(میان ترم)

۱- فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f_X(x) = \begin{cases} k e^{-2x}(1-e^{-2x}) & x>0 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

- مقدار k را تعیین کنید - تابع توزیع X را بدست آورید و $P(X>1)$ را از روی تابع توزیع محاسبه کنید

$$\int_0^\infty k e^{-2x}(1-e^{-2x})\,dx = 1 \Rightarrow$$

$$k\int_0^\infty (e^{-2x} - e^{-4x})\,dx = 1 \qquad \int e^{-ax}dx = -\tfrac{1}{a}e^{-ax}$$

$$k\left[-\frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{1}{4}e^{-4x}\right]_0^\infty = k(1/2 - 1/4) = k(1/4) = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{k=4}$$

$$F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du = \int_{-\infty}^{x} 4e^{-2x}(1-e^{-2x})\,dx$$

$$= 4\left[-1/2\, e^{-2x} + 1/4\, e^{-4x}\right]_0^x$$

$$= 4\left[-1/2\, e^{-2x} + \frac{1}{4}e^{-4x} + \frac{1}{2} - 1/4\right]$$

$$= 1 - e^{-2x}(2 - e^{-2x})$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ 1-e^{-2x}(2-e^{-2x}) & x\ge 0 \end{cases}$$

$$P(X>1) = 1 - P(X\le 1) = 1 - F_X(1) = e^{-2}(2-e^{-2})$$

$$= 0/252$$

Subject:
Date

۲ـ اگر X دارای توزیع

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ 1-(1+x)e^{-x} & x\geq 0 \end{cases}$$

$f_X(x) = ?$ $\qquad\qquad P(X>3) = ?$

$$f_X(x) = F'(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x} = -e^{-x} + e^{-x}(1+x) = xe^{-x}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} xe^{-x} & x>0 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

$$P(X>3) = \int_3^\infty x e^{-x} dx = ?$$

$$e^{-x} dx = dv \rightarrow v = -e^{-x}$$

$$x = u \Rightarrow dx = du$$

$$-xe^{-x}\Big|_3^\infty + \underbrace{\int e^{-x} dx}_{-e^{-x}|_3^\infty}$$

$$= +3e^{-3} + e^{-3} = 4e^{-3}$$

یا $\quad P(X>3) = 1 - P(X<3) = 1 - F_X(3)$

$$1 - 1 + (1+3)e^{-3} = 4e^{-3}$$

۳ـ فرض کنید X دارای چگالی زیر باشد مطلوبست محاسبه $P(1/2 < X < 3/2)$ از روی تابع توزیع

$$f_X(x) = \begin{cases} x & 0<x<1 \\ 2-x & 1\leq x<2 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

$$F_X(x)=P(X\le x)=\int_0^x x\,dx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^x=x^2/2$$

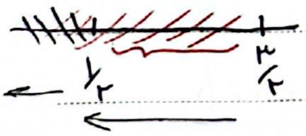
$$F_X(x)=P(X\le x)=\int_0^1 x\,dx+\int_1^x (2-x)\,dx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1+2x-x^2/2\Big|_1^x$$

$$=\frac{1}{2}+2x-x^2/2-2+1/2=2x-x^2/2-1$$

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x^2/2 & 0\le x<1\\ 2x-x^2/2-1 & 1\le x<2\\ 1 & 2\le x\end{cases}$$

$$P\left(\frac{1}{2}<X<\frac{3}{2}\right)=P(X\le 3/2)-P(X\le 1/2)=$$

$$F_X(3/2)-F_X(1/2)=\left[2(3/2)-1/2(3/2)^2-1\right]$$



$$-\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]=3/4$$

۳- فرض کنید $f_X(x)=c\left(\frac{1}{x}\right)^{\theta+1}$ ، $x>1$ و $\theta>1$ ، مطلوبست $E(X)$

$$\int_1^\infty c\,(1/x)^{\theta+1}dx=c\left[-\frac{1}{\theta x^\theta}\right]_1^\infty=\frac{c}{\theta}=1$$

$$x^n\to\frac{x^{n+1}}{n+1}\qquad x^{-\theta-1}\to\frac{x^{-\theta}}{-\theta}\to\frac{-1}{\theta x^\theta}$$

$$\Rightarrow c=\theta$$

$$x^{-n}\to\frac{x^{-n+1}}{-n+1}$$

$$E(X)=\int_1^\infty x\cdot\theta\left(\frac{1}{x}\right)^{\theta+1}dx \qquad \left(\frac{1}{x}\right)^\theta(1/x)$$

$$=\theta\int_1^\infty x^{-\theta}\,dx=\theta\,\frac{x^{-\theta+1}}{-\theta+1}$$

$$=\frac{\theta}{-\theta+1}\left[\frac{1}{x}\right]^\theta\cdot x\Big|_1^\infty=-\frac{\theta}{-\theta+1}=\frac{\theta}{\theta-1}$$

Subject:
Date

۵-

$$f(x)=\begin{cases} c(x+1) & -1<x\leq ۳ \\ ۴c & ۳<x\leq ۴ \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$F_X(x)=?$ $\quad c=?$

$V(۲x-1)=?$

$$\int_{-1}^{۳} c(x+1)\,dx+\int_{۳}^{۴} ۴c\,dx=1$$

$$\Rightarrow c\frac{x^۲}{۲}+cx\Big|_{-1}^{۳}+۴cx\Big|_{۳}^{۴}=1 \rightarrow \frac{۹}{۲}c+۳c-\frac{c}{۲}+c=1$$

$$\Longrightarrow \frac{۹c+۶c-c+۲c}{۲}=1 \rightarrow \frac{۱۶}{۲}c=1$$

$$\Rightarrow c=\frac{1}{۸}$$

$$F_X(x)=\int_{-1}^{x}\frac{1}{۸}(x+1)\,dx=$$

$$\frac{1}{۸}\frac{x^۲}{۲}+\frac{x}{۸}\Big|_{-1}^{x}=\frac{x^۲}{۱۶}+\frac{x}{۸}-\frac{1}{۱۶}+\frac{1}{۸}$$

$$=\frac{x^۲}{۱۶}+\frac{x}{۸}+\frac{1}{۱۶}$$

$$F_X(x)=\int_{-1}^{۳}\frac{1}{۸}(x+1)\,dx+\int_{۳}^{x}\frac{۴}{۸}\,dx=\frac{1}{۸}\left(\frac{x^۲}{۲}+x\right)\Big|_{-1}^{۳}$$

$$+\frac{۴}{۸}x\Big|_{۳}^{x}=\overset{۹/۱۶}{\cancel{\frac{1}{۸}\left(\frac{۹}{۲}\right)}}+\frac{۳}{۸}-\overset{1/۱۶}{\cancel{\frac{1}{۸}\left(\frac{1}{۲}\right)}}-(-1)$$

$$+\frac{۴}{۸}x-\frac{۱۲}{۸}=\frac{۶}{۱۶}+\frac{۴}{۸}x=\frac{۳}{۸}+\frac{1}{۲}x$$

$$F_X(x)=\begin{cases} 0 & x<-1 \\ \frac{x^۲}{۱۶}+\frac{x}{۸}+\frac{1}{۱۶} & -1\leq x<۳ \\ \frac{1}{۲}x+\frac{۳}{۸} & ۳\leq x<۴ \\ 1 & ۴\leq x \end{cases}$$

$V(۲x-1)=۴V(x)=?$ $\quad EX=\int_{-1}^{۳}\frac{1}{۸}x(x+1)\,dx+\int_{۳}^{۴}x\left(\frac{۴}{۸}\right)dx$

$$E(x^۲)=\int_{-1}^{۳}\frac{1}{۸}x^۲(x+1)\,dx+\int_{۳}^{۴}x^۲\left(\frac{۴}{۸}\right)dx$$

دو تاس را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا جفت شش مشاهده شود

الف) احتمال اینکه بیش از دو پرتاب لازم باشد

ب) احتمال اینکه پرتاب‌های لازم مضربی از ۳ باشد

جفت شش p

$\frac{35}{36}$ $\frac{1}{36}$

هندسی $pq^{x-1} = P(X=x) \to P(X>2) = 1-P(X\le 2)$

$= 1 - P(X=1) - P(X=2) = 1-(\frac{1}{36}) - (\frac{1}{36})(\frac{35}{36})$

$P(X=3x-1)=\sum_{x=1}^{\infty} pq^{3x-1} = \frac{pq^2}{1-q^3} = \frac{\frac{1}{36}(\frac{35}{36})^2}{1-(\frac{35}{36})^3}$

$pq^2 + pq^5 + pq^8 + pq^{11} + \dots$

تابع احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر است مطلوبست $c=?$ ، $F_X(x)=?$

$P(\frac12 < X < \frac53)$

$P(X=x) = \frac{c}{2^x} \quad x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

$c + \frac{c}{2} + \frac{c}{2^2}+\frac{c}{2^3}+\frac{c}{2^4}+\frac{c}{2^5}=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 32c+16c+8c+4c+2c+c=32$

$63c = 32 \to \boxed{c=\frac{32}{63}}$

X	0	1	2	3	4	5
$P(X=x)$	$\frac{32}{63}$	$\frac{32}{63}\times\frac12$	$\frac{32}{63}\times\frac{1}{2^2}$	$\frac{32}{63}\times\frac{1}{2^3}$	$\frac{32}{63}\times\frac{1}{2^4}$	$\frac{32}{63}\times\frac{1}{2^5}$

$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ & 0\le x<1 \\ & 1\le x<2 \\ & 2\le x<3 \\ & 3\le x<4 \\ & 4\le x<5 \end{cases}$

$P(\underbrace{\overset{0.5}{\frac12} < X < \overset{1.7}{\frac{5}{3}}}) = P(X=1) = \frac{32}{63}\times\frac12$

فردی ساعت ۱۰ صبح به ایستگاه اتوبوس می‌رسد و می‌داند که اتوبوس در زمانی به طور یکنواخت بین ۱۰ تا ۱۰:۳۰ به ایستگاه خواهد رسید احتمال اینکه بیش از ۱۰ دقیقه منتظر بماند چقدر است . اگر در ساعت ۱۰:۱۵ هنوز اتوبوس نیامده باشد احتمال اینکه ۱۰ دقیقه دیگر منتظر بماند چقدر است

$X \sim U(0,30) \to f(x) = \frac{1}{30}$

$P(X>10) = 1-P(X<10) = 1-\int_0^{10} \frac{1}{30}dx = 1-\frac{1}{30}(10) = 2/3$

$P(X>25|X>15) = \frac{P(X>25)}{P(X>15)} = \frac{\int_{25}^{30} \frac{1}{30}dx}{\int_{15}^{30} \frac{1}{30}dx} = \frac{\frac{1}{30}(5)}{\frac{15}{30}} = \frac13$

Subject:
Date

نمره یک درس در امتحان میان ترم دارای میانگین ۵ و انحراف معیار ۳ و در امتحان پایان ترم دارای میانگین ۶ و انحراف معیار ۴ است فرض کنید دو امتحان از هم مستقل و دارای توزیع نرمال باشند شخصی در این درس قبول می‌شود که دو برابر نمره میان ترم او بعلاوه ۲ برابر پایان ترم او کمتر از ۱۸ نباشد در این درس ۴۰ نفر ثبت نام کرده باشند چند نفر رد می‌شوند $0/3446 = \Phi(-0/4)$

$X_1 \sim N(5, 9) \qquad X_2 \sim N(6, 16)$

$P(2X_1 + 2X_2 < 18) = P(Z < \frac{\overset{-4}{18-22}}{10}) = \Phi(-0/4) = 0/3446$

$40 \times 0/3446 \simeq \boxed{14}$

$2X_1 + 2X_2 \sim N(22, 100)$

$E(2X_1 + 2X_2) = 2EX_1 + 2EX_2 = 22 \qquad V(2X_1 + 2X_2) = 4(9) + 4(16) = 100$

اگر متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال با میانگین μ و انحراف معیار σ باشد تابع مولد گشتاور $Y = X - c$ که c عددی ثابت است بدست آورید.

ب) تابع مولد گشتاور X به صورت $M_X(t) = e^{5t+2t^2}$ تعریف شده $CV = \sigma/\mu$ را بدست آورید.

$M_X(t) = e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2} \longrightarrow \mu = 5$

$\sigma^2/2 = 2 \rightarrow \sigma^2 = 4$

$M_Y(t) = E(e^{t(X-c)}) = E(e^{tX - tc})$

$= e^{-tc} \cdot e^{5t+2t^2} = e^{(5-c)t + 2t^2}$

$CV = 2/5 = \boxed{0/4}$

کنندگانش می‌فرستد. فرض کنید هر قطعه یا معیوب است و یا سالم و احتمال معیوب بودن هر قطعه ۰/۰۵ می‌باشد.

الف- به طور متوسط در هر بسته چند قطعه معیوب وجود دارد؟

ب- احتمال اینکه بسته دلخواهی شامل هیچ قطعه معیوبی نباشد را بیابید.

حل اگر X برابر تعداد قطعات معیوب در بین ۲۰ قطعه یک بسته باشد آنگاه $X \sim B(۲۰ , ۰/۰۵)$ و بنابراین

الف- $\mu = E(X) = np = ۲۰(۰/۰۵) = ۱$

ب- $P(X=۰) = f_X(۰) = \binom{۲۰}{۰}(۰/۰۵)^{۰}(۰/۹۵)^{۲۰} = ۰/۳۵۸$

مثال ۲.۱۲.۵ احتمال آنکه شدت نسبی احساس صوت یک تقویت کننده بیشتر از ۲ دسیبل (dB) باشد برابر ۰/۰۵ است. احتمال اینکه در بین ۱۰ عدد از این تقویت کننده‌ها که به طور مستقل انتخاب شوند

الف- یک تقویت کننده دارای شدت نسبی احساس صوت بیش از ۲ دسیبل باشد؟

ب- حداکثر ۲ تقویت کننده دارای شدت نسبی احساس صوت بیش از ۲ دسیبل باشند؟

ج- حداقل ۲ تقویت کننده دارای شدت نسبی احساس صوت بیش از ۲ دسیبل باشند؟

حل اگر X برابر تعداد تقویت کننده‌هایی در بین ۱۰ تقویت کننده باشند که دارای شدت نسبی احساس صوت بیش از ۲ دسیبل باشد آنگاه $X \sim B(۱۰, ۰/۰۵)$ و بنابراین

الف- $P(X=۱) = f_X(۱) = \binom{۱۰}{۱}(۰/۰۵)^{۱}(۰/۹۵)^{۹} = ۰/۳۱۵$

ب- $P(X \le ۲) = \sum_{x=۰}^{۲} f_X(x) = \sum_{x=۰}^{۲}\binom{۱۰}{x}(۰/۰۵)^{x}(۰/۹۵)^{۱۰-x} = ۰/۹۸۸۵$

ج- $P(X \ge ۲) = ۱ - P(X < ۲) = ۱ - \sum_{x=۰}^{۱} f_X(x)$

$$= ۱ - \sum_{x=۰}^{۱}\binom{۱۰}{x}(۰/۰۵)^{x}(۰/۹۵)^{۱۰-x} = ۰/۰۸۶۱$$

مثال ۳.۱۲.۵ فرض کنید ۸۰٪ لامپهای ساخته شده توسط یک کارخانه معیوب باشد. اگر ۱۵ عدد از لامپها را به تصادف انتخاب کنیم، مطلوب است محاسبه احتمال اینکه

الف- حداکثر ۸ لامپ سوخته باشد.

ب- ۱۰ لامپ یا بیشتر سوخته باشد.

ج- تعداد لامپهای سوخته از ۸ کمتر و از ۱۲ بیشتر نباشد.

حل اگر X برابر تعداد لامپهای سوخته در بین ۱۵ لامپ باشد آنگاه $X\sim B(۱۵,۰/۸)$ و بنابراین از جدول (I) داریم که

الف- $P(X\leq ۸)=۰/۰۱۸۱$

ب- $P(X\geq ۱۰)=۱-P(X<۱۰)=۱-P(X\leq ۹)=۱-۰/۰۶۱۱=۰/۹۳۸۹$

ج- $P(۸\leq X\leq ۱۲)=P(X\leq ۱۲)-P(X\leq ۷)=۰/۶۰۲۰-۰/۰۰۴۲=۰/۵۹۷۸$

مثال ۴.۱۲.۵ میانگین و واریانس یک توزیع دوجمله‌ای به ترتیب ۳ و ۲ است. احتمال اینکه X بزرگتر یا مساوی ۲ باشد را بیابید.

حل داریم که $E(X)=np=۳ \quad , \quad Var(X)=np(۱-p)=۲$

بنابراین $۲=(۱-p)۳$ و یا $p=\frac{۱}{۳}$ و n=۹، در نتیجه $X\sim B(۹,\frac{۱}{۳})$ پس

$$P(X\geq ۲)=۱-P(X<۲)=۱-\sum_{x=۰}^{۱}\binom{۹}{x}\left(\frac{۱}{۳}\right)^{x}\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۹-x}=\frac{۱۶۸۶۷}{۱۹۶۸۳}=۰/۸۵۷$$

مثال ۵.۱۲.۵ فرض کنید موتورهای هواپیما به طور مستقل از یکدیگر با احتمال $\frac{۱}{۵}$ خراب می‌شوند و اگر حداقل نصف از موتورهای هواپیما کار کند، هواپیما سالم به زمین خواهد نشست. کدامیک از هواپیماهای چهار موتوره یا دو موتوره احتمال بیشتری برای یک پرواز موفق دارند.

حل اگر X و Y به ترتیب تعداد موتورهای سالم در طول پرواز برای هواپیماهای ۴ و ۲ موتوره باشند آنگاه $X\sim B(۴,\frac{۴}{۵})$ و $Y\sim B(۲,\frac{۴}{۵})$ و در نتیجه

$$P(X\geq ۲)=۱-P(X<۲)=۱-\sum_{x=۰}^{۱}\binom{۴}{x}\left(\frac{۴}{۵}\right)^{x}\left(\frac{۱}{۵}\right)^{۴-x}=\frac{۶۰۸}{۶۲۵}=۰/۹۷۲۸$$

$$P(Y\geq ۱)=۱-P(Y<۱)=۱-\binom{۲}{۰}\left(\frac{۴}{۵}\right)^{۰}\left(\frac{۱}{۵}\right)^{۲}=\frac{۲۴}{۲۵}=۰/۹۶$$

بنابراین یک هواپیمای چهارموتوره دارای شانس بیشتری برای یک پرواز موفق است.

مثال ۶.۱۲.۵ یک مهندس کنترل کیفیت از هر ۲۴ باطری ماشین که آماده بارگیری است، ۳

باطری را بررسی می‌کند. اگر در بین ۲۴ باطری، ۶ باطری دارای نقص جزئی باشند، احتمال آنکه در نمونه‌ای که بازرسی می‌کند

الف- هیچیک از باطریها نقص جزئی نداشته باشند را بیابید.

ب- فقط یکی از باطریها دارای نقص جزئی باشد را بیابید.

ج- لااقل ۲ باطری دارای نقص باشند را بیابید.

حل اگر X تعداد باطریهایی در بین ۲۴ باطری باشد که دارای نقص جزئی می‌باشند آنگاه $X \sim HG(۲۴,۶,۳)$ بنابراین

الف- $$P(X=۰)=f_X(۰)=\frac{\binom{۶}{۰}\binom{۱۸}{۳}}{\binom{۲۴}{۳}}=\frac{۸۱۶}{۲۰۲۴}=۰/۴۰۳۲$$

ب- $$P(X=۱)=f_X(۱)=\frac{\binom{۶}{۱}\binom{۱۸}{۲}}{\binom{۲۴}{۳}}=\frac{۹۱۸}{۲۰۲۴}=۰/۴۵۳۶$$

ج- $$P(X\geq ۲)=۱-P(X<۲)=۱-\{f_X(۰)+f_X(۱)\}=۱-۰/۸۵۶۸=۰/۱۴۳۲$$

مثال ۷.۱۲.۵ کارخانه‌ای کالای تولید شده را در جعبه‌های ۲۵ تایی به بازار عرضه می‌کند. قبل از عرضه به بازار از جعبه یک نمونه ۳تایی انتخاب و اگر کالای معیوبی دیده نشد به بازار عرضه می‌گردد ولی اگر کالای معیوب در نمونه دیده شد جعبه به کارخانه بازگردانده می‌شود. احتمال اینکه جعبه‌ای که شامل ۴ کالای معیوب است به بازار عرضه شود را بیابید.

حل اگر X تعداد کالاهای معیوب در نمونه ۳ تایی انتخابی از جعبه شامل ۲۵ کالا باشد آنگاه $X \sim HG(۲۵,۴,۳)$ و بنابراین احتمال موردنظر برابر است با

$$P(X=۰)=f_X(۰)=\frac{\binom{۴}{۰}\binom{۲۱}{۳}}{\binom{۲۵}{۳}}=\frac{۱۳۳۰}{۲۳۰۰}=۰/۵۷۸۳$$

مثال ۸.۱۲.۵ یک تولید کننده لوازم برقی ادعا می‌کند که فقط ۱۰٪ تولیداتش معیوب هستند.

الف- اگر ۲۰ قطعه با جایگذاری از خط تولید برای بازرسی به تصادف انتخاب کنیم، احتمال اینکه حداقل ۴ قطعه معیوب مشاهده شود را بیابید.

ب- اگر در جعبه‌ای ۴۰ قطعه وجود داشته باشد و ۱۰ قطعه بدون جایگذاری از جعبه انتخاب شوند، احتمال اینکه حداکثر یک قطعه معیوب در بین ۱۰ قطعه مشاهده شود را بیابید.

حل الف- اگر X تعداد قطعات معیوب در بین ۲۰ قطعه انتخابی باشد که به طور مستقل انتخاب می‌شوند آنگاه $X \sim B(۲۰,۰/۱)$ و از جدول (I) داریم که

$$P(X \geq ۴) = ۱ - P(X \leq ۳) = ۱ - ۰/۸۶۷ = ۰/۱۳۳$$

ب- اگر X تعداد قطعات معیوب در بین ۱۰ قطعه انتخابی از جعبه ۴۰ قطعه‌ای باشد آنگاه $X \sim HG(۴۰\,,۴,\,۱۰)$ و بنابراین

$$P(X \leq ۱) = \sum_{x=۰}^{۱} f_X(x) = \sum_{x=۰}^{۱} \frac{\binom{۴}{x}\binom{۳۶}{۱۰-x}}{\binom{۴۰}{۱۰}} = ۰/۷۴۴۱$$

مثال ۹.۱۲.۵ ۸۰٪ لامپهای تولید شده توسط یک کارخانه سالم می‌باشند. از بین ۵۰۰۰ لامپ یک نمونه ۱۰تایی به تصادف انتخاب می‌کنیم، احتمال اینکه دقیقاً ۳ لامپ سالم باشد را بیابید.

حل اگر X تعداد لامپهای سالم در بین ۱۰ لامپ انتخابی باشد آنگاه $X \sim HG(۵۰۰۰,۴۰۰۰,۱۰)$ و چون n=۱۰ نسبت به N=۵۰۰۰ عدد کوچکی است پس تقریباً $X \sim B(۱۰,۰/۸۰)$ و بنابراین

$$P(X=۳) \approx \binom{۱۰}{۳}(۰/۸)^۳(۰/۲)^۷ = ۰/۰۰۰۷۸۶$$

مثال ۱۰.۱۲.۵ یک ماشین نویس به طور متوسط ۲ غلط در هر صفحه تایپ می‌کند. احتمال اینکه او در صفحه بعدی

الف- چهار یا بیشتر غلط تایپ کند را بیابید.

ب- هیچ غلطی نداشته باشد را بیابید.

حل اگر X تعداد غلطهای تایپی در یک صفحه باشد آنگاه $X \sim P(۲)$ و بنابراین از جدول (II) داریم که

الف- $P(X \geq ۴) = ۱ - P(X < ۴) = ۱ - P(X \leq ۳) = ۱ - ۰/۸۵۷۱ = ۰/۱۴۲۹$

ب- $P(X=۰) = f_X(۰) = \dfrac{e^{-۲}۲^۰}{۰!} = e^{-۲} = ۰/۱۳۵۳$

مثال ۱۱.۱۲.۵ در یک شرکت تولیدی معین حوادث به نسبت یک حادثه در هر ۲ ماه اتفاق می‌افتند. اگر فرض کنیم که حوادث به طور مستقل رخ دهند، میانگین تعداد حوادث در سال را بیابید. احتمال اینکه در ماه معینی هیچ حادثه‌ای رخ ندهد را بیابید.

حل اگر X و Y به ترتیب تعداد حوادث در یک سال و یک ماه باشند آنگاه $X\sim P(۶)$ و $Y\sim P(\frac{۱}{۲})$ بنابراین ۶ $\mu=E(X)=$ یعنی میانگین حوادث در سال ۶ می‌باشد و همچنین

$$P(Y=۰)=f_Y(۰)=\frac{e^{-\frac{۱}{۲}}(\frac{۱}{۲})^۰}{۰!}=e^{-\frac{۱}{۲}}=۰/۶۰۶۵$$

مثال ۱۲.۱۲.۵ اگر هر دو دقیقه یک نفر وارد کتابخانه‌ای شود، مطلوب است محاسبه احتمال اینکه

الف- حداقل یک نفر بین ساعت دوازده تا دوازده و پنج دقیقه وارد کتابخانه شوند.

ب- یک تا چهار نفر بین ساعت دوازده تا دوازده و پنج دقیقه وارد کتابخانه شوند.

حل اگر X تعداد افرادی باشد که بین ساعت دوازده تا دوازده و پنج دقیقه وارد کتابخانه می‌شوند آنگاه $X\sim P(۲/۵)$ و بنابراین با استفاده از جدول (II) داریم که

الف- $P(X\geq ۱)=۱-P(X<۱)=۱-f_X(۰)=۱-e^{-۲/۵}=۰/۹۱۷۹$

ب- $P(۱\leq X\leq ۴)=P(X\leq ۴)-P(X\leq ۰)=۰/۸۹۱۲-۰/۰۸۲۱=۰/۸۰۹۱$

مثال ۱۳.۱۲.۵ اگر $X\sim P(\mu)$ با استفاده از $E(X(X-۱))$، امید ریاضی و واریانس X را محاسبه کنید.

حل تابع احتمال X برابر است با

$$f_X(x)=\frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!}\qquad,\quad x=۰,۱,۲,...$$

همچنین بسط مک لورن e^μ برابر است با $e^\mu=\sum_{y=۰}^{+\infty}\frac{\mu^y}{y!}$، بنابراین با تغییر متغیر y=x−۱ داریم که

$$E(X)=\sum_{x=۰}^{+\infty}\frac{xe^{-\mu}\mu^x}{x!}=\mu e^{-\mu}\sum_{x=۱}^{+\infty}\frac{\mu^{x-۱}}{(x-۱)!}=\mu e^{-\mu}\sum_{y=۰}^{+\infty}\frac{\mu^y}{y!}=\mu e^{-\mu}e^\mu=\mu$$

همچنین با تغییر متغیر y=x−۲ داریم که

$$E(X(X-۱))=\sum_{x=۰}^{+\infty}\frac{x(x-۱)e^{-\mu}\mu^x}{x!}=\mu^۲e^{-\mu}\sum_{x=۲}^{+\infty}\frac{\mu^{x-۲}}{(x-۲)!}$$

$$=\mu^۲e^{-\mu}\sum_{y=۰}^{+\infty}\frac{\mu^y}{y!}=\mu^۲e^{-\mu}e^\mu=\mu^۲$$

بنابراین

$$Var(X)=E(X^۲)-[E(X)]^۲=E(X(X-۱))+E(X)-[E(X)]^۲=\mu^۲+\mu-\mu^۲=\mu$$

مثال ۱۴.۱۲.۵ درظرفی ۹۹ مهره سفید و یک مهره سیاه داریم. از این ظرف ۲۰۰ مرتبه با جایگذاری مهره بیرون می‌آوریم. احتمال اینکه ۷ مرتبه مهره سیاه دیده شود را بیابید.

حل اگر X تعداد مهره‌های سیاه مشاهده شده در بین ۲۰۰ مهره انتخابی باشد آنگاه $X \sim B(۲۰۰, ۰/۰۱)$ و چون n=۲۰۰ عددی بزرگ و p=۰/۰۱ به صفر نزدیک می‌باشد بنابراین تقریباً $X \sim P(۲)$ که در آن $\mu = np = ۲۰۰(۰/۰۱) = ۲$. در نتیجه

$$P(X=۷) \approx \frac{e^{-۲}۲^{۷}}{۷!} = ۰/۰۰۳۴$$

مثال ۱۵.۱۲.۵ معلم فراموشکاری به خاطر نمی‌آورد که کدام یک از ۱۲ کلیدی که در دست دارد مربوط به دفتر کار اوست. اگر کلیدها را به تصادف و با جایگذاری امتحان کند.

الف- به طور متوسط باید چند کلید را برای باز شدن در دفتر کارش امتحان کند؟

ب- احتمال اینکه دفتر کارش تنها بعد از سه امتحان باز شود را بیابید.

حل اگر X تعداد کلیدهای امتحان شده تا رسیدن به کلید دفتر کار معلم باشد آنگاه $X \sim G(\frac{۱}{۱۲})$ و بنابراین

الف- $E(X) = \frac{۱}{p} = ۱۲$، بنابراین به طور متوسط ۱۲ کلید امتحان می‌شود.

ب- $P(X=۳) = f_X(۳) = (\frac{۱}{۱۲})(\frac{۱۱}{۱۲})^{۳-۱} = \frac{۱۲۱}{۱۷۲۸} = ۰/۰۷۰۰۲$

مثال ۱۶.۱۲.۵ در دهه گذشته، نسبت پرتابهای موفق در یک پایگاه آزمون پرتاب ۰/۸۵ بوده است. فرض کنید که آزمایشی طرح ریزی شده که مستلزم ۳ پرتاب موفق است. احتمال اینکه (الف) دقیقاً ۵ بار، (ب) کمتر از ۵ پرتاب لازم باشد را بیابید.

حل اگر X تعداد پرتابهای لازم تا رسیدن به ۳ پرتاب موفق باشد آنگاه $X \sim NB(۳, ۰/۸۵)$ و بنابراین

الف- $P(X=۵) = f_X(۵) = \binom{۵-۱}{۳-۱}(۰/۸۵)^{۳}(۰/۱۵)^{۲} = ۰/۰۸۲۹$

ب- $P(X<۵) = f_X(۳) + f_X(۴) = \binom{۳-۱}{۳-۱}(۰/۸۵)^{۳}(۰/۱۵)^{۰}$

$$+ \binom{۴-۱}{۳-۱}(۰/۸۵)^{۳}(۰/۱۵)^{۱} = ۰/۸۹۰۵$$

مثال ۱۷.۱۲.۵ کارگاهی روزانه ۱۰۰ قطعه الکترونیکی تولید می‌کند که در یک روز خاص ۱۵

قطعه آن معیوب است. بازرسی جهت کنترل کیفیت ۱۰ قطعه از قطعات تولیدی آن روز خاص را مورد بررسی قرار داده و چنانچه حداکثر ۲ قطعه معیوب مشاهده نماید، کیفیت را مطلوب گزارش می‌نماید.

الف- اگر نمونه بدون جایگذاری انتخاب شود احتمال آنکه کیفیت تولید مطلوب گزارش شود را بیابید.

ب- اگر نمونه با جایگذاری انتخاب شود احتمال آنکه هشتمین قطعه انتخابی اولین قطعه معیوب مشاهده شده باشد را بیابید.

حل الف- اگر X تعداد قطعات معیوب در بین ۱۰ قطعه انتخابی بدون جایگذاری باشد آنگاه $X \sim HG(۱۰۰,۱۵,۱۰)$ و بنابراین احتمال موردنظر برابر است با

$$P(X \leq ۲) = \sum_{x=۰}^{۲} \frac{\binom{۱۵}{x}\binom{۸۵}{۱۰-x}}{\binom{۱۰۰}{۱۰}} = ۰/۸۲۹۵$$

ب- اگر X تعداد قطعات مشاهده شده تا رسیدن به اولین قطعه معیوب باشد آنگاه $X \sim G(۰/۱۵)$ و بنابراین $P(X=۸) = (۰/۱۵)(۰/۸۵)^{۸-۱} = ۰/۰۴۸۱$

مثال ۱۸.۱۲.۵ فرض کنید ۲۰٪ انسانها چشمانی میشی دارند. اگر افرادی که به هواپیما سوار می‌شوند به تصادف انتخاب شده باشند، احتمال اینکه هشتمین مسافری که به هواپیما سوار می‌شود سومین مسافری باشد که چشمان او میشی است را بیابید.

حل اگر X تعداد مسافرینی که به هواپیما سوار می‌شوند تا رسیدن به سومین مسافر چشم میشی باشد آنگاه $X \sim NB(۳,۰/۲)$ و بنابراین

$$P(X=۸) = \binom{۸-۱}{۳-۱}(۰/۲)^{۳}(۰/۸)^{۵} = ۰/۰۵۵$$

مثال ۱۹.۱۲.۵ سه نفر با هم در یک قهوه خانه سکه پرتاب می‌کنند، آن یکی که در اقلیت باشد پول چای را می‌دهد. اگر سه سکه یک جور بیاید پرتاب سکه دوباره تکرار می‌گردد. احتمال اینکه کمتر از ۴ بار پرتاب سکه لازم باشد را بیابید.

حل اگر X تعداد پرتابهای سکه‌ها تا رسیدن به اولین غیر یک جور باشد آنگاه $X \sim G(p)$ که در آن $p = ۱ - P(\{HHH,TTT\}) = ۱ - \frac{۲}{۸} = \frac{۳}{۴}$ بنابراین

$$P(X<4)=P(X\leq 3)=1-(\frac{1}{4})^3=\frac{63}{64}=0/9844$$

مثال ۲۰.۱۲.۵ مدت زمانی که طول می‌کشد تا شخصی فاصله خانه تا ایستگاه قطار را پیاده طی کند دارای توزیع یکنواخت بین ۱۵ تا ۲۰ دقیقه است. اگر شخص ساعت هفت و سی دقیقه از منزل خارج شود احتمال اینکه او سوار قطاری شود که ساعت هفت و چهل و هشت دقیقه به ایستگاه می‌رسد را بیابید.

حل اگر X زمان طی کردن فاصله خانه تا ایستگاه توسط شخص باشد آنگاه $X\sim U(15,20)$ و بنابراین احتمال موردنظر برابر است با

$$P(X<18)=\int_{15}^{18}\frac{1}{20-15}dx=\frac{3}{5}=0/6$$

مثال ۲۱.۱۲.۵ اگر $X\sim U(-1,1)$ مطلوب است محاسبه $P(|X|>\frac{1}{2})$ و $P(\sin\frac{\pi X}{2}>\frac{1}{2})$.

حل

$$f_X(x)=\frac{1}{2}\qquad,\qquad -1<x<1$$

$$P(|X|>\frac{1}{2})=1-P(|X|\leq\frac{1}{2})=1-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}dx=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$P(\sin\frac{\pi X}{2}>\frac{1}{2})=P(\frac{\pi}{6}<\frac{\pi X}{2}<\frac{5\pi}{6})=P(\frac{1}{3}<X<\frac{5}{3})=P(X>\frac{1}{3})=\int_{\frac{1}{3}}^{1}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{3}$$

مثال ۲۲.۱۲.۵ شعاع کره‌ای یک عدد تصادفی بین ۲ و ۴ است. میانگین حجم آن را بیابید. احتمال اینکه حجم آن حداکثر 36π شود را بیابید.

حل اگر X شعاع کره باشد آنگاه $X\sim U(2,4)$ و چون حجم کره برابر $V=\frac{4}{3}\pi X^3$ است پس

$$E(V)=E(\frac{4}{3}\pi X^3)=\frac{4}{3}\pi\int_2^4\frac{x^3}{2}dx=\frac{\pi}{6}x^4\Big|_2^4=\frac{\pi}{6}(240)=40\pi$$

$$P(V<36\pi)=P(\frac{4}{3}\pi X^3<36\pi)=P(X^3<27)=P(X<3)=\int_2^3\frac{dx}{2}=\frac{1}{2}$$

مثال ۲۳.۱۲.۵ مدت زمان برحسب دقیقه که قطار تهران مشهد تأخیر دارد متغیر تصادفی نمایی X با میانگین ۱۰ دقیقه است. مطلوب است تعیین $P(X>E(X))$.

حل چون $X\sim E(10)$ پس $E(X)=10$ و در نتیجه

$$P(X>E(X))=P(X>۱۰)=\int_{۱۰}^{+\infty}\frac{۱}{۱۰}e^{-\frac{x}{۱۰}}dx=-e^{-\frac{x}{۱۰}}\Big|_{۱۰}^{+\infty}=e^{-۱}=۰/۳۶۷۹$$

مثال ۲۴.۱۲.۵ فرض کنید X زمان تعمیر یک تلویزیون برحسب ساعت باشد که دارای توزیع نمایی با میانگین ۲ ساعت است.

الف- اگر در یک روز یک تعمیرکار تلویزیونها را یک به یک و مستقلاً تعمیر کند، احتمال اینکه سومین تلویزیون تعمیری اولین تلویزیونی باشد که قبل از ۲ ساعت تعمیر می‌شود را بیابید.

ب- اگر بدانیم که در ۴ ساعت حداقل ۲ تلویزیون تعمیر شده است، احتمال اینکه در همان ۴ ساعت حداکثر ۳ تلویزیون تعمیر شده باشد را بیابید.

حل الف- اگر Y تعداد تلویزیونهای تعمیری تا رسیدن به اولین تلویزیونی باشد که قبل از ۲ ساعت تعمیر می‌شود آنگاه $Y\sim G(p)$ که در آن

$$p=P(X<۲)=\int_{۰}^{۲}\frac{۱}{۲}e^{-\frac{x}{۲}}dx=-e^{-\frac{x}{۲}}\Big|_{۰}^{۲}=۱-e^{-۱}=۰/۶۳۲۱$$

بنابراین $P(Y=۳)=f_Y(۳)=(۰/۶۳۲۱)(۰/۳۶۷۹)^{۳-۱}=۰/۰۸۵۶$

ب- اگر M تعداد تلویزیونهایی باشد که در مدت ۴ ساعت تعمیر می‌شوند آنگاه به واسطه رابطه توزیع نمایی و توزیع پواسون، M دارای توزیع پواسون با پارامتر $\mu=۴(\frac{۱}{۲})=۲$ است. بنابراین از جدول (II) داریم که

$$P(M\le ۳\mid M\ge ۲)=\frac{P(۲\le M\le ۳)}{P(M\ge ۲)}=\frac{P(M\le ۳)-P(M\le ۱)}{۱-P(M\le ۱)}=\frac{۰/۸۵۷۱-۰/۴۰۶۰}{۱-۰/۴۰۶۰}$$
$$=۰/۷۵۹۴$$

مثال ۲۵.۱۲.۵ اگر $X\sim G(p)$ و $Y\sim E(\theta)$ آنگاه θ را برحسب p چنان تعیین کنید که $P(X>۱)=P(Y>۱)$.

حل

$$P(X>۱)=۱-P(X\le ۱)=۱-\{۱-q^{۱}\}=q=۱-p$$

$$P(Y>۱)=\int_{۱}^{+\infty}\frac{۱}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}=-e^{-\frac{x}{\theta}}\Big|_{۱}^{+\infty}=e^{-\frac{۱}{\theta}}$$

بنابراین

$$e^{-\frac{۱}{\theta}} = ۱-p \quad \Rightarrow \quad -\frac{۱}{\theta} = Ln(۱-p) \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{-۱}{Ln(۱-p)}$$

مثال ۲۶.۱۲.۵ فرض کنید متغیر تصادفی X مدت زمان تا توقف یک دستگاه برحسب ۵۰ روز باشد که دارای توزیع نمایی با پارامتر یک است.

الف- احتمال آنکه دستگاه حداقل ۱۰۰ روز بدون توقف کار کند را بیابید.

ب- احتمال آنکه دستگاه در ۱۵۰ روز حداکثر ۲ بار توقف کند را بیابید.

حل الف- چون $x > ۰$,$f_X(x) = e^{-x}$ پس

$$P(X > ۲) = \int_{۲}^{+\infty} e^{-x}\,dx = -e^{-x} \mid_{۲}^{+\infty} = e^{-۲} = ۰/۱۳۵۳$$

ب- اگر Y تعداد دفعاتی باشد که دستگاه در ۱۵۰ روز توقف می‌کند، آنگاه بواسطه رابطه توزیع نمایی و پواسون، Y دارای توزیع پواسون با پارامتر $\mu = ۳(۱) = ۳$ است پس از جدول (II) داریم که $P(Y \leq ۲) = ۰/۴۲۳۲$.

مثال ۲۷.۱۲.۵ فرض کنید به طور متوسط ۸ تاکسی در یک ساعت به یک ایستگاه وارد می‌شوند.

الف- احتمال آنکه در نیم ساعت اول حداقل یک تاکسی وارد ایستگاه شود را بیابید.

ب- احتمال آنکه زمان بین ورود دو تاکسی بیشتر از دو برابر میانگین زمانهای ورود باشد را بیابید.

حل الف- اگر X تعداد تاکسی‌هایی باشد که در نیم ساعت وارد ایستگاه می‌شوند آنگاه $X \sim P(۴)$ و بنابراین $P(X \geq ۱) = ۱ - P(X < ۱) = ۱ - f_X(۰) = ۱ - e^{-۴} = ۰/۹۸۱۷$

ب- اگر Y زمان بین ورود دو تاکسی برحسب ساعت باشد آنگاه $Y \sim E(\frac{۱}{۸})$ و $E(Y) = \frac{۱}{۸}$ و در نتیجه

$$P(Y > ۲E(Y)) = P(Y > \frac{۱}{۴}) = \int_{\frac{۱}{۴}}^{+\infty} ۸e^{-۸y}\,dy = -e^{-۸y} \mid_{\frac{۱}{۴}}^{+\infty} = e^{-۲} = ۰/۱۳۵۳$$

مثال ۲۸.۱۲.۵ طول عمر موتورهای ساخته شده توسط کارخانه‌ای برحسب سال، دارای توزیع نرمال با میانگین ۱۰ سال و انحراف معیار ۲ سال است. فرض کنید که کارخانه سازنده، موتورها را به مدت ۶ سال ضمانت کرده است.

الف- این کارخانه چند درصد موتورهایی که فروخته است را باید تعویض نماید؟

ب- این کارخانه مدت ضمانت را چقدر باید انتخاب کند، تا حداکثر یک درصد موتورهای فروخته شده تعویض گردد.

حل اگر X طول عمر موتور ساخته شده توسط این کارخانه باشد آنگاه $X \sim N(۱۰,۲^۲)$ بنابراین

الف- $P(X<۶)=P(\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{۶-۱۰}{۲})=P(Z<-۲)=۰/۰۲۲۸$

بنابراین درصد موردنظر برابر است با $۰/۰۲۲۸ \times ٪۱۰۰ = ٪۲/۲۸$

ب- اگر a مدت ضمانت موردنظر باشد آنگاه

$$۰/۰۱ \geq P(X<a)=P(\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{a-۱۰}{۲})=P(Z<\frac{a-۱۰}{۲})=\Phi(\frac{a-۱۰}{۲})$$

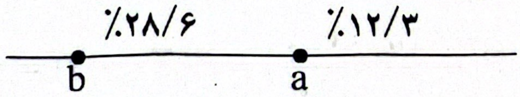
بنابراین با استفاده از جدول (III) داریم که $\frac{a-۱۰}{۲} \leq -۲/۳۳ \Rightarrow a \leq ۵/۳۴$

مثال ۲۹.۱۲.۵ فرض کنید متغیر تصادفی X نمرات دانش‌آموزان یک کلاس در امتحان آمار باشد که دارای توزیع نرمال با میانگین ۷۰ و انحراف معیار ۱۰ است.

الف- اگر ٪۱۲/۳ از دانش‌آموزان این کلاس نمره A و ٪۲۸/۶ از آنها نمره B بیاورند، پایین‌ترین نمره A و پایین‌ترین نمره B را در این کلاس تعیین کنید.

ب- $P(\frac{۸}{X}>۰/۱)$ را محاسبه کنید.

حل الف- اگر a پایین‌ترین نمره A و b پایین‌ترین نمره B باشد آنگاه طبق شکل زیر داریم که



$$۰/۱۲۳=P(X>a)=P(\frac{X-\mu}{\sigma}>\frac{a-۷۰}{۱۰})=۱-\Phi(\frac{a-۷۰}{۱۰})$$

بنابراین $\Phi(\frac{a-۷۰}{۱۰})=۰/۸۷۷$ و یا $\frac{a-۷۰}{۱۰}=۱/۱۶$ و یا $a=۸۱/۶$ همچنین

$$P(X>b)=۰/۲۸۶+۰/۱۲۳=۰/۴۰۹$$

در نتیجه $۰/۴۰۹=P(X>b)=P(\frac{X-\mu}{\sigma}>\frac{b-۷۰}{۱۰})=۱-\Phi(\frac{b-۷۰}{۱۰})$

بنابراین $\Phi(\frac{b-۷۰}{۱۰})=۰/۵۹۱$ و یا $\frac{b-۷۰}{۱۰}=۰/۲۳$ و یا $b=۷۲/۳$.

ب- $P(\frac{۸}{X}>۰/۱)=P(X<۸۰)=P(\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{۸۰-۷۰}{۱۰})=\Phi(۱)=۰/۸۴۱۳$

مثال ۳۰.۱۲.۵ فرض کنید وزن آهن موجود در یک کیلوگرم سنگ آهن یک معدن متغیر تصادفی X است که دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و انحراف معیار مجهول σ گرم می‌باشد.

الف- اگر $P(X \geq ۵/۶) = ۰/۲۸۷۷$ مقدار $\sigma^۲$ را بیابید.

ب- احتمال اینکه در یک کیلوگرم سنگ آهن بین ۵ تا ۱۱ گرم آهن وجود داشته باشد را به دست آورید.

ج- هنگامی یک معدن مورد بهره‌برداری قرار می‌گیرد که حداقل ۴ گرم آهن در یک کیلوگرم سنگ آهن آن موجود باشد. احتمال اینکه از بین ۶ معدن که به طور مستقل انتخاب می‌شوند، حداقل ۲ معدن مورد بهره برداری قرار نگیرد را بیابید.

حل الف- چون $P(X \geq ۵/۶) = ۰/۲۸۷۷$ پس

$$۰/۷۱۲۳ = P(X < ۵/۶) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{۵/۶-۰}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{۵/۶}{\sigma}\right)$$

بنابراین $\frac{۵/۶}{\sigma} = ۰/۵۶$ و یا $\sigma = ۱۰$ و در نتیجه $\sigma^۲ = ۱۰۰$.

ب-
$$P(۵ < X < ۱۱) = P\left(\frac{۵-۰}{۱۰} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{۱۱-۰}{۱۰}\right) = P(۰/۵ < Z < ۱/۱)$$
$$= \Phi(۱/۱) - \Phi(۰/۵) = ۰/۸۶۴۳ - ۰/۶۹۱۵ = ۰/۱۷۲۸$$

ج- اگر Y تعداد معدنهایی در بین ۶ معدن باشد که مورد بهره برداری قرار نمی‌گیرند آنگاه $Y \sim B(۶, p)$ که در آن

$$p = P(X < ۴) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{۴-۰}{۱۰}\right) = P(Z < ۰/۴) = ۰/۶۵۵۴$$

بنابراین
$$P(Y \geq ۲) = ۱ - P(Y < ۲) = ۱ - \{f_Y(۰) + f_Y(۱)\}$$
$$= ۱ - \{(۰/۳۴۴۶)^۶ + \binom{۶}{۱}(۰/۶۵۵۴)(۰/۳۴۴۶)^۵\} = ۰/۹۷۹۲$$

مثال ۳۱.۱۲.۵ فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f_X(x) = \frac{۱}{\sqrt{۳۲\pi}} e^{-\frac{۱}{۳۲}(x+۷)^۲}, \quad -\infty < x < +\infty$$

مطلوب است محاسبه $P(X^۲ \leq ۴۹)$ و $P(|X-۳| < ۱۲)$.

حل با توجه به فرم تابع چگالی داریم که $X \sim N(-۷, ۱۶)$ بنابراین

$$P(X^{۲}\leq ۴۹)=P(|X|\leq ۷)=P(-۷\leq X\leq ۷)=P(\frac{-۷+۷}{۴}\leq\frac{X-\mu}{\sigma}\leq\frac{۷+۷}{۴})$$

$$=P(۰\leq Z\leq ۳/۵)=\Phi(۳/۵)-\Phi(۰)=۱-۰/۵=۰/۵$$

$$P(|X-۳|<۱۲)=P(-۱۲<X-۳<۱۲)=P(-۹<X<۱۵)$$

$$=P(\frac{-۹+۷}{۴}<\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{۱۵+۷}{۴})=P(-۰/۵<Z<۵/۵)$$

$$=\Phi(۵/۵)-\Phi(-۰/۵)=۱-۰/۳۰۸۵=۰/۶۹۱۵$$

مثال ۳۲.۱۲.۵ الف- فرض کنید که تولیدات چای در بسته‌های ۱۰۰ گرمی بسته بندی شوند. اگر وزن بسته‌ها دارای توزیع نرمال باشد و مشاهده کنیم که ۵ درصد بسته‌ها وزنی کمتر از ۸۳/۶ و ۲ درصد آنها وزنی بیش از ۱۲۰/۵ گرم دارند، میانگین و واریانس توزیع را به دست آورید.

ب- تصمیم گرفته می‌شود که بسته‌ها را به صورت بسته‌های ۱۰۰۰ گرمی درهم ادغام کنیم (۱۰ بسته را به تصادفی با هم ادغام می‌کنیم). چند درصد بسته‌ها دارای وزنی بیش از ۱۱۰۰ گرم خواهند داشت؟

حل الف- اگر X وزن بسته‌های چای باشد آنگاه $X\sim N(\mu,\sigma^{۲})$ و بنابراین

$$۰/۰۵=P(X<۸۳/۶)=P(\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{۸۳/۶-\mu}{\sigma})=\Phi(\frac{۸۳/۶-\mu}{\sigma})$$

$$۰/۰۲=P(X>۱۲۰/۵)=P(\frac{X-\mu}{\sigma}>\frac{۱۲۰/۵-\mu}{\sigma})=۱-\Phi(\frac{۱۲۰/۵-\mu}{\sigma})$$

بنابراین از جدول (III) داریم که

$$\frac{۸۳/۶-\mu}{\sigma}=-۱/۶۴$$

$$\frac{۱۲۰/۵-\mu}{\sigma}=۲/۰۵$$

که با حل دستگاه معادلات فوق ۱۰۰ $=\mu$، ۱۰ $=\sigma$ به دست می‌آیند.

ب- اگر Y وزن ۱۰ بسته ادغام شده باشد آنگاه $Y=۱۰X\sim N(۱۰۰۰,۱۰۰۰۰)$

و بنابراین

$$P(Y>۱۱۰۰)=P(\frac{Y-\mu}{\sigma}>\frac{۱۱۰۰-۱۰۰۰}{۱۰۰})=P(Z>۱)=۱-\Phi(۱)$$

$$=۱-۰/۸۴۱۳=۰/۱۵۸۷$$

در نتیجه ۱۵/۸۷٪ وزنی بیش از ۱۱۰۰ گرم دارند.

مثال ۳۳.۱۲.۵ احتمال اینکه بیماری بر اثر عمل جراحی ساده قلب خوب شود ۰/۹ است. احتمال

اینکه بین و خود ۸۴ تا ۹۵ بیمار از ۱۰۰ بیمار بعدی که به این عمل مبادرت می‌کنند، بهبود یابند را بیابید.

حل اگر X تعداد بیمارانی در بین ۱۰۰ بیمار باشد که از عمل جراحی بهبود می‌یابند آنگاه $X \sim B(۱۰۰, ۰/۹)$ و از تقریب نرمال داریم که

$$P(۸۴ \le X \le ۹۵) = P(۸۳/۵ < X < ۹۵/۵)$$

$$= P\left(\frac{۸۳/۵ - ۹۰}{۳} < \frac{X - np}{\sqrt{npq}} < \frac{۹۵/۵ - ۹۰}{۳}\right) \approx P(-۲/۱۷ < Z < ۱/۸۳)$$

$$= \Phi(۱/۸۳) - \Phi(-۲/۱۷) = ۰/۹۶۶۴ - ۰/۰۱۵۰ = ۰/۹۵۱۴$$

مثال ۳۴.۱۲.۵ یک نمونه تصادفی ۷۲تایی از تابع چگالی احتمال زیر را در نظر بگیرید. احتمال اینکه حداقل ۳۰ عضو نمونه از ۳ بزرگتر باشند تقریباً چقدر است؟

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{۱}{x^۲} & x > ۱ \\ ۰ & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

حل اگر Y تعدادی از نمونه ۷۲تایی باشند که از ۳ بزرگتر هستند آنگاه $Y \sim B(۷۲, p)$ که در آن

$$p = P(X > ۳) = \int_۳^{+\infty} \frac{۱}{x^۲} dx = \frac{-۱}{x} \Big|_۳^{+\infty} = \frac{۱}{۳}$$

بنابراین با استفاده از تقریب نرمال داریم که

$$P(Y \ge ۳۰) = P(Y > ۲۹/۵) = P\left(\frac{Y - np}{\sqrt{npq}} > \frac{۲۹/۵ - ۲۴}{۴}\right) \approx P(Z > ۱/۳۸)$$

$$= ۱ - \Phi(۱/۳۸) = ۱ - ۰/۹۱۶۲ = ۰/۰۸۳۸$$

مثال ۳۵.۱۲.۵ یک دستگاه برش با برش طولی و عرضی صفحات فلزی، صفحات مستطیل شکلی را تولید می‌کند. برشهای طولی و عرضی به ترتیب از توزیع نرمال مستقل با میانگینهای مساوی ۲ و واریانسهای ۴ و ۵ پیروی می‌کنند.

الف- احتمال اینکه محیط یک صفحه بریده شده از ۹/۲ کمتر باشد را بیابید.

ب- اگر ۱۰ صفحه مستقلاً بریده شوند احتمال اینکه حداقل ۲ عدد از آنها دارای محیطی کمتر از ۸ باشند را بیابید.

حل الف- اگر X، Y و W به ترتیب طول، عرض و محیط صفحه بریده شده باشند آنگاه X و Y از

یکدیگر مستقل هستند و $X \sim N(۲,۴)$، $Y \sim N(۲,۵)$ و $W = ۲X + ۲Y \sim N(۸,۳۶)$

بنابراین $P(W < ۹/۲) = P(\frac{W-\mu}{\sigma} < \frac{۹/۲ - ۸}{۶}) = \Phi(۰/۲) = ۰/۵۷۹۳$

ب- اگر M تعداد صفحات بریده شده در بین ۱۰ صفحه باشد که دارای محیطی کمتر از ۸ هستند آنگاه $M \sim B(۱۰,p)$ که در آن $p = P(W < ۸) = P(\frac{W-\mu}{\sigma} < \frac{۸-۸}{۶}) = \Phi(۰) = ۰/۵$

بنابراین از جدول (I) داریم که $P(Y \geq ۲) = ۱ - P(Y \leq ۱) = ۱ - ۰/۰۱۰۷ = ۰/۹۸۹۳$

مثال ۳۶.۱۲.۵ نمرات درسهای ۴ واحدی ریاضی، ۳ واحدی آمار و ۳ واحدی زبان به ترتیب دارای توزیع نرمال با میانگینهای ۱۲، ۱۴ و ۱۵ و انحراف معیارهای ۲، $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۲}$ می‌باشد.

الف- اگر ۵۰ نفر این ۳ درس را انتخاب کرده باشند، معدل چند نفرشان در این ۳ درس از ۱۴/۵ بیشتر است؟

ب- اگر ۴۰ نفر از دانشجویانی که این ۳ درس را انتخاب کرده‌اند به طور مستقل انتخاب کنیم، احتمال اینکه حداقل ۱۵ نفر از آنها دارای معدلی کمتر از ۱۳/۵ در این ۳ درس باشند را بیابید.

حل اگر $X_۱$، $X_۲$ و $X_۳$ به ترتیب نمرات دروس ریاضی، آمار و زبان و Y معدل یک نفر در این ۳ درس باشد آنگاه $X_۱ \sim N(۱۲,۴)$، $X_۲ \sim N(۱۴,۲)$ و $X_۳ \sim N(۱۵,۲)$

$$Y = \frac{۴X_۱ + ۳X_۲ + ۳X_۳}{۱۰} \sim N(۱۳/۵, ۱)$$

الف- $$P(Y > ۱۴/۵) = P(\frac{Y-\mu}{\sigma} > \frac{۱۴/۵ - ۱۳/۵}{۱}) = P(Z > ۱) = ۱ - \Phi(۱)$$
$$= ۱ - ۰/۸۴۱۳ = ۰/۱۵۸۷$$

بنابراین تعداد $۸ \approx ۷/۹۳۵ = (۰/۱۵۸۷)\ ۵۰$ نفر از ۵۰ نفر معدلی بیش از ۱۴/۵ دارند.

ب- اگر M تعداد دانشجویان در بین ۴۰ نفر باشند که دارای معدل کمتر از ۱۳/۵ هستند آنگاه $M \sim B(۴۰, p)$ که در آن

$$p = P(Y < ۱۳/۵) = P(\frac{Y-\mu}{\sigma} < \frac{۱۳/۵ - ۱۳/۵}{۱}) = \Phi(۰) = \frac{۱}{۲}$$

بنابراین با استفاده از تقریب نرمال داریم که

$$P(M \geq ۱۵) = P(M > ۱۴/۵) = P(\frac{M-np}{\sqrt{npq}} > \frac{۱۴/۵ - ۲۰}{\sqrt{۱۰}}) \approx P(Z > -۱/۷۴)$$