + \sum \lambda_i [(H-I)\mathbf{z}_i']$$

Subject:

Year:

Month:

Date:

جمله ی سمت چپ $\mathbf{Z}$ ندرایم پس جمله دوم سمت راست باید صفر باشد چون $(H-I)\mathbf{z}_i'$ مستقله طبق تعریف استقلال باید λ_i ها صفر باشند که مخالف فرض است.
صفر است پس $q-r+1$ جواب مستقل خطی داریم.
نکته (بسیار) بزرگ هر ماتریس $A_{p \times q}$ می توان محاسبه کرد P و Q به این ترتیب که P و Q به این ترتیب

$$\Delta = P A Q = \begin{pmatrix} D_{r \times r} & 0_{r \times q-r} \\ 0_{(p-r) \times r} & 0_{(p-r) \times (q-r)} \end{pmatrix}$$

$$r = \text{rank}(A)$$

$D = \text{diag}\{d_i\}$ که D یک ماتریس قطری است

$$\Delta^- = \begin{bmatrix} D_r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{آن گاه: } \overbrace{A}^{\text{مفروض تعیین یافته}} = \overbrace{A}^{\text{مفروض تعیین یافته}} = Q \Delta^- P$$

$$A = P^{-1} \Delta Q^{-1} \rightarrow A A A = P^{-1} \Delta Q^{-1} Q \Delta^- P P^{-1} \Delta Q^{-1} = P^{-1} \Delta \Delta^- \Delta Q^{-1} = A$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad r(A) = 2$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ -2/3 & -1/3 & 1 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$PAQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \Delta^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow G = Q \Delta^- P = 1/3 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نکته (بسیار) فرض کنید G مفروض تعیین یافته $X'X$ است آن گاه $X'X G X'X = X'X$

$$\rightarrow \text{Trans} \rightarrow X'X G' X'X = X'X \quad (1)$$

$$X G X' = X \quad (2)$$

$$X G X' = X \quad (3)$$

$$X G X' = X \quad (4)$$

$$X'X G X'X = X'X \quad (5)$$

$$PX'X = QX'X \quad \text{مثال ۲}$$

$$\Rightarrow PX' = QX'$$

$$X'X = 0 \Rightarrow X = 0 \quad \text{مثال ۲}$$

Subject:

Year:

Month:

Date:

$$(۳) \text{ فرض کنید } F \text{ و } G \text{ ماتریس های } n \times n \text{ باشند} \quad \text{مثال ۳}$$

$$\lambda \frac{GX'X}{X} = \lambda \frac{FX'X}{X} \quad (۱) \text{ (از سمت ۲)}$$

$$\text{از طرفی داریم} \quad \cancel{GX'X = FX'X} \quad \text{مثال ۳}$$

$$GX'X = FX'X \Rightarrow GX' = FX'$$

$$* : XGX' = XFX' \quad \text{مثال ۳}$$

درستی هر XGX' بر همه ماتریس های $n \times n$ است.

واریان Moore-penrose

penrose (۱۹۵۵) کار Moore (۱۹۲۰) تعریف دارد.

penrose ماتریس را k به قدری تعریف کرد که وجود دارد، چهار شرط

$$۱) AKA = A$$

$$۲) KAK = K$$

$$۳) (KA)' = KA$$

$$۴) (AK)' = AK$$

نیم را برقرار باشد Generalized inverse $A^{(g)}$

Reflexive generalized inverse $A^{(r)}$

Normalized generalized inverse $A^{(n)}$

Moore-penrose inverse $A^{(p)}$

این شرایط را $penrose$ k معکوس به جز $n \times n$ می باشد.

$$\underline{A^{(r)}} = \underline{A^{(g)}} \underline{A} \underline{A^{(g)}} \quad A^{(n)} = A' (AA')^{(g)}$$

معیار

trace tr

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n} \rightarrow \text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

خواص آن:

$$B, A \quad \text{tr}(A \pm B) = \text{tr}(A) \pm \text{tr}(B)$$

$$A_{n \times p}, B_{p \times n} \quad \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

✓

Subject:

Year:

Month:

Date:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$$\rightarrow \text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

: trace اثر

خاصیت:

$$B_{n \times n} A_{n \times n} \rightarrow \text{tr}(A+B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$$

$$A_{n \times p} B_{p \times n} \rightarrow \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

$$\text{if } P_{n \times n} : \text{nonsingular}, A_{n \times n} \Rightarrow \text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(A)$$

$$C_{n \times n} : \text{orthogonal matrix}, A_{n \times n} \Rightarrow \text{tr}(C'AC) = \text{tr}(A)$$

$$\text{if } \text{rank}(A_{n \times p}) = r \Rightarrow \text{tr}(A^{-1}A) = \text{tr}(AA^{-1}) = r$$

درختی

Determinant

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad \text{اگر ماتریس مربعی A به صورت}$$

A_{22} مربع و A_{12} و A_{21} بردار باشند آن گاه

$$|A| = |A_{11}| |A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}|$$

$$= |A_{22}| |A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}|$$

(معادله به درختی)

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه: eigen values and eigen vectors

اگر A ماتریس مربعی $n \times n$ باشد آن گاه اثر

$$Ax = \lambda x \quad x \neq 0$$

λ مقدار ویژه و x بردار ویژه

مقدار ویژه و مقدار ویژه یک ماتریس برابر با مقدار ویژه است و اگر A ماتریس

واحد باشد تمامی مقادیر ویژه آن برابر ۱ هستند همین داریم

$$Ax = \lambda x \Rightarrow Ax - \lambda x = 0 \Rightarrow (A - \lambda I)x = 0$$

برای داشتن جواب غیر صفری $(A - \lambda I)$ کی ماتریس ویژه باشد

$$|A - \lambda I| = 0 \quad \text{یعنی}$$

مقدار ویژه

λ برابر صفر نیستند. همچنین اگر مقادیر ویژه باشند آن‌ها برابر صفر و مقادیر ویژه
 اگر غیر صفر باشند می‌توان برآورد داشت، مقاصد باشند.

مثال: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \left| \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = (1-\lambda)(3-\lambda) = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3 \rightarrow$ مقادیر ویژه

$A \underline{x} = \lambda \underline{x} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = x_1 \\ x_1 + 3x_2 = x_2 \Rightarrow x_1 = -2x_2 \end{matrix}$

$\Rightarrow \underline{x} = c \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{c = 1/\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{x}^T \underline{x} = 1$
 $\begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} = 1$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 3x_2 \\ x_1 + 3x_2 = 3x_2 \Rightarrow x_1 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \underline{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\rightarrow \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \underline{x}^T \underline{x} = 1$
 $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = 1$

نکته: $A_{p \times p}$ ماتریس مربع p مرتبه حاصل ضرب مقادیر ویژه

و اثر آن مجموع مقادیر ویژه است $\sum_{i=1}^p \lambda_i = \text{tr}(A)$
 $|A| = \prod_{i=1}^p \lambda_i$

نکته: اگر A ماتریس متبسط به مقدار $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ آن‌ها $\lambda_i > 0 \quad \forall i$

اگر A غیر متبسط به آن‌ها $\lambda_i \geq 0 \quad \forall i$ و مقدار مقادیر ویژه

$\lambda_i > 0$ برابر با رتبه ماتریس A است. (اثبات رغبی)

نکته: اگر A ماتریس متبسط به آن‌ها

1

Subject :

Year . Month . Date . ()

$$A = \lambda_1 \underline{e}_1 \underline{e}_1' + \lambda_2 \underline{e}_2 \underline{e}_2' + \dots + \lambda_n \underline{e}_n \underline{e}_n' = \sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{e}_i \underline{e}_i'$$

که این مجزیه، مجزیه اصلی می‌تواند که در آن $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ بردارهای یکتا هستند.

$$\underline{e}_i \underline{e}_j' = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ مقادیر ویژه ماتریس A هستند.

ماتریس $P = (\underline{e}_1 \dots \underline{e}_n)$ را به گونه‌ای داریم $P P' = P' P = I$ که P ماتریس وارون پذیر است.

$$A = P \Lambda P'$$

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1) \dots \text{diag}(\lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = P \Lambda^{-1} P' = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \underline{e}_i \underline{e}_i'$$

مشتق تری نسبت به یک بردار دیفرانسیل

فرض کنید $X_{p \times q}$ و $f(x)$ تابعی از x به آن نگاه کنید.

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x_{ij}} \right] \rightarrow \text{ماتریس}$$

اگر $X_{p \times q}$ بردار باشد یعنی $x = (x_1 \dots x_p)'$ ، $p=q$ ، $p=p$ ، $q=1$ و

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_p} \end{bmatrix} \quad \text{ماتریس از مشتقات}$$

حاصل از مشتق می‌شود:

$$\textcircled{1} \frac{\partial a' x}{\partial x} = a$$

$$\textcircled{2} \frac{\partial x' x}{\partial x} = 2x$$

$$۳) \frac{\partial \underline{x}' A \underline{x}}{\partial \underline{x}} = 2 A \underline{x}$$

$$۴) \frac{\partial \underline{x}' A \underline{y}}{\partial \underline{x}} = A \underline{y}$$

نکته ۱: اگر X ماتریس نامعکوس باشد و $P(x) = |X|$ آن را به صورت

$$\frac{\partial |X|}{\partial x_{ij}} = x_{ij}^* = \text{cofactor}(x_{ij}) \rightarrow \begin{cases} \text{اگر } i \text{ و } j \text{ متناظر باشند} \\ \text{(X متعادل نباشد)} \end{cases}$$

کوفاکتور مربوط به x_{ij}

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \text{cofactor}(a_{ij}) = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$$

در اینجا حاصل از حذف سطر i ام
و ستون j ام (مقدار a_{ij})

نکته ۲: اگر X متعادل باشد

$$\frac{\partial |X|}{\partial x_{ij}} = \begin{cases} x_{ii}^* & i=j \\ 2x_{ij}^* & i \neq j \end{cases}$$

نکته ۳: اگر $P(x) = \text{tr}(XY)$

$$\frac{\partial \text{tr}(XY)}{\partial X} = \begin{cases} Y' & \text{اگر } X \text{ متعادل نباشد} \\ Y + Y' - \text{diag}(Y) & \text{اگر } X \text{ متعادل باشد} \end{cases}$$

نکته ۴: اگر $P(x) = X^{-1}$

اگر X متعادل نباشد

$$\frac{\partial X^{-1}}{\partial x_{ij}} = \begin{cases} -X^{-1} J_{ij} X^{-1} & i=j \\ -X^{-1} J_{ij} X^{-1} & i \neq j \end{cases}$$

اگر X متعادل باشد

$$\begin{cases} -X^{-1} (J_{ij} + J_{ji}) X^{-1} & i \neq j \end{cases}$$

که در اینجا J زوال می‌گیرد و $n \times n$ است. n عناصر دارد. n عنصر زوال می‌گیرد. n است.

بردار و ماتریس تصادفی . بردار یا ماتریس مولفه‌های متغیر تصادفی هستند یعنی

بردار تصادفی: همه مولفه‌های آن متغیر تصادفی اند $\underline{X}' = [X_1 \dots X_p]$ →

ماتریس تصادفی: همه عناصر آن متغیر تصادفی اند $X = \begin{bmatrix} X_{11} & \dots & X_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ X_{n1} & \dots & X_{np} \end{bmatrix}$ →

بردار تصادفی و ماتریس تصادفی

هر کدام از عناصر بردار تصادفی دارای یک توزیع احتمال خاصه‌ای است و دارای میان و پراش هستند

$$i = 1 \dots p; \mu_i = E(X_i) \text{ و } \sigma_i^2 = E(X_i - \mu_i)^2$$

$$\mu_i = \begin{cases} \int x_i f_i(x_i) dx_i & \text{پیوسته} \\ \sum x_i p_i(x_i) & \text{گسسته} \end{cases} \quad \sigma_i^2 = \begin{cases} \int (x_i - \mu_i)^2 f_i(x_i) dx_i \\ \sum (x_i - \mu_i)^2 p_i(x_i) \end{cases}$$

همچنین رگرسیون زوج (X_i, X_k) تابع احتمال توأم دارند از آن از رابطه خطی بین آنها با واریانس بصورت

$$\sigma_{ik} = E(X_i - \mu_i)(X_k - \mu_k)$$

$$\sigma_{ik} = \begin{cases} \int \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - \mu_i)(x_k - \mu_k) f_{ik}(x_i, x_k) dx_i dx_k & \text{تعریف بصورت پیوسته} \\ \sum_{S_{x_i}} \sum_{S_{x_k}} (x_i - \mu_i)(x_k - \mu_k) p_{ik}(x_i, x_k) & \text{گسسته} \end{cases}$$

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ii} = \sigma_i^2 \text{ ، } i = k \text{ به این است که}$$

نکته: p متغیر تصادفی پیوسته بردار $\underline{X} = [X_1 \dots X_p]$ دو متغیر مستقل اند

$$P_{1-p}(x_1 \dots x_p) = P_1(x_1) \dots P_p(x_p)$$

$$\text{if } X_i, X_k \Rightarrow \sigma_{ik} = 0 \quad \text{در این صورت}$$

دقت کنید عکس نتیجه برقرار نیست

Subject :

Year . Month . Date . ()

وزارت آمار و اقتصاد (یک بردار تصادفی) و بردار تصادفی

$$E(\underline{X}) = \underline{\mu} = \begin{bmatrix} E(X_1) \\ \vdots \\ E(X_p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix}$$

← بردار میانگین جامعه

و ماتریس کوواریانس

$$\Sigma = E(\underline{X} - \underline{\mu})(\underline{X} - \underline{\mu})' = E \left(\begin{bmatrix} X_1 - \mu_1 \\ \vdots \\ X_p - \mu_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 - \mu_1 & \dots & X_p - \mu_p \end{bmatrix} \right)$$

$$= E(\underline{X}\underline{X}') - \underline{\mu}\underline{\mu}'$$

$$= E \begin{bmatrix} (X_1 - \mu_1)^2 & (X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2) & \dots & (X_1 - \mu_1)(X_p - \mu_p) \\ \vdots & (X_2 - \mu_2)^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ (X_p - \mu_p)(X_1 - \mu_1) & \dots & \dots & (X_p - \mu_p)^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1p} \\ \vdots & \sigma_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \dots & \dots & \sigma_{pp} \end{bmatrix} = \text{Cor}(\underline{X}) = \Sigma$$

$\underline{\mu} \rightarrow$ بردار میانگین
 $\Sigma \rightarrow$ ماتریس کوواریانس

معمولاً X_{px1} و $A_{p \times p}$ و $b_{p \times 1}$ که

$$1) E(A\underline{X} + \underline{b}) = A E(\underline{X}) + \underline{b}$$

$$2) \text{Cor}(A\underline{X} + \underline{b}) = A \Sigma A'$$

$$E(A\underline{X} + \underline{b} - A\underline{\mu} - \underline{b})(A\underline{X} + \underline{b} - A\underline{\mu} - \underline{b})' = E(A(\underline{X} - \underline{\mu}))(A(\underline{X} - \underline{\mu}))'$$

$$= A E(\underline{X} - \underline{\mu})(\underline{X} - \underline{\mu})' A' = A \Sigma A'$$

ماتریس همبستگی

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1p} \\ \rho_{12} & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \rho_{1p} & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rho_{ik} = \frac{\sigma_{ik}}{\sqrt{\sigma_{ii}} \sqrt{\sigma_{kk}}}$$

نشان است X_k و X_i را

ماتریس انحراف استاندارد

$$D_6^{1/2} = [\text{diag}(\Sigma)]^{1/2} = \begin{bmatrix} \sqrt{\sigma_{11}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\sigma_{pp}} \end{bmatrix}$$

پس $\Sigma = P_6 P D_6$ و D_6^{-1} ارجع راست ضرب کنند

$$D_6^{-1} \Sigma D_6^{-1} = P$$

انفرانردن بردار تصادفی

در عمل گاهی به متغیر تصادفی زیادی در مطالعه وجود دارد و در نتیجه اندازه نمونه داخل و خارج کرده واقعی شود به عنوان نمونه فرض کنید متغیر تصادفی مورد نظر در درجه واقعی واقع شود به طوری،

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_{q+1} \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} \begin{matrix} \left. \begin{matrix} x_1 \\ x_4 \end{matrix} \right\} q \\ \left. \begin{matrix} x_{q+1} \\ \vdots \\ x_p \end{matrix} \right\} p-q \end{matrix} = \begin{bmatrix} \underline{X}^{(1)} \\ \underline{X}^{(2)} \end{bmatrix} \Rightarrow E(\underline{X}) = \underline{\mu} = \begin{bmatrix} \underline{\mu}^{(1)} \\ \underline{\mu}^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{matrix} & \begin{matrix} q & p-q \end{matrix} \\ \begin{matrix} q \\ p-q \end{matrix} & \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\Sigma = E \left(\begin{bmatrix} \underline{X}^{(1)} - \underline{\mu}^{(1)} \\ \underline{X}^{(2)} - \underline{\mu}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{X}^{(1)} - \underline{\mu}^{(1)} & \underline{X}^{(2)} - \underline{\mu}^{(2)} \end{bmatrix}' \right)$$

$$\Sigma_{12} = E \left((\underline{X}^{(1)} - \underline{\mu}^{(1)}) (\underline{X}^{(2)} - \underline{\mu}^{(2)})' \right)$$

$$\Sigma_{12} = \Sigma_{21}'$$

نمونه تصادفی

معمولاً به تعداد مشخصه به مطالعه نمونه می پردازیم و Σ محاسبه

به طور کلی برای هر متغیر n مشاهده داریم مطالعه برای نمونه n

$$\underline{X}' = [x_1 \dots x_p]$$

برای هر متغیر n مشاهده

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{p1} & \dots & x_{pn} \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \rightarrow \bar{x}_p \end{matrix} \quad \bar{\underline{X}} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_p \end{bmatrix}$$

PAPCO

$$S_{ik} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_i)(x_{kj} - \bar{x}_k) \quad S_n = \begin{bmatrix} s_{11} & \dots & s_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{p1} & \dots & s_{pp} \end{bmatrix}$$

$$S_{ik} = \frac{1}{n-1}$$

دعوتی از یک جامعه نمونه در مختلفی می توان استخراج کرد و در صورت X_{ik} از نمونه i از نمونه k تقسیم
 می کنند هر عنصر مارکس X متویضاتی است

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & \dots & X_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ X_{p1} & \dots & X_{pn} \end{bmatrix}_{p \times n}$$

$\underbrace{\quad}_{X_1} \quad \dots \quad \underbrace{\quad}_{X_n}$

و نمونه را به صورت $X_1, \dots, X_n$ می نویسیم

$X_1, X_2, \dots, X_n$
 $X_{p1}, X_{p2}, \dots, X_{pn}$

$$\begin{bmatrix} X_{11} \\ X_{p1} \end{bmatrix}$$

$$X'_1 = [X_{11} \dots X_{p1}] \quad \dots \quad X'_n = [X_{1n} \dots X_{pn}]$$

$$E(X_{p \times n}) = \begin{bmatrix} \mu_1 & \dots & \mu_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \mu_p & \dots & \mu_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix} [1 \dots 1] = \underline{\mu} \underline{1}'_n$$

به $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی می گویند اگر

$$P(x_1, \dots, x_n) = P(x_1) \dots P(x_n)$$

$$P(x_j) = P(x_{1j} \dots x_{pj})$$

$$\text{cov}(X) = E(X - \bar{X})(X - \bar{X})'$$

$$V(X_{p \times n}) = E(X - \underline{\mu} \underline{1}'_n)(X - \underline{\mu} \underline{1}'_n)'$$

$$= \left(\begin{bmatrix} X_{11} & \dots & X_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ X_{p1} & \dots & X_{pn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu_1 & \dots & \mu_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \mu_p & \dots & \mu_p \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} X_{11} & \dots & X_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ X_{p1} & \dots & X_{pn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu_1 & \dots & \mu_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \mu_p & \dots & \mu_p \end{bmatrix} \right)'$$

$$= \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & \Sigma \end{pmatrix} = I_n \otimes \Sigma$$

که بدان $\otimes$ ضرب کرونکر است.

ضرب کرونکر: اگر A یک ماتریس $n \times m$ و B یک ماتریس $p \times q$ باشد آن گاه ضرب کرونکر

$$C = A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1m}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}B & \dots & a_{nm}B \end{bmatrix}$$

آن عبارت است از

که آن گاه C یک ماتریس $(np) \times (mq)$ است.

مقصد: فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع توکمی باشد دارای

بردار میانگین μ و ماتریس کواریانس Σ است $X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} (\mu, \Sigma)$ در اینصورت

$$E(\bar{X}) = \mu \quad (\text{الف})$$

$$\text{Cov}(\bar{X}) = \frac{1}{n} \Sigma \quad (\text{ب})$$

$$E(S_n) = \frac{n-1}{n} \Sigma \Rightarrow E\left(\frac{n}{n-1} S_n\right) = \Sigma \quad (\text{ج})$$

(اثبات به عهده دانشجو)

دارین مقصد یافته دکل: بعضی مواقع علاقه مند به ارائه یک مقدار عددی برای تشریح ماتریس S داریم که

$$T = \begin{cases} S_{11} + \dots + S_{pp} = \sum_{i=1}^p S_{ii} = \text{tr}(S) & \text{مقدار} \\ \frac{G_1^2}{G_{11}} + \dots + \frac{G_p^2}{G_{pp}} = \sum G_i^2 = \text{tr}(\Sigma) & \text{مقدار} \end{cases}$$

Subject :

Year :

Month :

Date :

()

$$G = \begin{cases} |S| = \prod_{i=1}^p \lambda_i & \text{بردار نمونه} \\ |\Sigma| = \prod_{i=1}^p \lambda_i & \text{بردار جامعه} \end{cases}$$

نمایش ماتریس برابری و ماتریس کواریانس نمونه :

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_p \end{bmatrix} = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{p1} & \dots & x_{pn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{n \times 1} = \frac{1}{n} X I_n \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_p \end{bmatrix}$$

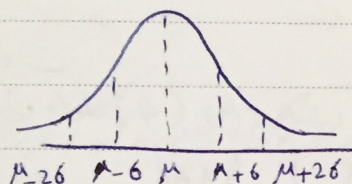
در تعریف $H = I_n - \frac{1}{n} J_n$ که ماتریس خودتوان است و در آن I_n ماتریس

واحد $n \times n$ و J_n ماتریس $n \times n$ با عناصر 1 است :

$$S = \frac{1}{n-1} X H X'$$

معمالی زغال عند صفره

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \rightarrow f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} (x-\mu)^2\right\} \quad -\infty < x < \infty$$



$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 0.68$$

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0.95$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

(معمالی زغال عند صفره) $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ (معمالی زغال عند صفره)

$$1) U = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi_m^2 \quad m=1, \dots, n$$

$$2) T = \frac{Z}{\sqrt{U/m}} \sim t_m \quad \leftarrow Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1), U \sim \chi_m^2$$

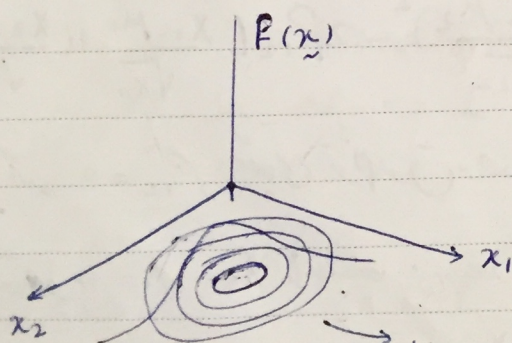
$$3) U \sim \chi_m^2, V \sim \chi_n^2, U, V: \text{independent} \rightarrow F = \frac{U/m}{V/n} \sim F(m, n)$$

$$B = \frac{V}{U+V} \sim \text{Beta}(n/2, m/2)$$

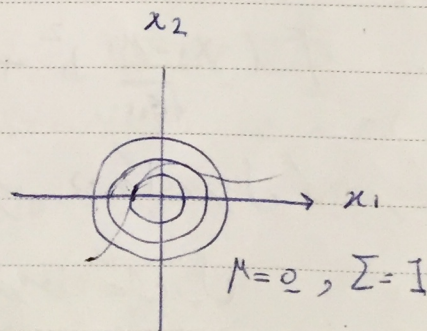
معمالی زغال عند صفره

$$\underline{x}' = [x_1 \dots x_p]$$

$$f(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} (\underline{x} - \underline{\mu})' \Sigma^{-1} (\underline{x} - \underline{\mu})\right\}$$



کانتور یا منحنی ارتفاع



کانتور یا منحنی ارتفاع

تمرین: به دست بیاورید که $\int \dots \int P(\underline{x}) d\underline{x} = 1$ صدق می کند

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\underline{x} - \underline{\mu})' \Sigma^{-1} (\underline{x} - \underline{\mu}) \right\} d\underline{x} = 1$$

درستی اول

در نظر آید

$$\underline{y} = \Sigma^{-1/2} (\underline{x} - \underline{\mu})$$

$$\underline{x}' = (x_1, x_2)$$

ثابت
در $p=2$ (43-44) (A) صحت

$$\int \dots \int e^{-\frac{1}{2} \underline{x}' A \underline{x}} d\underline{x} = (2\pi)^{p/2} |A|^{-1/2}$$

استدلال Aitken **حکایتی نرنال در مقوله**

$$E(X_1) = \mu_1, E(X_2) = \mu_2, \sqrt{X_1} = \sigma_{11}, \sqrt{X_2} = \sigma_{22}$$

$$\text{Cor}(X_1, X_2) = \rho_{12}, \rho_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}} \sqrt{\sigma_{22}}}, \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \Sigma^{-1} = \frac{1}{\sigma_{11} \sigma_{22} - \sigma_{12}^2} \begin{bmatrix} \sigma_{22} & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{12} & \sigma_{11} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{12} = \rho_{12} \sqrt{\sigma_{11}} \sqrt{\sigma_{22}} \Rightarrow \sigma_{11} \sigma_{22} - \sigma_{12}^2 = \sigma_{11} \sigma_{22} (1 - \rho_{12}^2)$$

در نهایت:

$$P(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi \sqrt{\sigma_{11} \sigma_{22} (1 - \rho_{12}^2)}} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2(1 - \rho_{12}^2)} \right\}$$

$$\left[\left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}} \right)^2 + \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}} \right)^2 - 2\rho_{12} \left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}} \right) \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}} \right) \right]$$

نکته: اگر $\rho_{12} = 0$ **حکایتی نرنال** به صورت حاصل ضرب دو **حکایتی نرنال** یک مقوله است

به استقلال X_1 و X_2 را نتیجه می دهد. پس فقط در مورد **حکایتی نرنال**

$$X_1, X_2 \text{ مستقل} \Leftrightarrow \text{Cor}(X_1, X_2) = 0$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{x}' \\ \underline{x}'' \end{bmatrix} \text{ قابل تقسیم است اگر } \Sigma_{12} = \Sigma_{21} = 0 \Leftrightarrow \underline{x}_1, \underline{x}_2 \text{ مستقل}$$

هر مجموعه از ترکیبات خطی دارای توزیع نرمال است

$$\underline{X} \sim N(\underline{\mu}, \underline{\Sigma}), \quad \underline{Y} = \underline{A}\underline{X} + \underline{b} \quad A_{q \times p} \quad b_{q \times 1}$$

$$\Rightarrow \underline{Y} \sim N(\underline{A}\underline{\mu} + \underline{b}, \underline{A}\underline{\Sigma}\underline{A}') \quad \text{نکته ۲}$$

اگر توزیع دارای یکی توزیع توأم دوگانه نرمال باشند آن گاه دلیلی ندارد که توزیع توأم

آنچه نیز نرمال باشد یکی توزیع دارای یکی توزیع چند متغیر نرمال یکی توزیع یکی متغیر نرمال است

اما اگر $\underline{Y}_1$ و $\underline{Y}_2$ نرمال باشند مستقل $\underline{Y} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_1 \\ \underline{Y}_2 \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} \underline{\mu}_1 \\ \underline{\mu}_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \underline{\Sigma}_1 & 0 \\ 0 & \underline{\Sigma}_2 \end{bmatrix}\right)$ $\underline{Y}_1 \sim N(\underline{\mu}_1, \underline{\Sigma}_1)$ و $\underline{Y}_2 \sim N(\underline{\mu}_2, \underline{\Sigma}_2)$

فرض کنید $\underline{X} \sim N(\underline{\mu}, \underline{\Sigma})$ و $\underline{Y} = \underline{\Sigma}^{-1/2}(\underline{X} - \underline{\mu})$ در این صورت $\underline{Y}_1, \dots, \underline{Y}_p$ متغیر نرمال استاندارد هستند. (اثبات با نمونه)

مثلاً $\underline{Y} \sim N(0, \underline{I})$ $\underline{Y}_1 \sim N(0, 1)$ $\underline{Y}_p \sim N(0, 1)$

قضیه ۲: تابع چگالی $\underline{X} \sim N(\underline{\mu}, \underline{\Sigma})$ عبارت است از:

$$\phi_{\underline{X}}(\underline{t}) = \exp(i \underline{t}' \underline{\mu} - \frac{1}{2} \underline{t}' \underline{\Sigma} \underline{t})$$

قبل $\underline{Y} = \underline{\Sigma}^{-1/2}(\underline{X} - \underline{\mu})$ را در نظر بگیریم $\underline{X} = \underline{\Sigma}^{1/2} \underline{Y} + \underline{\mu}$

$$\phi_{\underline{X}}(\underline{t}) = E(e^{i \underline{t}' \underline{X}}) = e^{i \underline{t}' \underline{\mu}} E(e^{i \underline{u}' \underline{Y}}) \quad \text{①}$$

که در آن $\underline{u}' = \underline{t}' \underline{\Sigma}^{1/2}$ می باشد از طرفی طبق قضیه بالا

$\underline{Y} \sim N(0, \underline{I}) \Rightarrow \underline{Y}_1 \sim N(0, 1) \rightarrow E(e^{i u_1 \underline{Y}_1}) = e^{-u_1^2/2}$
 $\underline{Y}_p \sim N(0, 1) \rightarrow e^{-u_p^2/2}$ ②

لذا از ① و ② $\phi_{\underline{X}}(\underline{t}) = e^{i \underline{t}' \underline{\mu}} \times E(e^{i u_1 \underline{Y}_1}) E(e^{i u_2 \underline{Y}_2}) \dots$
 $= e^{i \underline{t}' \underline{\mu}} \prod_{i=1}^p \pi e^{-u_i^2/2}$ در نظر داشته باشید $\underline{Y}_1, \dots, \underline{Y}_p$ مستقل

Subject:

Year:

Month:

Date: ()

$$= e^{i \underline{t}' \underline{\mu} - \underline{u}' \underline{u} / 2} \xrightarrow{\underline{u}' = \underline{t}' \Sigma^{1/2}} e^{i \underline{t}' \underline{\mu} - \frac{1}{2} \underline{t}' \Sigma \underline{t}}$$

$$M_{\underline{X}}(\underline{t}) = E(e^{\underline{t}' \underline{X}}) = e^{\underline{t}' \underline{\mu} + \frac{1}{2} \underline{t}' \Sigma \underline{t}}$$

نمونه $\underline{X} \sim N(\underline{\mu}, \Sigma)$

در مباحث درسیل صفحه 44

معنی: اگر $\underline{X} \sim N(\underline{\mu}, \Sigma)$ عا از زیر مجموعه $\underline{X}$ دارای توزیع نرمالند

$$\underline{X}_{p \times 1} = \begin{bmatrix} \underline{X}_1 \\ \underline{X}_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} q \times 1 \\ (p-q) \times 1 \end{matrix} \Rightarrow \underline{\mu} = \begin{bmatrix} \underline{\mu}_1 \\ \underline{\mu}_2 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} q & p-q \\ p-q & \end{matrix}$$

$$\underline{X}_1 = \underbrace{[I \ 0]}_A \underline{X} + b$$

$$\underline{X}_1 \sim N(\underline{\mu}_1, \Sigma_{11})$$

مثال:

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & 9 \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{matrix} X_1 \sim N(1, 4) & X_2 \sim N(-3, 3) & X_3 \sim N(2, 9) \\ [1 \ 0 \ 0] \underline{X} & [0 \ 1 \ 0] \underline{X} & [0 \ 0 \ 1] \underline{X} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{X} \sim N\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}\right)$$

توزیع شرطی: تخصیص فرض کنید $\underline{X} = \begin{bmatrix} \underline{X}_1 \\ \underline{X}_2 \end{bmatrix}$ دارای توزیع $N_p(\underline{\mu}, \Sigma)$ باشد.

$$\underline{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \Sigma_{22} > 0 \quad \text{آن ماه توزیع شرطی } \underline{X}_1$$

با معلوم بودن $\underline{X}_2 = x_2$ نزاع است و می‌توانیم در مورد آن عبارت است از:

$$\mu_{1.2} = E(\underline{X}_1 | \underline{X}_2 = x_2) = \mu_1 + \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} (\underline{x}_2 - \mu_2)$$

$$\Sigma_{11.2} = V(\underline{X}_1 | \underline{X}_2 = x_2) = \Sigma_{11} - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21}$$

مثبت 4×6 سید و کتابخانه (جزء می‌باشد)

$$(\underline{X}_1 | \underline{X}_2 = x_2) \sim N\left(\mu_1 + \frac{\Sigma_{12}}{\Sigma_{22}} (\underline{x}_2 - \mu_2), \Sigma_{11} (1 - \rho_{12}^2)\right)$$

مختصرتوزیع: مثال ۴۸

توزیع کای دو مرتبه

می بینیم وقتی $X \sim N(0, I)$ آن $\sum_{i=1}^n x_i^2 \sim \chi_n^2$

$$X \sim N(0, I) \rightarrow U = \sum_{i=1}^n x_i^2 = X'X \sim \chi_n^2$$

$$f(u) = \frac{u^{\frac{1}{2}n-1} e^{-\frac{1}{2}u}}{2^{\frac{1}{2}n} \Gamma(\frac{1}{2}n)} \quad u > 0$$

$$M_u(t) = (1-2t)^{-\frac{1}{2}n}$$

$$E(U) = n \quad \text{var}(U) = 2n$$

توزیع:

توزیع ف-سیرل

u_1, u_2 مستقله $u_1 \sim \chi_{n_1}^2, u_2 \sim \chi_{n_2}^2 \Rightarrow \frac{u_1/n_1}{u_2/n_2} = v \sim F_{n_1, n_2}$

$$f(v) = \frac{\Gamma(n_1/2 + n_2/2) \Gamma(n_1/2) \Gamma(n_2/2) v^{n_1/2-1}}{\Gamma(n_1/2) \Gamma(n_2/2) (n_2 + n_1 v)^{n_1/2 + n_2/2}} \quad v > 0$$

$$E(v) = \frac{n_2}{n_2 - 2} \quad \text{var}(v) = \frac{2n_2^2 [1 + (n_2 - 2)/n_1]}{(n_2 - 2)^2 (n_2 - 4)}$$

$x \sim N(0, 1), u \sim \chi_n^2$ مستقله x, u

$$Z = \frac{x}{\sqrt{u/n}} \sim t_n$$

$$f(z) = \frac{\Gamma(n/2 + 1/2)}{\sqrt{n\pi} \cdot \Gamma(n/2)} \left(1 + \frac{z^2}{n}\right)^{-\frac{1}{2}(n+1)}$$

$-\infty < z < \infty$

$$E(Z) = 0 \quad \text{var}(Z) = \frac{n}{n-2}$$

Subject:

Year:

Month:

Date:

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \bigg/ \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{X})^2}{\sigma^2 / n - 1}}$$

$$\underline{\underline{x}}_{n \times 1} \sim N(\underline{\mu}, \sigma^2 I) \Rightarrow \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 / \sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$$

$$\begin{bmatrix} \mu \\ \sigma^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\frac{\bar{x} - \mu}{\frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{n-1}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}} \sim t_{n-1}$$

$$\text{if } z \sim t_n \rightarrow z^2 \sim F_{1,n} \quad z = \frac{x \sim N(0,1)}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \sim \chi^2_n}}$$

$$\underline{\underline{x}} \sim N(0, I_n) \Rightarrow \underline{\underline{x}}' \underline{\underline{x}} \sim \chi^2_n$$

$$u = \underline{\underline{x}}' \underline{\underline{x}} \sim \chi^2(n, \lambda)$$

توزیع غیر مرکزی

$$\underline{\underline{x}} \sim N(\underline{\mu}, I) \Rightarrow \underline{\underline{x}}' \underline{\underline{x}} \sim \chi^2_n$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \underline{\mu}' \underline{\mu}$$

$$\text{if } \underline{\mu} = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow$$

$$\chi^2(n, \lambda) = \chi^2_n$$

$$f(u) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \left[\frac{u^{\frac{n}{2}+k-1} e^{-u/2}}{2^{\frac{n}{2}+k} \Gamma(\frac{n}{2}+k)} \right]$$

$$\chi^2_{n/2+k} \rightarrow \chi^2_{n/2+k} \quad \text{m.g.f. } (1-2t)^{-n/2}$$

$$E(u) = n + 2\lambda$$

$$\text{var}(u) = 2n + 8\lambda$$

$$e^{-\lambda} \frac{\lambda(1-2t)^{-1}}{(1-2t)^{-n/2}} = e^{-\lambda} \frac{\lambda(1-2t)^{-1}}{(1-2t)^{-n/2}}$$

$$m_u(t) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} (1-2t)^{-n/2+k}$$

$$u_i \sim \chi^2(n_i, \lambda_i) \quad \text{and } u \sim \chi^2(n, \lambda)$$

$$\sum_{i=1}^l u_i \sim \chi^2\left(\sum_{i=1}^l n_i, \sum_{i=1}^l \lambda_i\right) \quad l=1, 2, \dots$$

$$e^{-\lambda} e^{(1-2t)^{-1}} (1-2t)^{-n/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} (1-2t)^{-k} = e^{-\lambda} e^{\lambda(1-2t)^{-1}} (1-2t)^{-n/2}$$

$$= (1-2t)^{-n/2} e^{-\lambda[1-(1-2t)^{-1}]}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda(1-2t)^{-1}}{k!}$$

۷۱

Subject:

Year:

Month:

Date:

$$u_1 \sim \chi^2_{n_1}$$

$$u_2 \sim \chi^2_{n_2}$$

$$f(v) = \frac{\Gamma(\frac{n_1}{2} + \frac{n_2}{2}) n_1^{\frac{n_1}{2}} n_2^{\frac{n_2}{2}} v^{\frac{n_1}{2} + \frac{n_2}{2} - 1}}{\Gamma(\frac{n_1}{2}) \Gamma(\frac{n_2}{2}) (n_1 + n_2)^{\frac{n_1}{2} + \frac{n_2}{2}}}$$

$$E(v) = \frac{n_2}{n_2 - 2}$$

$$v(v) = \frac{2n_2^2 [1 + (n_2 - 2)/n_1]}{(n_2 - 2)^2 (n_2 - 4)}$$

$$\text{if } u_1 \sim \chi^2_{n_1}(\lambda_1)$$

$$u_2 \sim \chi^2_{n_2} \Rightarrow v = \frac{u_1/n_1}{u_2/n_2} \sim F'(n_1, n_2, \lambda)$$

توزیع غیر مرکزی فیر با پارامتر آزادی n_2, n_1 و پارامتر مرکزی λ

$$f(v) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \cdot \frac{n_1^{\frac{n_1}{2} + k} n_2^{\frac{n_2}{2}} \Gamma(\frac{n_1}{2} + \frac{n_2}{2} + k)}{\Gamma(\frac{n_1}{2} + k) \Gamma(\frac{n_2}{2})}$$

$$\cdot \frac{v^{n_1/2 + k - 1}}{(n_2 + n_1 v)^{n_1/2 + n_2/2 + k}}$$

$$\text{if } \lambda = 0 \Rightarrow \text{فیر مرکزی } F$$

$$E(v) = \frac{n_2}{n_2 - 2} (1 + \frac{2\lambda}{n_1})$$

$$\text{var}(v) = \frac{2n_2^2}{n_1^2 (n_2 - 2)} \left[\frac{(n_1 + 2\lambda)^2}{(n_2 - 2)(n_2 - 4)} + \frac{n_1 + 4\lambda}{n_2 - 4} \right]$$

نکته: اگر علاوه بر u_1 و u_2 نیز داده غیر مرکزی باشد آن گاه دارای توزیع فیر غیر مرکزی گویانی باشد.

$$u_1 \sim \chi^2_{n_1}(\lambda_1)$$

$$u_2 \sim \chi^2_{n_2}(\lambda_2)$$

$$\Rightarrow v = \frac{u_1/n_1}{u_2/n_2} \sim F''(n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2)$$

صفحه ۵۳ میل

توزیع فیر مرکزی

هدف بدست آوردن توزیع $X^T A X$ وقتی $X \sim N(\mu, \Sigma)$

تکین از X است و می‌توانیم به صورت زیر آن را مشخص است، متعلق به خانواده توزیع های نغیر مرکزی باشد.

قضیه (۱) (اصول): وقتی $X \sim N(\mu, \Sigma)$ از A متعلق

$$X'AX \sim \chi^2_r(r(A), \frac{1}{2}\mu'A\mu) \iff A\Sigma \text{ خود توان (Idempotent)}$$

$$X'AX \sim \chi^2_r(r(A)) \text{ if } \mu=0$$

$$r(A\Sigma) = r(A)$$

مناسب با ترین ماتریس نامعکوس روی رتبه دار

رابطه: سیرل (۱۴۷) و غیره

نمونه: نشان دهید اگر $X \sim N(\mu, \Sigma)$ آن $\mu=0$ (۱۵۸-۱۵۹)

$$E(X'AX) = \text{tr}(A\Sigma) + \mu'A\mu$$

$$\text{var}(X'AX) = 2\text{tr}(A\Sigma)^2 + 4\mu'A\Sigma A\mu$$

$$\text{cov}(X, X'AX) = 2\Sigma A\mu$$

$$M_{X'AX}(t) = |I - 2tA\Sigma|^{-1/2} e^{-\mu'[I - (I - 2tA\Sigma)^{-1}]\Sigma^{-1}\mu/2}$$

$$X \sim SN(\mu, \Sigma) \text{ if } |\Sigma| = 0$$

Singular

$$X \sim N(\mu, \Sigma) \text{ if } |\Sigma| \neq 0$$

حالت نغیر از قضیه ۱:

$$(1) \text{ if } X \sim (0, I) \Rightarrow X'AX \sim \chi^2_r \iff A \text{ خود توان و رتبه } r \text{ (idempotent)}$$

$$(2) \text{ if } X \sim N(0, \Sigma) \Rightarrow X'AX \sim \chi^2_r \iff A\Sigma \text{ خود توان از رتبه } r$$

$$(3) \text{ if } X \sim N(\mu, \sigma^2 I) \Rightarrow \frac{X'X}{\sigma^2} \sim \chi^2_r(n, \frac{1}{2}\mu'\mu/\sigma^2)$$

(W)

هر ماتریس متجان A به رتبه r را می توان به صورت LL' نوشت که در آن L و $r(L)=r$ (رتبه r متجان)

Subject:

Year:

Month:

Date:

$$PAP' = \begin{bmatrix} P_r^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P' \xrightarrow{P=P^{-1}} A = P' \begin{bmatrix} P_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P = LL'$$

$L = P_r \quad n \times r \quad r \times n \Rightarrow L' n \times n$

۴) if $X \sim N(\mu, I) \Rightarrow X'AX \sim \chi^2(r, \frac{1}{2}\mu'A\mu) \Leftrightarrow A$ خود توان به رتبه r

استقلال: قضیه ۱: وقتی $X \sim N(\mu, \Sigma)$ آن گاه $X'AX$ و BX مستقلند

مستقلند: فرض کنید $B\Sigma A = 0$ اگر و تنها اگر $B\Sigma A = 0$ (دلیل: سیل ۵۹، ریچر ۱۱۹)
 $B\Sigma A = 0 \Rightarrow B\Sigma L = 0$ (چون $A = LL'$ و $B\Sigma A = 0 \Rightarrow B\Sigma LL' = 0 \Rightarrow B\Sigma L = 0$)
 $\text{Cov}(BX, X'AX) = B\Sigma L = 0$
قضیه ۲: وقتی $X \sim N(\mu, \Sigma)$ آن گاه $X'AX$ و $X'BX$ مستقلند اگر و تنها اگر $B\Sigma A = 0$ (چون $X'AX = X'AX$ و $X'BX = X'BX$ مستقلند)

مستقلند:

$$A\Sigma B = 0 \quad \text{یا} \quad B\Sigma A = 0$$

$$X'AX \text{ و } BX \Rightarrow \text{Cov}(BX, X'AX) = 0 = 2B\Sigma A\mu = 0 \Rightarrow B\Sigma A = 0 \quad (\text{ریچر ۱۲۰، سیل ۵۹})$$

$$E(BX - B\mu)(X'AX - \mu'A\mu - \text{tr}(A\Sigma)) = BE[(X - \mu)(X - \mu)'A(X - \mu) + 2(X - \mu)'A\mu - \text{tr}(A\Sigma)]$$

نتیجه: اگر $X \sim N(\mu, \sigma^2 I)$ آن گاه $X'AX$ و $X'BX$ مستقلند

$$B[E(X - \mu)(X - \mu)'A(X - \mu) + 2E(X - \mu)(X - \mu)'A\mu - \text{tr}(A\Sigma)] = 0 \quad (BA = 0) \quad AB = 0$$

اگر و تنها اگر

قضیه ۳: فرض کنید $X \sim N_p(\mu, \Sigma)$ و A_i متجان به رتبه r_i و

$$A = \sum_{i=1}^k A_i \quad \text{یعنی} \quad X'AX = \sum_{i=1}^k X'A_iX \quad A_i p \times p$$

سپ $X'A_iX \sim \chi^2(r_i, \frac{1}{2}\mu'A_i\mu)$ و $X'A_jX$ و $X'A_iX$ مستقلند $\forall i \neq j$

و اگر $X'AX \sim \chi^2(r, \frac{1}{2}\mu'A\mu)$ اگر و تنها اگر دو مورد از سه مورد زیر برقرار باشد.

① برای $\forall i$ ، $A_i \Sigma$ خود توان باشد

② برای $j < i$ ، $A_i \Sigma A_j = 0$

③ $A \Sigma$ خود توان باشد

PAPCO $\text{Cov}(BX, X'L) =$

$$E(BX - B\mu)(X'L - \mu'L) = BE(X - \mu)(X - \mu)'L = B\Sigma L$$

۱۸۹ P+P P+P

یا آرتو متراکس ① $A \Sigma A'$ غورتوان باشد. ② $r = \sum_{i=1}^k r_i$

یا آرتو متراکس ① $A \Sigma A'$ غورتوان باشد و ② $A_1 \Sigma_1, \dots, A_{(k-1)} \Sigma_{(k-1)}$ غورتوان باشند

$A_k \Sigma_k$ غیر معین مثبت باشد. (رسید ۹۱) (اثبات لازم نیست)

نتیجه (تفسیر گوران) وقتی $X \sim N_p(\mu, I_p)$ و A_i متغیران وابسته r_i به طوری،

$$\sum_{i=1}^k A_i = I_p \quad \text{مستقل و دارای توزیع } \chi^2_{r_i}$$

$$\sum_{i=1}^k r_i = p \quad \text{هستند آرتو متراکس}$$

توزیع نرمال دیریه (رسید ۶۶)

فرض کنید $X \sim N(\mu, \Sigma)$ به طوری که Σ یک ماتریس دیریه است. اکنون فرض بر این

برده است، Σ یک ماتریس نادره است. اکنون فرض کنید بردار تصادفی X دارای توزیع $N(\mu, \Sigma)$ است اما Σ یک ماتریس دیریه است در این صورت می گوییم X دارای توزیع نرمال دیریه است.

$$X \sim SN(\mu, \Sigma)$$

↓
Singular normal

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}_{2 \times 1} \sim N \left(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \right)$$

$$(X_1, X_2, X_1 - X_2)' \sim N \left(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_1 - \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_1^2 - \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \sigma_{12} - \sigma_2^2 \\ \sigma_1^2 - \sigma_{12} & \sigma_{12} - \sigma_2^2 & \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12} \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_1 - X_2 \end{pmatrix}_{3 \times 1}$$

$$|\Sigma| = 0$$

سپرجول Σ^{-1} در مختصات وجود ندارد پس خطای نرل چند متغیره قابل استفاده نیست برای

توزیع چند متغیره نرل و نره می توان از آن زیاد که تابع صفحه آن به صورت

$$\phi(t) = e^{it'\mu - \frac{1}{2}t'\Sigma t}$$

می باشد (نرل و نره) و لذا آمار کراس ۱۹۵۱ و اندرسن ۱۹۵۸ برای ادعای کشت تابع خطی وجود دارد حتی اگر قابل نوشتن نباشد. برای اطمینان بیشتر در خصوص نرل و نره به اندرسن ۱۹۵۸، ص ۲۵ مراجعه شود.

An Introduction to multivariate statistical Analysis, wiley

فرض کنید $X \sim N(\mu, I)$ پس متغیر $Y = \mu + LX$ دارای توزیع

نرل و نره به صورت $SN(\mu, L'L)$ است وقتی $L'L$ رتبه کامل نباشد.

خواص توزیع نرل و نره: ص ۶۱-۶۷ جدول

تصنیه ۱: فرض کنید $X \sim SN(\mu, \Sigma)$ آن گاه

$$E(X'AX) = \text{tr}(A\Sigma) + \mu'A\mu$$

$$\text{Cov}(X, X'AX) = 2\Sigma A\mu$$

که دیدیم برای $X \sim N(\mu, \Sigma)$ نیز برقرارند.

تصنیه ۲: فرض کنید $X \sim SN(\mu, \Sigma)$ آن گاه

$$X'AX + m'X + d \sim \chi^2(\text{tr}(A\Sigma), (A\mu + \frac{1}{2}m)'\Sigma(A\mu + \frac{1}{2}m))$$

$$i) \Sigma A \Sigma A \Sigma = \Sigma A \Sigma$$

$$ii) (A\mu + \frac{1}{2}m)'\Sigma = (A\mu + \frac{1}{2}m)'\Sigma A \Sigma$$

$$iii) \mu'A\mu + m'\mu + d = (A\mu + \frac{1}{2}m)'\Sigma(A\mu + \frac{1}{2}m)$$

سپریچول Σ^{-1} در لایحات وجود دارد پس معادلی نرمل چند متغیره قابل استفاده نیست برای

توزیع چند متغیره نرمل دایره می توان نوشت / داده تابع لگت آن به صورت

$$\phi(t) = e^{it'\mu - \frac{1}{2}t'\Sigma t}$$

می باشد (ت به نرمل دایره) و لذا آفون کراسر ۱۹۵۱ و اندرسن ۱۹۵۸ ادعای کتت تابع معادلی وجود دارد حتی اگر قابل نوشتن نباشد. برای اطمینان بیشتر در خصوص نرمل دایره به اندرسن ۱۹۵۸، ص ۲۵ مراجعه شود.

An Introduction to Multivariate Statistical Analysis, Wiley

فرض کنید $X \sim N(0, I)$ پس متغیر $Y = \mu + LX$ دارای توزیع

نرمل دایره به صورت $SN(\mu, L)$ است وقتی L رتبه کامل نباشد.

خواص توزیع نرمل دایره: ص ۷۱-۷۶ سید

مقصد ۱: فرض کنید $X \sim SN(\mu, \Sigma)$ آن گاه

$$E(X'AX) = \text{tr}(A\Sigma) + \mu' A \mu$$

$$\text{Cov}(X, X'AX) = 2\Sigma A \mu$$

که داریم برای $X \sim N(\mu, \Sigma)$ نیز برقرارند.

مقصد ۲: فرض کنید $X \sim SN(\mu, \Sigma)$ آن گاه

$$X'AX + m'X + d \sim \chi^2(\text{tr}(A\Sigma), (A\mu + \frac{1}{2}m)' \Sigma (A\mu + \frac{1}{2}m))$$

$$i) \Sigma A \Sigma A \Sigma = \Sigma A \Sigma$$

آرد تنها اگر

$$ii) (A\mu + \frac{1}{2}m)' \Sigma = (A\mu + \frac{1}{2}m)' \Sigma A \Sigma$$

$$iii) \mu' A \mu + m' \mu + d = (A\mu + \frac{1}{2}m)' \Sigma (A\mu + \frac{1}{2}m)$$

Generalized inverse for matrices and its applications in mathematical statistics.

$$\tilde{X}' A \tilde{X} \sim \chi^2'(\text{tr}(A\Sigma), \frac{1}{2} \mu' A \mu)$$

آر و سہا لری

$$\text{iii) } \underline{\mu}' A \underline{\mu} = \underline{\mu}' A \Sigma A \underline{\mu}$$

$$\tilde{X}' A \tilde{X} \sim \chi^2_{\text{tr}(A \Sigma)}$$

الترتيب $\Sigma A \Sigma = \Sigma A \Sigma$ الترتيب Σ ناتج Σ فقط Σ

$\chi'^A \chi \sim \chi^2(r, \frac{1}{2} \mu'^A \mu)$ خود توان، به کافیه.

(نکته: وقتی A خودتوال است $\text{tr}(A) = r(A)$ پس $\text{tr}(A\Sigma) = r(A\Sigma)$ و چون Σ قطری است $r(\Sigma) = r(A\Sigma)$ پس $r(A) = r(A\Sigma)$)

۳۰- فرض: $X \sim SN(\mu, \Sigma)$ و $X'AX$ و BX متغیر

$$B \sum A \mu = 0$$

$$, B \Sigma A \Sigma = 0$$

نور، $B \Sigma A = 0$

$$B \Sigma A = 0$$

وہاں :۔

or $B \Sigma A = 0$

1) $r = \sum_{i=1}^n r_i$ ~~نمونه برداری دو تار a, b, c و a, d به هم بافتن~~
~~به صورت $a \leftrightarrow c$ و a, b, c دو تار به هم بافتن~~ ~~دومی رابطه می دهد~~

Subject:

Year:

Month:

Date: ()

انواع متغیر در مدل آماری:

$y \Rightarrow$ { response variable
dependent variable
outcome variable
predicted variable

متغیر ثابت یا ثابت: $X = (x_1, \dots, x_p)$ متغیر تصحیحی (متغیر)

معنی ثابت یعنی متغیر "شد"

{ explanatory variable
Independent variable
predictor variable

درجه اول متغیر y و x چگونه باشند و چه مقیاسی داشته باشند مدل آماری مختلف به وجود آمده اند. رگرسیون، آنالیز واریانس، آنالیز کواریانس، ...

رگرسیون خطی ساده:

همان طور که می دانید در رگرسیون خطی ساده هدف بررسی ارتباط بین یک متغیر مستقل و متغیر وابسته ای می باشد که مدل رگرسیونی به صورت

$$E(y | x = x) = \beta_0 + \beta_1 x$$

در تعریف می شود به چوکی، فرض می شود $var(y | x = x) = \sigma^2$ و در تعریف به چوکی مدل رگرسیونی خطی ساده برای n مشاهده به صورت

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i \quad i = 1, \dots, n$$

در تعریف می شود آن گاه فرض می شود $\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ (ساده چون متغیر x

(۴۰)

Subject:

Year: Month: Date: ()

وجود دارد و خطی بر حسب B_0 و B_1 خطی است. در رگرسیون خطی ساده فرض
بر این است که y_i و x_i متغیر تصادفی و مقادیر x_i ثابتی هستند. فرضیات اساسی
رگرسیون خطی ساده:

$$(1) \quad E(\varepsilon_i) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$$E(y_i | x_i = x_i) = B_0 + B_1 x_i$$

$$(2) \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$$\text{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$$

$$\text{Var}(y_i | x_i = x_i) = \sigma^2$$

$$(3) \quad \text{برای } i = 1, \dots, n$$

$$\text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \quad (\text{خطای نامرتب است})$$

$$\text{Cov}(y_i, y_j) = 0$$

انواع روشهای برآورد پارامتر (B_0, B_1, σ^2)

یکی از روشهای برآورد روش حداقل مربعات معمولی (ordinary least squares) ols است که از دلائل استفاده از این روش این است که نیاز به فرضی در مورد توزیع ندارد اگر چه معمولاً فرض بر این است که خطای رگرسیونی خطی ساده است و می توان برآورد مناسبی را برآورد کنیم.

در روش حداقل مربعات یا کمترین مربعات برآورد B_0 و B_1 را طوری بدست می آوریم که مجموع مربعات خطا $y_i - \hat{y}_i$ بر n حد صفر شود

$$\varepsilon_i = y_i - \hat{y}_i \rightarrow E(y_i | x_i) \quad \text{بین کننده واقعی}$$

مینیمم شد که خطای کم اتفاق می افتد و به روش استقار داریم $\rightarrow \varepsilon_i$ به عبارت

Subject:

Year:

Month:

Date:

()

گیر β_0 و β_1 را طوری بیابیم، $\rightarrow \epsilon_i$ می‌کند و علامت‌گذاری $\rightarrow \epsilon_i$ $\rightarrow \sum \epsilon_i$

که این هم خطای جانب مثبت حول خط است یعنی از ϵ_i خطی بزرگ می‌خورد
که خطی باشد و همین ترتیب خطا طوری باشد که هم‌ترازی داشته باشد، یعنی شود

$\rightarrow \sum \epsilon_i$ می‌کند پس بهترین کار این است که توقع داشته باشیم $\rightarrow \sum \epsilon_i^2$

وقتی $\sum \epsilon_i^2$ کمتری $\rightarrow \epsilon_i$ و هیچ وقت ϵ_i^2 منفی نیست. بهترین ابردار این

روشن این است که نسبت به داده‌ها در دو اندازه باریک حساس است. در بعضی موارد

استفاده از $\sum |\epsilon_i|$ پیشنهاد می‌شود، چون کار کردن با آن در محاسبات مشکل است

معمول نیست ولی حساس (فزیل آن) این است که نسبت به تغییر داده‌ها در دو اندازه
به اندازه $\sum \epsilon_i^2$ نیست.

برای صمیم کردن نسبت به باریک‌تر $\sum \epsilon_i^2$ مشتق می‌گیریم:

$$\sum_{i=1}^n \hat{\epsilon}_i^2 = \sum_{i=1}^n (\gamma_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i)^2$$

$$\frac{\partial \sum \hat{\epsilon}_i^2}{\partial \hat{\beta}_0} = -2 \sum_{i=1}^n (\gamma_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i) = 0$$

$$\frac{\partial \sum \hat{\epsilon}_i^2}{\partial \hat{\beta}_1} = -2 \sum_{i=1}^n x_i (\gamma_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{\beta}_1 = \frac{\sum x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum x_i^2 - n \bar{x}^2} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} \\ \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} = \frac{\sum x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum x_i^2 - n \bar{x}^2} \end{cases}$$

مثال 129

۲۸

Subject:

Year:

Month:

Date:

()

$$E(y_i) = E(y_i | x_i = x_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i$$

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i \rightarrow \hat{y}_i \xrightarrow{E(y_i)} E(y_i)$$

حتی به فرض آن بررسی می توان کرد که $\hat{\beta}_0$ و $\hat{\beta}_1$ برآوردگرهای بی طرفی و دارای کمترین

$$E(\hat{\beta}_0) = \beta_0$$

$$E(\hat{\beta}_1) = \beta_1$$

$$\text{var}(\hat{\beta}_0) = \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right]$$

$$\text{var}(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sigma^2}{S_{xx}}$$

همین باب تعریف $\sigma^2 = E(y_i - E(y_i))^2$ و با استفاده از $\hat{y}_i$ به عنوان برآوردگر $E(y_i)$

$$S^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$$

برآورد σ^2 معمولاً $E(\hat{\epsilon}_i)^2$

$$= \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i)^2}{n-2} = \frac{SSE}{n-2}$$

خواهد شد. معمولاً به SSE مجموع مربعات خطای نویسنده S^2 یک برآوردگر بی طرفی

برای σ^2 است.

آزمون فرض و نواصل آمینا

$$\begin{cases} H_0: \beta_1 = 0 \\ H_1: \beta_1 \neq 0 \end{cases}$$

بررسی فرض بی طرفی

$$\begin{cases} H_0: \beta_0 = 0 \\ H_1: \beta_0 \neq 0 \end{cases}$$

بررسی فرض یک طرفه

دو فرض

است.

برای بررسی دو فرض فوق ابتدا فرض می کنیم $\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ و

$$\hat{\beta}_0 \sim N(\beta_0, \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}} \right))$$

$$\hat{\beta}_1 \sim N(\beta_1, \frac{\sigma^2}{S_{xx}})$$

Subject:

Year:

Month:

Date:

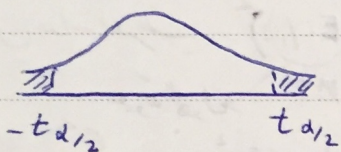
()

ولذا می توان نوشت:

$$\frac{(n-2)S^2}{6^2} = \frac{SSE}{6^2} \sim \chi^2_{n-2}$$

بر فرض σ^2 مجهول و استقلال $\hat{\beta}_1$ و σ^2 :

$$\frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\frac{S}{\sqrt{S_{xx}}}} \sim t_{n-2}$$



وکت H_0 فرض

$$T_0 = \frac{\hat{\beta}_1}{\frac{S}{\sqrt{S_{xx}}}}$$

$\begin{cases} H_0: \beta_1 = 0 \\ H_1: \beta_1 \neq 0 \end{cases}$

if $|T_0| > t_{n-2, \alpha/2} \Rightarrow R H_0$

$$T_0 = \frac{\hat{\beta}_0}{S \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}}}$$

در این آزمون فرض

$$\begin{cases} H_0: \beta_0 = 0 \\ H_1: \beta_0 \neq 0 \end{cases}$$

if $|T_0| > t_{n-2, \alpha/2} \Rightarrow R H_0$

در همین ترتیب به استفاده از توزیع t فواصل اطمینان برای β_0 و β_1 :

$$\beta_0: \left(\hat{\beta}_0 \pm t_{n-2, \alpha/2} S \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}} \right)$$

$$\beta_1: \left(\hat{\beta}_1 \pm t_{n-2, \alpha/2} \frac{S}{\sqrt{S_{xx}}} \right)$$

ضریب تعیین

می دانیم ضریب تعیین همبستگی بین دو متغیر X و Y به صورت

$$\rho(x, y) = \frac{\text{Cor}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X) \text{Var}(Y)}}$$

ی دانیم ضریب همبستگی بین دو متغیر X و Y معلوم است

تقریبی شود و ضریب همبستگی نمونه :

$$\hat{\rho} = r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx} S_{yy}}} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (y_i - \bar{y})^2}}$$

ضریب بختی R^2 محسوب می شود با R^2 می دهند برابر است با : ~~و به صورت زیر تعریف می شود :~~

$$r^2 = \frac{SSR}{SST} = \frac{\sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2} \rightarrow \frac{SSR}{SST} = \frac{\hat{\beta}_1 S_{xy}}{SST}$$

$$SST = SSR + SSE$$

و در محاسبه این مقدار (r^2) برابر است با مجذور ضریب همبستگی نمونه بین X و Y پس دلیل

ضریب بختی را با r^2 می دهند

$$\begin{cases} H_0: \rho = 0 \\ H_1: \rho \neq 0 \end{cases}$$

نکته : برای آزمون فرضیه موجود / ضریب همبستگی

$$t_0 = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}, \text{ if } |t_0| > t_{n-2, \alpha/2} \Rightarrow R.H.$$

استفاده می شود می توان

داریم فرض H_0 :

$$t = \frac{\hat{\beta}_1}{\frac{s}{\sqrt{S_{xx}}}} = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

Subject:

Year:

Month:

Date:

()

تاریخ: ۱۳۹۰/۰۷/۲۵

: مل

exam score homework score

y	x
95	96
80	77
...	...
66	67

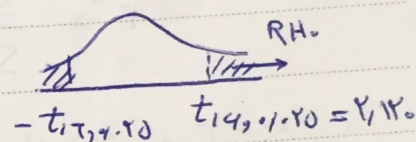
$$\hat{B}_1 = \frac{\sum x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum x_i^2 - n \bar{x}^2} = 0.8726$$

$$\hat{B}_0 = \bar{y} - \hat{B}_1 \bar{x} = 10.73$$

$$\hat{y} = 10.73 + 0.8726 x$$

$$\begin{cases} H_0: B_1 = 0 \\ H_1: B_1 \neq 0 \end{cases}$$

$$T_0 = \frac{\hat{B}_1}{S_1 \sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2}} = 8.8025 > t_{11, \alpha/2} \Rightarrow RH_0$$



فاصله اطمینان

$$\hat{B}_1 \pm t_{n-2, \alpha/2} \frac{S}{\sqrt{S_{xx}}}$$

$$= (0.1772, 1.1828)$$

$$SSR = \hat{B}_1 S_{xy}$$

$$r^2 = \frac{0.8726 \times S_{xy}}{\sum (y_i - \bar{y})^2} = 0.8288$$

$$\Rightarrow r = 0.910$$

منبع	SS	df	MS
در مجموع	SSR	1	MSR
خطا	SSE	n-2	MSE
کل	SST	n-1	

$$F_0 = \frac{MSR}{MSE} > F_{1, n-2, \alpha}$$

 $\Rightarrow RH_0$

$$\begin{cases} H_0: B_1 = 0 \\ H_1: B_1 \neq 0 \end{cases}$$