

۱- اگر A یک ماتریس مربع باشد آن گاه دستگاه معادلات $Ax = 0$ فقط دارای جواب $x = 0$ است اگر و تنها اگر A هم‌ارز سطری ماتریس واحد I باشد. (۱ نمره)

۲- اگر ماتریس A مربع و B وارون چپ آن باشد آن گاه A وارون پذیر است و $A^{-1} = B$. (۱ نمره)

۳- دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = -1 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

الف) ابتدا دستگاه را با روش گاوس و سپس با روش گاوس جردن حل کنید. (۱ نمره)

ب) وارون ماتریس ضرایب دستگاه فوق را از روش عمل به مثل بدست آورید. (۵/۰ نمره)

ج) ماتریس ضرایب دستگاه فوق را به صورت حاصلضرب ماتریس‌های مقدماتی بنویسید. (۱ نمره)

۴- اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ نشان دهید A نامنفرد است اگر و تنها اگر $ad - bc \neq 0$ و $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$. (۱ نمره)

۵- فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 7 \\ -2 & 5 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 7 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$

الف) مطلوبست $tr(AB)$ (۵/۰ نمره)

ب) پس از افراز سطری ماتریس A ، مطلوبست AB (۵/۰ نمره)

ج) پس از افراز ستونی ماتریس B ، مطلوبست AB (۵/۰ نمره)

۶- ماتریس $X = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{n1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nm} \end{bmatrix}$ و $x_{..} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{ij}$ و $\bar{x}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ij}, j = 1, \dots, n$ به طوری که $\bar{x}' = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ است.

الف) نشان دهید $J_n X J_n = x_{..}$ (J_n ماتریسی $n \times n$ است که تمام درایه‌های آن یک است) (۵/۰ نمره)

ب) با افراز ستونی ماتریس X نشان دهید $\bar{x}' = \frac{1}{n} 1'_n X$ (۵/۰ نمره)